广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(2)：117～119

一个退化四阶抛物方程弱解的惟一性

The Uniqueness of Weak Solution for a Degenerate Fourth Order Parabolic Equation

郭金勇
GUO Jin-yong

（柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系，广西柳州　545004）
(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要：证明退化四阶抛物方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)+\lambda|u|^{p-2}u=0,x\in\Omega,t>0,p>2$ 在假定具有自然边界条件 $u=\Delta u=0,x\in\partial\Omega,t>0$，以及初始值条件 $u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega$ 下，存在弱解惟一性.

关键词：抛物方程　弱解　惟一性

中图法分类号：O175.26　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2007)02-0117-03

Abstract: In this paper, we consider a fourth order degenerate parabolic equation $\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)+\lambda|u|^{p-2}u=0,x\in\Omega,t>0,p>2$. Under some assumptions on the natural boudary conditions $u=\Delta u=0,x\in\partial\Omega,t>0$, and the initial condition $u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega$, we have proved the existence of uniqueness of weak solution.

Key words: parabolic equation, weak solution, uniqueness

本文考虑如下退化四阶抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)+\lambda|u|^{p-2}u=0,x\in\Omega,t>0,p>2,\qquad(1)$$

其中 $\lambda>0,\Omega\subset R^N$ 为一有界区域，$\Delta_p^2=\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$ 称为 p-双调和算子，$p=2$ 时为通常的双调和算子.

根据物理学的研究，通常假定方程(1)具有自然边界条件

$$u=\Delta u=0,x\in\partial\Omega,t>0,\qquad(2)$$

以及初始值条件

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega.\qquad(3)$$

方程(1)为典型的高阶方程，具有丰富的理论内涵. 近年来，有许多关于 p-双调和方程研究的文献，比如，Ji rí Benedikt[1,2] 研究 p-双调和方程

$$(|u''|^{p-2}u'')''=\lambda|u|^{q-2}u,$$

其中 $\lambda\in R,p,q>1$，证明这个初边值问题解的存在性和惟一性，并且还讨论了这个方程在广义 Robin-型条件下，每个正特征值都是单的.

Pavel Drábek 和 Mitsuharu Ôtani[3] 研究方程

$$\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)=\lambda|u|^{p-2}u,p>1,\qquad(4)$$

并证明方程(4)和(2)有一个单的、孤立的正主特征值 λ_1.

本文所讨论的方程有些类似于 p-Laplace 方程，但是用于研究 p-Laplace 方程的许多方法，如基于极大值原理的方法，对此方程不再有效. 由于退化，方程(1)～(3)不再有通常意义下的古典解. 因此，本文证明方程(1)～(3)弱解的惟一性.

1　相关定义和定理

定义　一个函数 u 被称为方程(1)～(3)的弱解，如果满足条件：

(Ⅰ) $u\in L^\infty(0,T;W_0^{2,p}(\Omega))\cap C(0,T;L^2(\Omega))$，$\frac{\partial u}{\partial t}\in L^\infty(0,T;W_0^{-2,p'}(\Omega))$，其中 p' 是 p 的共轭指数.

(Ⅱ) 对 $\varphi\in C_0^\infty(Q_T),Q_T=\Omega\times(0,T)$，以下积分等式成立

$$-\iint_{Q_T}u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

收稿日期：2006-09-25
修回日期：2006-11-20
作者简介：郭金勇(1962-)，男，硕士，讲师，主要从事偏微分方程的研究。

$\iint_{Q_T} \lambda |u|^{p-2} u\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$

(Ⅲ) $u(x,0) = u_0(x)$.

C. C. Liu 和 J. Y. Guo[4] 证明其弱解的存在性、渐近行为和有限扰动传播. 其中弱解的存在性见定理 1.

定理 1[4] 设 $u_0 \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $p > 2$, 则方程(1) ～(3) 至少存在一个弱解.

2 弱解的惟一性

为了证明方程(1) ～ (3) 弱解的唯一性, 先证明一个引理.

引理 1 对 $u_0 \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $\varphi \in L^\infty(t_1,t_2; W_0^{2,p}(\Omega))$ 及 $\varphi_t \in L^\infty(\Omega \times (t_1,t_2))$, $p > 2$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$. 则问题(1) ～ (3) 中的弱解 u 满足

$$\int_\Omega u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + |\Delta u|^{p-2}\Delta u \Delta\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \lambda\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u(x,t_2)\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x.$$

特别地, 对 $\varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega (u(x,t_1) - u(x,t_2))\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi + \lambda|u|^{p-2}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \quad (5)$$

证明 由 $\varphi \in L^\infty(t_1,t_2;W_0^{2,p}(\Omega))$ 及 $\varphi_t \in L^\infty(\Omega \times (t_1,t_2))$, 得出存在函数序列 $\{\varphi_k\}$, 当 $k \to \infty$ 时 $\|\varphi_{kt} - \varphi_t\|_{L^\infty(\Omega\times(t_1,t_2))} \to 0$, $\|\varphi_k - \varphi\|_{L^\infty(t_1,t_2;W_0^{2,p}(\Omega))} \to 0$.

选取函数 $j(s) \in C_0^\infty(R)$, 使得

$$j(s) \geqslant 0, s \in R; j(s) = 0, \forall\ |s| > 1; \int_R j(s)\mathrm{d}s = 1.$$

对 $h > 0$, 定义 $j_h(s) = \frac{1}{h}j(\frac{s}{h})$ 且

$$\eta_h(t) = \int_{t-t_2+2h}^{t-t_1-2h} j_h(s)\mathrm{d}s.$$

显然, 对所有的 $t \in (t_1,t_2)$, $\eta_h \in C_0^\infty(t_1,t_2)$, $\lim_{h\to 0^+}\eta_h = 1$.

在弱解定义中选择 $\varphi = \varphi_k(x,t)\eta_h(t)$, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_{kt}\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi_k\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \lambda\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi_k\eta_h\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

注意到

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega (u\varphi_k)|_{t=t_1}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{t_1+h}^{t_1+3h}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1+h}^{t_1+3h}\int_\Omega (u\varphi_k)|_{t=t_1} j_h(t-t_1-2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{t_1+h<t<t_1+3h}\int_\Omega |(u\varphi_k)|_t - (u\varphi_k)|_{t_1}|\mathrm{d}x.$$

且 $u \in C(0,T;L^\infty(\Omega))$, 上式右端 $\to 0$(当 $h \to 0$ 时). 类似地

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\varphi_k j_h(t-t_2+2h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega (u\varphi_k)|_{t=t_2}\mathrm{d}x\right| \to 0,$$ 当 $h \to 0$ 时.

令 $h \to 0$, $k \to +\infty$, 得

$$\int_\Omega u(x,t_1)\varphi(x,t_1)\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + |\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \lambda\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u(x,t_2)\varphi(x,t_2)\mathrm{d}x.$$

特别地, 对 $\varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega (u(x,t_1) - u(x,t_2))\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi + \lambda|u|^{p-2}u\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

引理 1 证毕.

固定 $\tau \in (0,T)$, 令 h 满足 $0 < \tau < \tau + h < T$. 设 $t_1 = \tau$, $t_2 = \tau + h$, 用 $\frac{1}{h}$ 乘以(5) 式, 对 $\varphi \in W_0^{2,p}(\Omega)$ 得到

$$\int_\Omega (u_h(x,\tau))_\tau\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (|\Delta u|^{p-2}\Delta u)_h(x,\tau)\Delta\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \lambda(|u|^{p-2}u)_h(x,\tau)\varphi\,\mathrm{d}x = 0, \quad (6)$$

其中

$$u_h(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau, t \in (0,T-h), \\ 0, t > T-h. \end{cases}$$

定理 2 设 $u_0 \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $p > 2$, 则方程(1) ～ (3) 仅有一个弱解.

证明 假定 u_1, u_2 为问题(1) ～ (3) 的两个弱解, 则

$$\int_\Omega (u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau))_{h\tau}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega (|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2)_h(x,\tau)\Delta\varphi\,\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega (|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2)_h(x,\tau)\varphi\,\mathrm{d}x = 0.$$

对固定的 τ, 取 $\varphi(x) = (u_1 - u_2)_h \in W_0^{2,p}(\Omega)$, 从而

$$\int_\Omega (u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau))_{h\tau}(u_1 - u_2)_h\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{\Omega}(|\Delta u_1|^{p-2}\Delta u_1 - |\Delta u_2|^{p-2}\Delta u_2)_h(x,\tau)\Delta(u_1 - u_2)_h\mathrm{d}x - \lambda\int_{\Omega}(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2)_h(x,\tau)(u_1 - u_2)_h\mathrm{d}x.$$

在区间$[0,T]$上由t_1到$t_2(>t_1)$对上式关于τ进行积分,得

$$\int_{\Omega}|(u_1-u_2)_h|^2(x,t)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

从而

$$\int_{\Omega}|(u_1-u_2)_h|^2\mathrm{d}x = 0.$$

因此,$u_1=u_2$. 定理2证毕.

参考文献:

[1] JI Ři BENEDIKT. Uniqueness theorem for p-biharmonic equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations,2002,53:1-17.

[2] JI Ři BENEDIKT. On simplicity of spectra of p-biharmonic equations[J]. Nonlinear Ann,2004(58):835-853.

[3] PAVEL DRáBEK,MITSUHARU ÔTANI. Global bifurcation result for the p-biharmonic operator [J]. Electronic Journal of Differential Equations,2001,48:1-19.

[4] LIU CHANGCHUN,GUO JINYONG. Weak solutions for a fourth order degenerate parabolic equation [J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics,2006,54(1):27-39.

(责任编辑:邓大玉)

科学家发明可弯曲的无线薄片型能源装置

日本东京大学的科学家制造出了一种新型可弯曲的薄片型无线能量传输装置。这种以塑料为基底的装置,能够放置在桌面、地板、墙壁等许多地方,无需电线和连接器就能够给放在其上或附近的电子设备供电。

这个装置的电子部分是通过艺术级的喷墨打印技术把电子墨水打印到塑料基底上制造出来的,是一种分层装置,包括一层打印上去的铜线圈薄片阵列用来探测附近电子设备的位置,和一层发送线圈用来无线传输能量。这种装置传输电流通过电磁感应来完成,作用在发送线圈上的电压产生电磁场,电磁场在附近的电子设备的接受线圈中感应出电流。成品大约1毫米厚21厘米见方,并且有潜力以后制造出足够覆盖地板或墙壁的大面积装置。这个薄片能够提供最高40瓦特功率的能量,足够为一个电灯泡或者一些能够接受无线能源的小型电子设备(如手机、钟表等)供电。这种薄片的效率高达81%,即它发出能量的81%能够被所驱动的装置接受。这个装置是电子设备的重大变革。相关科学家认为这种能量传输薄片有两个重要意义:一是制造环境友好的能源系统,二是发展出的能源传输技术能够促进“周围环境电子学”——一种安装在家里或办公室来加强日常安全和便利的电子网络——的发展。

(据科学网)