广西科学 Guangxi Sciences 2007, 14(2):110～112,116

一类具有偏差变元的 Lienard 型方程的周期解

Periodic Solutions of The Lienard-type Equation with Delays and Deviating Argument

姚晓洁,秦发金

YAO Xiao-jie,QIN Fa-jin

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)

(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou,Guangxi, 545004,China)

摘要:利用 Mawhin 重合度理论,研究一类具有偏差变元 Lienard 型方程

$$x''(t)+\sum_{i=1}^{n}h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}+f(t,x(t),x(t-\tau_0)))x'(t)+g(t,x(t-\tau_1(t)))=p(t)$$

的周期解的存在性,得到其周期解存在的新的充分条件,推广和改进文献[1,2]的相关结果.

关键词:Lienard 型方程 周期解 存在性 重合度

中图法分类号:O175.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)02-0110-03

Abstract: By using the coincidence degree theory of Mawhin, we study the existence of periodic solutions of the Lienard-type equation

$$x''(t)+\sum_{i=1}^{n}h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}+f(t,x(t),x(t-\tau_0)))x'(t)+g(t,x(t-\tau_1(t)))=p(t)$$

with delays and deviating argument, Some new sufficient condition of periodic solutions is obtained. The results on reference[1,2] are extended and improved.

Key words: Lienard-type equation, periodic solutions, existence, coincidence degree

Lienard 型方程

$$x''(t)+f(x)x'+g(x)=p(t)$$

和

$$x''(t)+f_1(x)|x'|^2+f_2(x)x'+g(x)=p(t)$$

由于具有广泛的应用背景,人们对其周期解的存在性问题一直怀着强烈的兴趣,做了大量的研究工作. 相对来说,对具偏差变元的 Lienard 型方程周期解的存在性研究还比较少. 最近,鲁世平等[1] 研究具偏差变元的 Lienard 型方程

$$x''(t)+f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=p(t) \tag{1}$$

的周期解问题,通过利用 Mawhin 重合度理论,首先获得的结果是定理 A.

定理 A 设 $F=\sup\limits_{(t,x,y)\in R^3}|f(t,x,y)|<\frac{1}{T}$,$\beta_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\beta(t)\geqslant\beta_0=\min\limits_{t\in[0,T]}\beta(t)>0$,且满足条件($H_0$) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sup\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant r$;$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\operatorname{sgn}(x)g(x)=+\infty$,则当 $r<\frac{1-FT}{\beta_1T^2}$ 时,方程(1)至少存在一个 T-周期解.

肖兵等[2] 则研究一类具偏差变元的 Lienard 型方程

$$x''(t)+f_1(x)|x'|^{2n}+f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t) \tag{2}$$

的周期解问题,通过利用 Mawhin 重合度理论,在(H_0)不成立的情况下,获得的结果是定理 B 和定理 C.

定理 B 假设下列条件成立:

(H_1) 存在正常数 d 和 m,使 $\lambda[g(t,x)-p(t)]>0,\forall t\in R,|x|\geqslant d$,并且下列条件之一成立:

(i) 当 $t\in R,x\leqslant -d$ 时,$g(t,x)-p(t)\geqslant -m$,且 $\forall x\in R,f_1(x)\geqslant 0$;

(ii) 当 $t\in R,x\geqslant d$ 时,$g(t,x)-p(t)\leqslant m$,且 $\forall x\in R,f_1(x)\leqslant 0$;

(H_2) $F=\sup\limits_{(t,x,y)\in R^3}|f(t,x,y)|<\frac{1}{4T}$.

收稿日期:2006-07-03

作者简介:姚晓洁(1970-),女,讲师,主要从事微分方程的研究工作。

则方程(2) 至少存在一个 T- 周期解.

定理C 若(H_2) 成立,假设下列条件成立:

(H_3) 存在正常数 d 和 m,使 $x[g(t,x)-p(t)]<0,\forall t\in R,|x|\geqslant d$,并且下列条件之一成立:

(iii) 当 $t\in R,x\geqslant d$ 时,$g(t,x)-p(t)\geqslant -m$,且 $\forall x\in R,f_1(x)\geqslant 0$;

(iv) 当 $t\in R,x\leqslant -d$ 时,$g(t,x)-p(t)\leqslant m$,且 $\forall x\in R,f_1(x)\leqslant 0$.

则方程(2) 至少存在一个 T- 周期解.

受文献[1 ~ 3] 的启发,借用文献[4] 的思想方法本文研究一类具偏差变元的 Lienard 型方程

$$x''(t)+\sum_{i=1}^{n}h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}+f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)+g(t,x(t-\tau_1(t)))=p(t) \quad (3)$$

的周期解存在性问题,其中 $h_i(i=1,2,\cdots,n),\tau_0,\tau_1,p:R\to R,g:R\times R\to R$ 和 $f:R\times R\times R\to R$ 为连续函数,τ_0,τ_1,f,g,p 关于 t 为 T- 周期函数,$\alpha_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\alpha_i>0,T>0$ 为常数. 通过利用 Mawhin 重合度理论和新的分析技巧估计 Mawhin 延拓定理中集合 Ω 的先验界,在不要求(H_0) 成立的条件下,得到方程(3) 周期解存在性的若干新结果,推广和改进文献[1,2] 的相关结果.

本文引入下列记号:

$X=\{x|x\in C^1(R,R),x(t+T)=x(t),\forall t\in R\}$,定义范数 $\|x\|_X=\max\{|x|_\infty,|x'|_\infty\}$,其中 $|x|_\infty=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$;$Y=\{x|x\in C(R,R),x(t+T)=x(t),\forall t\in R\}$,定义范数 $\|x\|_Y=|x|_\infty$,则 X,Y 均为 Banach 空间. 在 X 上定义线性算子

$$L:D(L)\subset X\to Y,Lx=x'',D(L)=\{x|x\in X,x''\in C(R,R)\}, \quad (4)$$

定义非线性算子 $N:X\to Y$,

$$Nx=-\sum_{i=1}^{n}h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}-f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)-g(t,x(t-\tau_1(t)))+p(t), \quad (5)$$

易得 $\mathrm{Ker}L=R,\mathrm{Im}L=\{x|x\in Y,\int_0^T x(s)\mathrm{d}s=0\}$,因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子. 令投影算子 $P:X\to \mathrm{Ker}L$ 和 $Q:Y\to Y/\mathrm{Im}L$ 为

$$Px(t)=x(0),Qx(t)=\frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{d}s$$

则 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L,\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$. 令 $L_P=L|_{D(L)\cap \mathrm{Ker}P}$,易证 L_P 是可逆的,且其逆为

$$L_P^{-1}:\mathrm{Im}L\to D(L)\cap\mathrm{Ker}P,L_P^{-1}(y(t)=-\frac{t}{T}\int_0^T(t-s)y(s)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s. \quad (6)$$

1 几个引理

由(4)式和(5)式易知,算子方程 $Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1)$ 与下列方程等价

$$x''(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}+\lambda f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)+\lambda g(t,x(t-\tau_1(t)))=\lambda p(t). \quad (7)$$

引理1[5] (Mawhin 延拓定理) 设 X,Y 均为 Banach 空间,$L:D(L)\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子,$N:\overline{\Omega}\to Y$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的,且 Ω 为 X 中的有界开集,又假设下列条件成立:

(a) $Lx\neq\lambda Nx,\forall x\in\partial\Omega\cap D(L),\lambda\in(0,1)$;

(b) $QNx\neq 0,\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$;

(c) $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$.

那么方程 $Lx=Nx$ 在 Ω 中至少有一个解.

引理2 若存在常数 $D>0$,使得下列条件之一成立:

(A_1) $x[g(t,x)-p(t)]>0,\forall t\in R,|x|>D$;

(A_2) $x[g(t,x)-p(t)]<0,\forall t\in R,|x|>D$.

又设 $x(t)$ 为方程(7) 的任意 T- 周期解,则有

$$|x|_\infty\leqslant D+\frac{T}{2}|x'|_\infty. \quad (8)$$

证明 设 $x(t)$ 为方程(7) 的任意 T- 周期解,我们只对(A_1) 情形进行证明,(A_2) 情形的证明完全类似. 令 $x(t_1)=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}x(t),x(t_2)=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}x(t)$,则有

$$x'(t_1)=0,x''(t_1)\leqslant 0,\text{且}x'(t_2)=0,x''(t_2)\geqslant 0,$$

结合(7) 式,有

$$g(t_1,x(t_1-\tau_1(t_1)))-p(t_1)\geqslant 0\text{且}g(t_2,x(t_2-\tau_1(t_2)))-p(t_2)\leqslant 0,$$

因此,由条件(A_1),有

$$x(t_1-\tau_1(t_1))>-D\text{且}x(t_2-\tau_1(t_2))<D,$$

由 $x(t-\tau_1(t))$ 在 R 上的连续性可知,存在 $\xi\in R$,使得 $|x(\xi-\tau_1(\xi))|\leqslant D$. 记 $\xi-\tau_1(\xi)=nT+t_0,n\in N,t_0\in[0,T]$,则 $|x(t_0)|=|x(\xi-\tau_1(\xi))|\leqslant D$. 同时存在 $t_2\in[t_0,t_0+T]$,使得 $x(t_2)=\max\limits_{t\in[t_0,t_0+2\pi]}x(t)$. 于是由 $x(t_2)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t_2}x'(t)\mathrm{d}t$,得

$$|x(t_2)|\leqslant|x(t_0)|+\int_{t_0}^{t_2}|x'(t)|\mathrm{d}t, \quad (9)$$

此外,还有 $x(t_2)=x(t_0+T)-\int_{t_2}^{t_0+T}x'(s)\mathrm{d}s=x(t_0)-\int_{t_2}^{t_0+T}x'(t)\mathrm{d}t$,则有

$$|x(t_2)|\leqslant|x(t_0)|+\int_{t_2}^{t_0+T}|x'(t)|\mathrm{d}t, \quad (10)$$

(9) 式和(10) 式相加得 $|x(t_2)|\leqslant|x(t_0)|+\frac{1}{2}\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t$,即 $|x|_\infty\leqslant D+\frac{1}{2}\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant D+\frac{T}{2}|x'|_\infty$.

2 主要结果

定理1 若引理2的条件(A_1)成立,并且满足下列条件:

(B_1) 存在常数$a \geqslant 0, b > 0$,使得下列条件之一成立:

(i) 当$t \in R, x < -D$时,$g(t,x) - p(t) \geqslant ax - b$,且$\forall x \in R, h_i(x) \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n$;

(ii) 当$t \in R, x > D$时,$g(t,x) - p(t) \leqslant ax + b$,且$\forall x \in R, h_i(x) \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,n$;

则当$aT^2 + 2FT < 1$时,方程(3)至少有一个T-周期解,其中$F = \sup\limits_{(t,x,y)\in R^3} |f(t,x,y)|$.

证明 设$x(t)$为方程(7)的任意T-周期解,将方程(7)两边从0到T积分得

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}\mathrm{d}t + \int_0^T f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)\mathrm{d}t + \int_0^T [g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)]\mathrm{d}t = 0, \tag{11}$$

结合条件(B_1),我们分两种情形证明.

情形1 若(B_1)的(i)成立,由(11)式得

$$\int_{[x(t-\tau(t))>D]} |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t = \int_{[x(t-\tau(t))>D]} [g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)]\mathrm{d}t = -\int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} [g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)]\mathrm{d}t - \int_0^T \sum_{i=1}^n h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}\mathrm{d}t - \int_0^T f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T |f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))||x'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + F\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t,$$

从而有

$$\int_0^T |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t = \int_{[x(t-\tau(t))>D]} |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2\int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + F\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t = 2\Big[\int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \int_{[x(t-\tau(t))<D]} |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t\Big] + F\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2\Big[g_D T + \int_0^T (a|x(t-\tau(t))| + b)\mathrm{d}t\Big] + F\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2(g_D + b)T + 2aT|x|_\infty + FT|x'|_\infty, \tag{12}$$

其中$g_D = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T, |x|\leqslant D} |g(t,x) - p(t)|$.且

$$\int_0^T \Big|\sum_{i=1}^n h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}\Big|\mathrm{d}t = \int_0^T \sum_{i=1}^n h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}\mathrm{d}t = -\int_0^T f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)\mathrm{d}t - \int_0^T [g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)]\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T |f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))||x'(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2(g_D + b)T + 2aT|x|_\infty + 2FT|x'|_\infty. \tag{13}$$

情形2 若条件(B_1)的(ii)成立,类似情形(i)的证明,同样有(12)与(13)式成立.由$x(0) = x(T)$知,必存在$\xi \in [0,T]$,使得$x'(\xi) = 0$,于是有$x'(t) = x'(\xi) + \int_\xi^t x''(s)\mathrm{d}s + \int_\xi^t x''(s)\mathrm{d}s$,所以

$$|x'(t)| \leqslant \int_\xi^t |x''(s)|\mathrm{d}s. \tag{14}$$

此外由$x'(t) = x'(\xi + T) - \int_t^{\xi+T} x''(s)\mathrm{d}s = -\int_t^{\xi+T} x''(s)\mathrm{d}s$,得

$$|x'(t)| \leqslant \int_t^{\xi+T} |x''(s)|\mathrm{d}s, \tag{15}$$

由(14)和(15)式相加得$|x'(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |x''(s)|\mathrm{d}s$,即有

$$|x'|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |x''(s)|\mathrm{d}s. \tag{16}$$

因此,由(7)、(12)、(13)、(16)式得

$$|x'|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |x''(s)|\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T \Big|\sum_{i=1}^n h_i(x)|x'|^{2\alpha_i}\Big|\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T |f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))||x'(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2(g_D + b)T + 2aT|x|_\infty + 2FT|x'|_\infty \leqslant 2(g_D + b)T + 2aT\Big(D + \frac{T}{2}|x'|_\infty\Big) + 2FT|x'|_\infty = 2(g_D + b + aD)T + (aT^2 + 2FT)|x'|_\infty.$$

由条件$aT^2 + 2FT < 1$,则

$$|x'|_\infty \leqslant \frac{2(g_D + b + aD)T}{1 - aT^2 - 2FT} \triangleq R_1, \tag{17}$$

进一步由(8)式得

(下转第116页 Continue on page 116)

0是一个关于P,G,R的线性不等式.我们可以用LMI求解.

定理3 若存在正定的矩阵P,G,R及正常数α，β使得矩阵$J<0$，则系统(3)是绝对稳定的.

参考文献：

[1] JU PARK. Robust guarantced cost control for uncertain linear differential systems of neutral type[J]. Applied Mathematics and Com Putation, 2003, 140: 523-535.

[2] 孙静，朱振广.一类具有时滞的控制系统绝对稳定性[J].辽宁工学院学报，2003(3):55-57.

[3] GE J H, FRANK P M, LIN C F. H_∞ Control via output feedback for state delay systems[J]. Int J Control, 1996, 64(1): 1-7.

[4] GE J H, FRANK P M, LIN C F. Robust H_∞ state feedback control for linear systems with delay and parameter uncertainty[J]. Automatica, 1996, 32(8): 1183-1185.

[5] 卜春霞，郑宝杰.一类不确定时滞系统的H_∞问题[J].郑州大学学报：理学版，2005，37(2):33-37.

[6] CHOI H H, CHUNG M J. Memoryless controller design for linear systems with delayed state and control[J]. Automatica, 1995, 31(4): 917-919.

[7] 俞立.鲁棒性——线性矩阵不等式处理方法[M].北京：清华大学出版社，2002.

（责任编辑：韦廷宗）

（上接第112页 Continue from page 112）

$$|x|_\infty \leqslant D + \frac{T}{2}|x'|_\infty \leqslant D + \frac{T}{2}R_1 \triangleq R_2, \quad (18)$$

取$M>\max\{R_1,R_2\}$，令$\Omega=\{x\in X:\|x\|<M\}$，由(5)、(6)式易知$N$在$\overline{\Omega}$上是$L$-紧的.从上面的证明知引理1的条件(a)成立.当$x\in\partial\Omega\cap \mathrm{Ker}L$时，$x$为常数且$|x|=M$，注意到$M>D$，则$QNx=-\frac{1}{T}\int_0^T[g(t,x)-p(t)]\mathrm{d}t\neq 0$，即引理1的条件(b)满足.

定义连续映射$H(x,\mu)$为

$$H(x,\mu)=-\mu x-\frac{1-\mu}{T}\int_0^T[g(t,x)-p(t)]\mathrm{d}t,$$

$\mu\in[0,1]$，则当$x\in \mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$及$\mu\in[0,1]$时，有

$$xH(x,\mu)=-\mu x^2-\frac{1-\mu}{T}\int_0^T x[g(t,x)-p(t)]\mathrm{d}t<0,$$

故$H(x,\mu)$为同伦映射，由于$\mathrm{Im}Q=\mathrm{Ker}L=R$，可取$J$为自然同构，因而有

$$\deg\{JQN,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}=$$
$$\deg\{-\frac{1}{T}\int_0^T[g(t,x)-p(t)]\mathrm{d}t,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}=$$
$$\deg\{-x,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}\neq 0.$$

由引理1知，方程(3)至少存在一个T-周期解.

类似定理1的证明，可得下面结论成立：

定理2 若引理2的条件(A_2)成立，并且满足下列条件：

(B_2)存在常数$a\geqslant 0,b>0$，使得下列条件之一成立：

(i)当$t\in R,x<-D$时，$g(t,x)-p(t)\leqslant -ax+b$，且$\forall x\in R,h_i(x)\leqslant 0,i=1,2,\cdots,n$;

(ii)当$t\in R,x>D$时，$g(t,x)-p(t)\geqslant -ax-b$，且$\forall x\in R,h_i(x)\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$.

则当$aT^2+2FT<1$时，方程(3)至少一个T-周期解，其中$F=\sup\limits_{(t,x,y)\in R^3}|f(t,x,y)|$.

注 本文的结论不要求条件(H_0)成立，且当$a=0$时，有$F=\sup\limits_{(t,x,y)\in R^3}|f(t,x,y)|<\frac{1}{2T}$.把$F=\sup\limits_{(t,x,y)\in R^3}|f(t,x,y)|<\frac{1}{4T}$放大了两倍，因此本文的结果推广和改进了文献[1,2]的相关结果.

参考文献：

[1] 鲁世平，葛渭高.一类二阶具具偏差变元的微分方程周期解[J].数学学报，2002，45(4):811-818.

[2] 肖兵，周启元，于跃华.一类具偏差变元的Lienard型方程的周期解[J].大学数学，2005，21(4):67-71.

[3] 孟华，周启元，黎中秋.具偏差变元的Lienard型方程的周期解[J].湖南文理学院学报：自然科学版，2004，16(4):18-21.

[4] 范良君.一类具有偏差变元的Duffing型方程的周期解[J].湖南文理学院学报：自然科学版，2006，18(1):10-12.

[5] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations: Lecture Notes in Math, Vol 568[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

（责任编辑：韦廷宗）