广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(2):91～94

三角形映射周期轨道的特征研究*

Characteristics of Periodic Orbits of Triangular Maps

张晓燕[1]，孙太祥[2]

ZHANG Xiao-yan[1]，SUN Tai-xiang[2]

(1.广东海洋大学理学院，数学与信息科学系，广东湛江 524088；2.广西大学数学与信息科学学院，广西南宁 530004)

(1. College of Mathematics and Information Science，Guangdong Ocean University，Zhanjiang，Guangdong，524088，China；2. College of Mathematics and Information Science，Guangxi University，Nanning，Guangxi，530004，China)

摘要：在区间自映射的基础上研究二维空间的三角形映射，讨论三角形映射周期轨道，得到逐点回归三角形映射的重要特征 $R(F)=Fix(F^4)$，并在二维空间中引入超旋转对的概念，利用其性质刻画出三角形映射周期轨型的结构.

关键词：三角形映射　返回轨道　超旋转对

中图法分类号：O189.11　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2007)02-0091-04

Abstract：In this paper，triangular maps of the second dimension space are considered. We extend characteristics of self-maps of the interval to triangular maps. Mainly we study periodic orbits of triangular maps. The characteristics of point-wise recurvent triangular maps are obtained. We have proved that $R(F)=Fix(F^4)$. Especially，we gave the periodic structure of triangular maps by adopting the concept of over-rotation pairs.

Key words：triangular map，return trajectory，over-rotation pair

动力系统的研究起源于牛顿的经典力学. 在牛顿的理论中，一个系统的运动规律完全由一簇以时间为参数的微分方程所决定，但绝大多数的微分方程不能用已知函数积分来表示其通解，这导致微分方程定性理论的研究. 19 世纪末，H. Poincaré 创立了微分方程定性理论，其精神是不通过微分方程的显式解而直接研究解的几何和拓扑性质. 20 世纪早期，G. D. Birkhoff 在继承并发展 Poincaré 工作的基础上，为这一学科建立了大范围的理论框架，使动力系统一词首见于其专著[1]. 从 20 世纪 60 年代初开始，动力系统迅速活跃起来，新的研究方向相继产生. 今天的动力系统大致有微分动力系统、Hamilton 动力系统、拓扑动力系统、复动力系统、遍历论、随机动力系统等若干方向[2]. 拓扑动力系统研究一般的连续系统、在纯粹的意义下研究动力系统最基本的概念、最广泛的共性. 一般而言，动力系统研究的主要问题[3]有：轨道长时间的准渐近性质，如极限点集、非游荡点集、周期点集等；轨道在相空间中的稠密性，如极小性、拓扑传递性、拓扑混合性等；动力系统的整体性质，如全局吸引子等；动力系统的拓扑分类与结构稳定性，如双曲不动点和双曲不变集的稳定性；动力系统的复杂性，包括几何复杂性，如混沌、分形，以及动力学复杂性，如拓扑熵、Liapunov 指数等.

一个拓扑动力系统是由拓扑空间及其上的连续自映射构成的系统，前人已经得到大量关于线段、圆周、树、图上自映射的动力学性质. 关于更高维空间上连续自映射的动力学性质的文献还不是很多. 但是，有关三角形映射的研究也在不断拓展. 如文献[4～6]从不同的方面讨论了三角形映射的动力学性质.

1982 年，Li T. Y. 等在文献[7]中引入返回轨道的定义，并且获得了两个有关的主要定理. 接着，1999 年麦结华[8]又引入多分离、向心点和离心点的概念，更进一步地讨论了具有返回轨道的区间映射的周期

收稿日期：2006-02-17

修回日期：2007-01-05

作者简介：张晓燕(1979-)，女，硕士，主要从事动力系统理论研究工作。

*国家自然科学基金(No.10361001，No.10461001)资助项目。

轨道，并且得到了比 Li,Yorke 早些提出的两个定理更为一般的结论：$f \in C^0(I)$，设 $O_n(x,f) = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 是 f 的一个返回轨道，且 p 是 $O_n(x,f)$ 中 f 的一个不动点. 若 $O_n(x,f)$ 中有 k 个相对于 p 的向心点 $(k \geqslant 1)$，则 f 有周期为奇数 $1 < R \leqslant \frac{n-2}{k} + 2$ 的周期点. 为了更好的刻画一个周期轨的型，旋转对，旋转数和超旋转对、超旋转数的概念被提出[9]. 这些新的概念不但可以描述一个周期轨的周期，而且也描述了这个周期轨的基本形状. 文献[9] 证明了：若 $f \in C^0(I)$ 具有超旋转对为 (p,q) 的周期轨，且 $(p,q) \geq (r,s)$，则 f 具有超旋转对为 (r,s) 的周期轨. 事实上，这个定理蕴涵了 šarkovskii 定理. 从而，在一维空间上，映射的周期轨的型的问题就有了较好的回答. 三角形映射的提出，也促使我们去考虑二维映射的周期轨的型的结构.

本文在区间自映射的基础上研究二维空间的三角形映射，讨论三角形映射周期轨道，得到了逐点回归三角形映射的重要特征，并在二维空间中引入超旋转对的概念，利用其性质刻画出三角形映射周期轨型的结构，从而丰富了二维空间周期轨型的理论.

1 有关定义和引理

用 $\mathbf{N}$ 表示所有正整数的集合，$\mathbf{Z}^+$ 表示所有非负整数的集合. 对任意 $n \in \mathbf{N}$，记 $\mathbf{N}_n = \{1,2,\cdots,n\}$，$\mathbf{Z}_n = \{0,1,\cdots,n\}$. 设 (X,d) 表示紧致度量空间，$I = [0,1]$，$C^0(X)$ 表示 X 上所有连续自映射的集合. 对任 $f \in C^0(X)$，$x \in X$，$A \subset X$ 及 $r > 0$，记 $B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\}$，$B(A,r) = \bigcup_{x \in A} B(x,r)$，$O(x,f) = \{f^n(x) : n \in \mathbf{Z}^+\}$，$\omega(x,f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{O(f^n(x),f)}$ 且 $\Omega(x,f) = \{y :$ 存在 $\{x_i\} \subset X$ 且 $\{n_i\} \subset \mathbf{N}$ 使得 $x_i \to x$，$n_i \to \infty$ 且 $f^{n_i}(x_i) \to y\}$. 其中 $O(x,f)$ 和 $\omega(x,f)$ 分别被称为 f 作用下 x 的轨道和 x 的 ω- 极限集. 对任 $n \in \mathbf{N}$，$x \in X$，若 $f^n(x) = x$ 且对每个 $k \in [0,n) \cap \mathbf{N}$ 有 $f^k(x) \neq = x$，则称 x 是 f 的 n 周期点（或 n- 周期点）；若 $f(x) = x$，则称 x 是 f 的不动点；若 $x \in \omega(x,f)$，则称 x 是 f 的回归点. 我们分别用 $Fix(f)$，$P_n(f)$ 和 $R(f)$ 表示 f 下的不动点集，n- 周期点集，和回归点集. 记 $P(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(f)$. 若 $A \subset X$，则分别用 $\operatorname{int} A$，∂A，$\overline{A}$ 和 $* A$ 表示 A 的内部，边界，闭包和基，且用 $\#(A)$ 表示 A 中元素的个数.

定义 1 设 $f \in C^0(X)$. 若对任 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $x, y \in X$ 且 $d(x,y) < \delta$ 时，对任 $n \in \mathbf{N}$ 有 $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$，则称 f 是等度连续的.

定义 2 设 $I = [0,1]$，称 $F : I^2 \to I^2$ 为三角形映射，若 $F(x,y) = (f(x), g(x,y))$，其中 $f \in C^0(I)$，$g : I^2 \to I$ 是连续的.

定义 3 设 $f \in C^0(I)$. 若存在 $[a,b]$，$[c,d] \subseteq I (a < b \leqslant c < d)$，使得 $f([a,b]) \cap f([c,d]) \supseteq [a,b] \cup [c,d]$，则称 f 含有湍流.

定义 4 在 I^2 上定义序，使得对任 $P = (x,y)$，$Q = (a,b) \in I^2$，$P < Q \Leftrightarrow (1) x < a$ 或 $(2) x = a$ 且 $y < b$.

显然，这是 I^2 上的一个全序. 对任 $P \leqslant Q$，记 $<< Q, P >> = << P, Q >> = \{P \leqslant S \leqslant Q : S \in I^2\}$.

定义 5 设 $F \in C^0_{\triangle}(I^2)$，$P \in I^2$. 如果存在自然数 n，使得 $F^n(P) \leqslant P < F(P)$ 或 $F(P) < P \leqslant F^n(P)$，那么称 $\{P, F(P), \cdots, F^n(P)\}$ 是 F 的一个返回轨道.

定义 6 设 $F \in C^0_{\triangle}(I^2)$，$P \in I^2$，$A$ 是 F 的不动点. 若 $P < F(P) < A$ 或 $A < F(P) < P$，则称 P 是 F 关于 A 的向心点；若 $F(P) < P < A$ 或 $A < P < F(P)$，则称 P 是 F 关于 A 的离心点；若 $P < A < F(P)$ 或 $F(P) < A < P$，则称 P 是 F 关于 A 的跃点.

定义 7 设 $F \in C^0_{\triangle}(I^2)$，$\mathbf{P}$ 是 F 的 n- 周期轨. $m = \#\{A \in P : F(A) < A$ 且 $F^2(A) > F(A)$ 或 $F(A) > A$ 且 $F^2(A) < F(A)\}$，显然 m 是偶数. 则称 $(\frac{m}{2}, n)$ 是 $\mathbf{P}$ 的超旋转对；称 $\frac{m}{2n}$ 是 $\mathbf{P}$ 的超旋转数.

定义 8 设 $p,q,r,s \in \mathbf{N}$，$p \leqslant \frac{q}{2}$，$r \leqslant \frac{s}{2}$. 若下面条件之一成立：

(1) $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \leqslant \frac{1}{2}$，

(2) $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{m}{n}$，$(m,n) = 1$ 且 $\frac{p}{m} \rhd \frac{r}{m}$，

则称 $(p,q) \geq (r,s)$. 其中 $\rhd$ 指的是 šarkovskii 序.

为了证明主要定理，先给出 2 个有用的引理.

引理 1 设 $F(x,y) = (f(x), g(x,y)) \in C^0_{\triangle}(I^2)$，$a \in Fix(f^2)$ 且 $h(y) = g(f(a), g(a,y))$. 若 F 是等度连续的，则 f 和 h 也是等度连续的.

容易证明引理 1 成立.

引理 2 设 $f \in C^0(I)$，则下面的 3 条等价：

(1) f 是等度连续的；

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(I) = Fix(f^2)$；

(3) $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(I) = R(f)$.

证明 由文献[10] 中的引理 3 得：(1)$\Leftrightarrow$(2). 而 (2)$\Rightarrow$(3) 是显然的. 若 (3) 成立，由文献[11] 中定理 5.2 得：f 是等度连续的，即 (3)$\Rightarrow$(1).

2 逐点回归三角形映射的特征

定理 1 设 $F \in C^0_{\triangle}(I^2)$. 若 $R(F) = I^2$，则 $R(F)$

$= Fix(F^4)$.

证明 由回归点集和周期点集的定义,显然有:$Fix(F^4) \subseteq R(F)$.

任取$(x,y) \in R(F)$,则存在自然数列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$,使得当$n_k \to \infty$时,$F^{n_k}(x,y) \to (x,y)$. 记:$a_n(x,y) = g(f^{n-1}(x), g(f^{n-2}(x), \cdots, g(x,y), \cdots))$, 则有$(f^{n_k}(x), a_{n_k}(x,y)) \to (x,y)$, 从而当$n_k \to \infty$时, $f^{n_k}(x) \to x$,即$x \in R(f)$. 由文献[11]中的推论5.1知:连通图上每个逐点回归映射是等度连续的,则F是等度连续的,又由引理1得f是等度连续的. 根据引理2知$R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(I) = Fix(f^2)$, 即$x \in Fix(f^2)$.

(1) 若$x \in Fix(f)$. 令$h(z) = g(x,z)$,则$h \in C^0(I)$且$h^n(z) = a_n(x,z)$. 因而当$n_k \to \infty$时,$h^{n_k}(y) \to y$,即$y \in R(h)$. 由F是等度连续的,易证h也是等度连续的. 从而$y \in Fix(h^2)$. 因此$(x,y) \in Fix(F^2) \subseteq Fix(F^4)$.

(2) 若$x \in Fix(f^2) - Fix(f)$. 则$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$中必有无穷多项是偶数. 不妨设所有的$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$都是偶数. 令$h(z) = g(f(x), g(x,z))$,则$h \in C^0(I)$且$h^n(z) = a_{2n}(x,z)$,那么$h^{\frac{n_k}{2}}(z) = a_{n_k}(x,z)$. 从而当$n_k \to \infty$时,$h^{\frac{n_k}{2}} \to y$,即$y \in R(h)$. 又因$h$是等度连续的,故$y \in Fix(h^2)$. 因此$(x,y) \in Fix(F^4)$.

3 三角形映射的周期轨道

先给出一个重要性质.

性质 如果$J = \{P, F(P), \cdots, F^n(P)\}$是一个返回轨道,那么存在$F$的不动点$A$及$j \leqslant n-1$,使得$A \in \ll P, F^j(P) \gg$(称$A$是$F$在$J$内的不动点).

证明 J是返回轨道,不妨设$F^n(P) \leqslant P < F(P)$,其中$P = (u,v)$,则$F(P) = (f(u), g(u,v))$.

(1)若$u < f(u)$,由$F^n(P) = (f^n(u), g(f^{n-1}(u), \cdots, g(u,v), \cdots))$, 则$f^n(u) \leqslant u < f(u)$. 从而$\{u, f(u), \cdots, f^n(u)\}$是$f$的一个返回轨道. 因此,一定存在$j \leqslant n-1$,使得$f^{j+1}(u) < f^j(u)$且$f^j(u) > u$. 取$f$的不动点$a \in (u, f^j(u))$. 令$h(y) = g(a,y)$,则$h \in C^0(I)$. 设$b$是$h$的不动点,则$A = (a,b)$是$F$的不动点. 又因$u < a < f^j(u)$,故$P < A < F^j(P)$,即$A \in \ll P, F^j(P) \gg$.

(2)若$u = f(u)$,则对任$n \in N$,$f^n(u) = u$. 从而$F^n(P) = (f^n(u), g(f^{n-1}(u), \cdots, g(u,v), \cdots)) = (u, g(u, g(u), \cdots, g(u,v), \cdots))$,由$F^n(P) \leqslant P < F(P)$,则$g(f^{n-1}(u), \cdots, g(u,v), \cdots) \leqslant v < g(u,v)$. 设$h(y) = g(u,y)$,则有$h^n(v) = g(f^{n-1}(u), \cdots, g(u,v), \cdots) \leqslant v < h(v)$,故$\{v, h(v), \cdots, h^n(v))\}$是$h$的一个返回轨道. 因此一定存在$j \leqslant n-1$使$h^{j+1}(v) < h^j(v)$且$h^j(v) > v$,即存在$h$的不动点$b \in (v, h^j(v))$. 令$A = (u,b)$,则$A$是$F$的不动点且$P < A < F^j(P)$即$A \in \ll P, F^j(P) \gg$.

定理2 设$J = \{P, F(P), \cdots, F^n(P)\}$是$F$的一个返回轨道,$A$是$F$的不动点(在$J$内),若$J$关于$A$有$k$个向心点($k \geqslant 1$),则$F$有周期为奇数$1 < R \leqslant \frac{n-2}{k} + 2$的周期点.

证明 不妨设$F^n(P) \leqslant P < F(P)$;$P = (u,v)$, $A = (a,b)$. 即$(f^n(u), g(f^{n-1}(u), g(f^{n-2}(u), \cdots, g(u,v), \cdots))) \leqslant (u,v) < (f(u), g(u,v))$.

(1) 若$u = f(u)$, 则令$h(v) = g(u,v)$, 从而$F^i(P) = (u, h^i(v))$且$a = u, b = h(b)$. 因此$\{v, h(v), \cdots, h^n(v)\}$是一个返回轨道,且关于$b$有$k$个向心点. 由文献[8]得,$h$有周期为奇数$1 < R \leqslant \frac{n-2}{k} + 2$的周期点. 不妨设$\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$是$h$的$R$-周期轨,因而$\{(u,y_1), (u,y_2), \cdots, (u,y_k)\}$是$F$的$R$-周期轨.

(2) 若$u < f(u)$,则$f^n(u) \leqslant u < f(u)$. 从而$\{u, f(u), \cdots, f^n(u)\}$是一个返回轨道.

情形1 若存在$i \leqslant n$使得$f^i(u)$是f的不动点,则$f^n(u)$也是f的不动点,从而f含湍流. 因此f有所有周期的周期点,也就是说f有周期为奇数$1 < R \leqslant \frac{n-2}{k} + 2$的周期点. 设$\{x_1, x_2, \cdots, x_R\}$是$f$的$R$-周期轨. 又由$h(y) = g(x_R, g(x_{R-1}, \cdots, g(x,y), \cdots)) \in C^0(I)$,设$c$是$h(y)$的不动点,则$\{(x_1,c), (x_2, g(x_1,c)), \cdots, (x_R, g(x_{R-1}, \cdots, g(x_1,c), \cdots))\}$就是$F$的$R$-周期轨.

情形2 若对任$i \leqslant n$,$f^i(u)$不是f的不动点,则$F^i(P)$是关于A的向心点,离心点或跃点,那么$f^i(u)$就是关于a的向心点,离心点或跃点. 即:$F^i(P)$是关于A的向心点,满足$F^i(P) < F^{i+1}(P) < A$或$A < F^{i+1}(P) < F^i(P)$,则$f^i(u) < f^{i+1}(u) < a$或$a < f^{i+1}(u) < f^i(u)$. 因此$\{u, f(u), \cdots, f^n(u)\}$有$k$个关于$a$的向心点. 又由文献[8]得,$f$有周期为奇数$1 < R \leqslant \frac{n-2}{k} + 2$的周期点. 设$\{x_1, x_2, \cdots, x_R\}$是$f$的$R$-周期轨. 又由$h(y) = g(x_R, g(x_{R-1}, \cdots, g(x,y), \cdots)) \in C^0(I)$,则取$c$是$h(y)$的不动点,因而$\{(x_1,c), (x_2, g(x_1,c)), \cdots, (x_R, g(x_{R-1}, \cdots, g(x_1,c), \cdots))\}$就是$F$的$R$-周期轨.

在文献[9]的基础上,对三角形映射利用超旋转对的概念,得出本文中有意义的、重要的定理和证明.

定理 3 设 $F \in C^0_\triangle(I^2)$. 若 F 具有超旋转对为 (p,q) 的周期轨，且 $(p,q) \geq (r,s)$，则 F 具有超旋转对为 (r,s) 的周期轨.

证明 设 $\mathbf{P}$ 是 F 具有超旋转对为 (p,q) 的周期轨，令 $\mathbf{P} = \{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_{q-1},y_{q-1})\}$，使得 $F(x_i,y_i) = (f(x_i),g(x_i,y_i)) = (x_{i+1},y_{i+1}),(0 \leqslant i \leqslant q-2)$. 且 $F(x_{q-1},y_{q-1}) = (x_0,y_0)$. 从而 $f(x_i) = x_{i+1},(0 \leqslant i \leqslant q-2)$ 且 $x_0 = f(x_{q-1})$. 显然 $A = \{x_0,x_1,\cdots,x_{q-1}\}$ 是 f 的一个周期轨. 设 A 的周期为 q_1 且有 $q = q_1 \cdot s_0$.

(1) 若 $x_0 = f(x_0)$. 设 $h(y) = g(x_0,y)$，则 $F^i((x_0,y_0)) = (x_0,h^i(y_0))$. 从而 $B = \{y_0,h(y_0),\cdots,h^{q-1}(y_0)\}$ 是 h 的超旋转对为 (p,q) 的周期轨，又 $(p,q) \geq (r,s)$，则由文献[9]得：h 有超旋转对为 (r,s) 的周期轨，记为：$D = \{z_0,h(z_0),\cdots,h^{s-1}(z_0)\}$. 因而 $\{(x_0,z_0),(x_0,h(z_0)),\cdots,(x_0,h^{s-1}(z_0))\}$ 就是 F 的超旋转对为 (r,s) 周期轨.

(2) 若 $x_0 \neq f(x_0)$. 不妨设 A 的超旋转对为 (p_1,q_1)，则存在 p_1，使得 $p_1 \cdot s_0 = p$.

情形 1 若 $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \leqslant \frac{1}{2}$，则 $\frac{p_1}{q_1} < \frac{r}{s} \leqslant \frac{1}{2}$. 由文献[9]知 f 有超旋转对为 (r,s) 的周期轨，设为：$\{z_0,f(z_0),\cdots,f^{s-1}(z_0)\}$. 令 $h(y) = g(f^{s-1}(z_0),\cdots,g(f(z_0),y),\cdots) \in C^0(I)$，设 d 是 $h(y)$ 的不动点. 那么 $\{(z_0,d), (f(z_0),g(z_0,d)),\cdots, (f^{s-1}(z_0),g(f^{s-2}(z_0),g(f^{s-3}(z_0),\cdots,g(z_0,d),\cdots)))\}$ 是 F 的 (r,s) 周期轨.

情形 2 若 $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{m}{n},(m,n) = 1$，设 $p = mjs_0,r = mu,q = njs_0,s = nu$，则 $js_0 \rhd u$.

若 $j \rhd u$，由 f 有超旋转对为 (mj,nj) 的周期轨知：f 有超旋转对为 (mu,nu) 的周期轨. 设其为 $B = \{z_0,f(z_0),\cdots,f^{s-1}(z_0)\}$. 设 d 是 $g(f^{s-2}(z_0),\cdots,g(z_0,y),\cdots)$ 的不动点，则 $\{(z_0,d),(f(z_0),g(z_0,d)),\cdots,(f^{s-1}(z_0),g(f^{s-2}(z_0),g(f^{s-3}(z_0),\cdots,g(z_0,d),\cdots)))\}$ 即为 F 的超旋转对为 (mu,nu) 的周期轨. 下设 $u \rhd j$ 但 $u \neq j$.

若 $u = 2^k$，则存在 $k_0 < k$ 使得 $j = 2^{k_0}$. 由 $js_0 \rhd 2^k$，得 $s_0 \rhd 2^{k-k_0} = \frac{u}{j}$.

若 $u = 2^k \cdot l$，则 s_0 不是 2 的方幂，设 $s_0 = 2^{k_0} \cdot l_0$，这时必存在 i，使得 $j = 2^i$，则由 $js_0 \rhd 2^k \cdot l$ 知 $s_0 \rhd 2^{k-i} \cdot l = \frac{u}{j}$. 因 $h(y) = g(f^{q-1}(z_0),g(f^{q-2}(z_0),\cdots,g(z_0,y),\cdots)$ 有 $\frac{u}{j}$ 周期轨 $B = \{y_0,h(y_0),\cdots,h^{\frac{u}{j}-1}(y_0)\}$. 从而周期轨 $\{F^i(z_0,y_0):i = 0,1,\cdots,s-1\}$ 是 F 的具有超旋转对为 (r,s) 的周期轨.

参考文献：

[1] BIRKHOFF G D. Dynamical Systems[M]. Providence Rhode Island:AMS College Publ,1927.

[2] 文兰. 动力系统简介[J]. 数学进展,2002,31(4):293-294.

[3] 陈绥阳,褚蕾蕾. 动力系统基础及其方法[M]. 北京:科学出版社,2002.

[4] KOLYADA S F. On dynamics of triangular maps of the square[J]. Ergod Th & Dynam Sys,1992,12:749-768.

[5] LLUíS ALSEDà,JAUME LLIBRE. Periods for triangular maps[J]. Bull Austral Math Soc,1993,47:41-53.

[6] LLUíS ALSEDà, SERGI i F KOLYADA, ĽUBOMíR SNOHA. On topological entropy of triangular maps of the square[J]. Bull Austral Math Soc,1993,48:55-67.

[7] LI T Y,MISIUREWICZ M,PIANIGIANI G,et al. No division implies chaos[J]. Trans Amer Math Soc,1982,273:191-199.

[8] MAI JIEHUA. Multi-separation,centrifugality and centripetality imply chaos[J]. Trans Amer Math Soc,1999,351:343-351.

[9] BLOKH A,M M. New order for periodic orbits of interval maps[J]. Ergod Th & Dynam Sys,1997,17:565-574.

[10] BLOKH A M. The set of all iterates is nowhere dense in C([0,1],[0,1])[J]. Trans Amer Math Soc,1992,333:787-798.

[11] MAI JIEHUA. The structure of equicontinuous maps [J]. Trans Amer Math Soc,2003,355:4125-4136.

（责任编辑：韦廷宗）