广义随机 KdV 和 mKdV 方程的随机类孤子解

Stochastic Like-soliton Solutions to Generalized Stochastic KdV and mKdV Equations

韦才敏
WEI Cai-min

（汕头大学数学系，广东汕头 515063）

(Department of Mathematics, Shantou University, Shantou, Guangdong, 515063, China)

摘要：通过 Hermite 变换把 Wick-类型的广义随机 KdV 方程和广义随机 mKdV 方程变成普通的 KdV 方程，利用截断展开法和延拓齐次平衡法求出方程的解，然后通过 Hermite 的逆变换求出相应方程的随机钟状类孤子解.

关键词：微分方程　KdV 方程　随机　类孤子解　Hermite 变换　截断展开法　延拓齐次平衡法

中图法分类号：O157.2　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2007)02-0087-04

Abstract: In this paper, stochastic like-soliton solutions for the generalized stochastic KdV and mKdV equations are obtained via the Hermite transformation, truncated expansion method and extended homogeneous balance method. And some bell like-soliton solutions of these equations are given by inversion Hermite transformation.

Key words: differential equation, KdV equation, stochastic, like-soliton solution, Hermite transformation, truncated expansion method, extended homogeneous balance method

近十多年来，非线性偏微分方程的研究是一个非常重要的研究领域，已经引起了许多数学家和物理学家及研究者的高度关注，在变系数非线性偏微分方程方面做了大量工作，逐步发展和形成了一系列行之有效的方法[1~6]. 近年来，非线性随机偏微分方程的研究也引起了人们极大的兴趣，而随机波是随机偏微分方程一个重要课题，当前已经有许多人从事随机 KdV 方程的研究[7~14].

本文考虑如下形式的 Wick 类型广义随机 KdV 方程

$$U_t = H_0(t)\diamond(U_{xxx} + 6U\diamond U_x) + 4H_1(t)\diamond U_x - H_2(t)\diamond(2U + xU_x) \tag{1}$$

和广义随机 mKdV 方程

$$U_t = H_0(t)\diamond(U_{xxx} - 6U^{2\diamond}\diamond U_x) + 4H_1(t)\diamond U_x - H_2(t)\diamond(2U + xU_x) \tag{2}$$

的精确解，其中 $H_i(t)(i = 0,1,2)$ 是白色噪音泛函，$\diamond$ 是 Hida 分布空间 $(S(R^d))^*$ 上的 Wick 乘，在方程(1) 和方程(2) 中若 Wick-乘 $\diamond$ 变成普通的点乘 $\cdot$，那么方程(1) 和方程(2) 则变成我们所熟悉的广义变系数 KdV 方程

$$u_t = h_0(t)(u_{xxx} + 6uu_x) + 4h_1(t)u_x - h_2(t)(2u + xu_x) \tag{3}$$

和广义随机 mKdV 方程

$$u_t = h_0(t)(u_{xxx} - 6u^2u_x) + 4h_1(t)u_x - h_2(t)(2u + xu_x), \tag{4}$$

其中 $h_i(t)$，$(i = 0,1,2)$ 是关于 t 的函数[5,6]. 此外方程(1) 和方程(2) 可以分别看作是方程(3) 和方程(4) 的扰动.

1　预备知识

考虑表达式为

$$A(t,x,\partial t,\nabla x,U,\omega) = 0$$

的随机偏微分方程，其中 A 为某个给定的函数，而 $U = U(t,x,\omega)$ 则是一个未知(或广义)的随机过程，算子 $\partial t = \frac{\partial}{\partial t}$，$\nabla x = (\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_d})$，$x = (x_1,\cdots,x_d) \in R^d$. 首先给出上面随机偏微分方程的 Wick 形式为

$$A^{\diamond}(t,x,\partial t,\nabla x,U,\omega) = 0. \tag{5}$$

其次，通过埃尔米特变换把方程(5) 的 Wick 乘积变成普通的乘积，也就是

收稿日期：2006-06-26

作者简介：韦才敏(1977-)，男，讲师，主要从事随机模型理论与方法的研究工作。

$$\widetilde{A}(t,x,\partial t,\nabla x,\widetilde{U},z_1,z_2,\cdots)=0, \tag{6}$$

其中$\widetilde{U}=H(U)$是U的埃尔米特变换，而$z_1,z_2,\cdots$是复数. 假定能找到方程(6)的一个解$u=u(t,x,z)$，其中对某些q,r使得$z=(z_1,z_2,\cdots)\in K_q(r)$，而$K_q(r)=\{z=(z_1,z_2,\cdots)\in \mathbf{C}^N$且$\sum_{\alpha\neq 0}|z^\alpha|^2(2\mathbf{N})^{q\alpha}<r^2\}$，这里$\mathbf{C}^N$表示N维的复空间. 那么在一定的条件下，取其埃尔米特的逆变换$U=H^{-1}u\in(S)_{-1}$，从而我们获得原Wick方程(5)的一个解U. 因而我们得到下面的定理1，其详细证明参见文献[8].

定理1 假定$u(t,x,z)$是方程(6)的一个解(普通强的、逐点指向的)，其中(t,x)是在某一个$G\subset R\times R^d$的有界开集的元素和对某些q,r使得$z\in K_q(r)$. 此外，假设$u(t,x,z)$及方程(6)中所有它的偏导对于$(t,x,z)\in G\times K_q(r)$是有界的，而对所有$z\in K_q(r)$是连续的和对所有$(t,x)\in G$关于$z\in K_q(r)$是连续的. 因此，存在$U(t,x)\in(S)_{-1}$对所有$(t,x,z)\in G\times K_q(r)$使得$u(t,x,z)=(\widetilde{U}(t,x))(z)$，在$(S)_{-1}$中用$U(t,x)$来解方程(5)(在$(S)_{-1}$中是强指向的).

2 方程(1)的随机精确孤子解

对方程(1)取埃尔米特变换得

$$\widetilde{U}_t=\widetilde{H}_0(t,z)(\widetilde{U}_{xxx}+6\widetilde{U}\widetilde{U}_x)+4\widetilde{H}_1(t,z)\widetilde{U}_x-\widetilde{H}_2(t,z)(2\widetilde{U}+x\widetilde{U}_x), \tag{7}$$

其中$z=(z_1,z_2,\cdots)\in(\mathbf{C}^N)_C$是向量参数，这里$(\mathbf{C}^N)_C$表示对所有$z_i\in\mathbf{C}$的$z=(z_1,z_2,\cdots)$及其紧支撑组成的空间，也就是仅有有限多个$z_i\neq 0$.

现在我们用截断展开方法[3,5,14]来解方程(7). 为了方便起见，令$u(t,x,z)=\widetilde{U}(t,x,z)$，$H_i=H_i(t,z)=\widetilde{H}_i(t,z)(i=0,1,2)$.

设方程(7)有如下形式的解

$$u=u(t,x,z)=\sum_{i=0}^{n}v_i(t,z)\phi^i, \tag{8}$$

其中

$$\phi=\phi(\zeta)=\frac{\exp[\alpha(\zeta+\zeta_0)]}{1+\exp[\alpha(\zeta+\zeta_0)]},\zeta=f(t,z)x+g(t,z). \tag{9}$$

这里$v_i(t,z)(i=0,1,\cdots,n)$，$f(t,z)$，$g(t,z)$是待定函数，$\alpha\neq 0$和ζ_0是任意常数.

把方程(8)及方程(9)代入方程(7)，利用延拓齐次平衡法可确定出$n=2$，从而得到

$$u=v_0(t,z)+v_1(t,z)\phi+v_2(t,z)\phi^2. \tag{10}$$

由方程(10)代入方程(7)，整理且令ϕ的各幂次项的系数为零，则有

$$-24v_2\zeta_x^3\alpha^3-12\alpha_2^2\zeta_x\alpha=0, \tag{11}$$

$$H_0[(54v_2-6v_1)\zeta_x^3\alpha^3+12v_2^2\zeta_x\alpha-18v_2^2\zeta_x\alpha]=0, \tag{12}$$

$$H_0[2(6v_1-19v_2)\zeta_x^3\alpha^3+18v_1v_2\zeta_x\alpha-6v_1^2\zeta_x\alpha-12v_0v_2\zeta_x\alpha]+2xH_2v_2\zeta_x\alpha-8H_1v_2\zeta_x\alpha-2v_2\zeta_t\alpha=0, \tag{13}$$

$$H_0[(8v_2-7v_1)\zeta_x^3\alpha^3+(6v_1^2+12v_0v_2-6v_0v_1)\zeta_x\alpha]-H_2[2v_2+x(2v_2-v_1)\zeta_x\alpha]+4H_1(2v_2-v_1)\zeta_x^2\alpha^2+v_{2t}+2v_2\zeta_t\alpha-v_1\zeta_t\alpha=0, \tag{14}$$

$$H_0[(v_1\zeta_x^3\alpha^3+6v_0v_1\zeta_x\alpha)-xH_2v_1\zeta_x\alpha-2H_2v_1]+4H_1v_1\zeta_x\alpha+v_{1t}+v_1\zeta_t\alpha=0, \tag{15}$$

$$v_{0t}-2H_2v_0=0. \tag{16}$$

利用Mathematica解方程(11)～(16)得：

$$v_0(t,z)=c_0\exp(\int_0^t 2H_2(s,z)\mathrm{d}s),v_1=-v_2=2\alpha f^2, \tag{17}$$

$$f(t,z)=c_0\exp(\int_0^t 2H_2(s,z)\mathrm{d}s),g(t,z)=\int_0^t(-H_0\alpha^2f^3-12H_0f^2-4H_1f)\mathrm{d}s, \tag{18}$$

其中c_0是任意常数.

由方程(13)及$\zeta=f(t,z)x+g(t,z)$得

$$\zeta_1=c_0\exp(\int_0^t 2H_2(s,z)\mathrm{d}s)x+\int_0^t[-\alpha^2c_0^3H_0\exp(\int_0^s 3H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)-12c_0^2H_0\exp(\int_0^s 2H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)-4c_0H_1\exp(\int_0^s H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)]\mathrm{d}s. \tag{19}$$

把方程(18)与方程(19)代入方程(10)得到方程(7)的类孤子解

$$u(t,x,z)=c_0\exp(\int_0^t H_2\mathrm{d}s)+\frac{1}{2}\alpha^2c_0^2\exp(\int_0^t 2H_2\mathrm{d}s)\mathrm{sech}^2\frac{\alpha}{2}(\zeta_1+\zeta_0), \tag{20}$$

其中ζ_1由方程(19)给出.

设$h(t)$是R_+上的可积函数，并令

$$H_0(t)=b_1W(t),H_1(t)=b_1W(t),H_2(t)=h(t)+b_2W(t), \tag{21}$$

其中$b_i(i=0,1,2)$是任意常数，$W(t)$是高斯白色噪音，若$B(t)$是布朗运动，也就是$W(t)=\dot{B}(t)$，对方程(21)取Heimite变换为

$$\widetilde{H}_0(t,z)=b_0\widetilde{W}(t,z),\widetilde{H}_1(t,z)=b_1\widetilde{W}(t,z),\widetilde{H}_2(t,z)=h(t)+b_2\widetilde{W}(t,z), \tag{22}$$

其中 $\widetilde{W}(t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \eta_k(s)\mathrm{d}s z_k$.

为了得到方程(1)的精确解，给出条件：假设 (t,x) 是属于一个有界开集 $G\subset R_+\times R$ 的元素，并对某些 $q>0,r>0$ 的所有 $z\in K_q(r)$ 使得 $H_i(t,z),(i=0,1,2)$ 满足 $u(t,x,z)$ 和在方程(7)中所有偏导对 $(t,x,z)\in G\times K_q(r)$ 是一致有界，对所有 $z\in K_q(r)$ 关于 $(t,x)\in G$ 是连续的，对所有 $(t,x)\in G$ 关于 $z\in K_q(r)$ 是分析的.

由上面的假设条件，定理1隐含存在 $U(t,x)\in(S)_{-1}$ 对于所有 $(t,x,z)\in G\times K_q(r)$ 使得 $u(t,x,z)=(HU(t,x))(z)$. 由 $U(t,x)$ 解方程(1). 由上面我们知道 $U(t,x)$ 是 $u(t,x,z)$ 的逆埃尔米特变换. 又因为 $\exp^{\diamond}\{B(t)\}=\exp\{B(t)-\frac{1}{2}t^2\}$(详细的推导见文献[8]的引理2.6.16)，因此由方程(20)，我们得到方程(1)的一个随机孤子解：

$$U(t,x)=[c_0+\frac{c_0^2\alpha^2}{2}\mathrm{sech}^{2\diamond}\frac{\alpha}{2}(\zeta_1+\zeta_0)]\exp[\int_0^t 2h(s)\mathrm{d}s+2b_2B(t)-b_2t^2], \quad (23)$$

其中

$$\theta_1=c_0\exp[\int_0^t 2h(s)\mathrm{d}s+2b_2B(t)-b_2t^2]x+\int_0^t\{-b_0\alpha^2c_0^3\exp[\int_0^s 3h(\tau)\mathrm{d}\tau+3b_3B(s)-\frac{3b_3}{2}s^2]-12c_0^2\exp[\int_0^s 2h(\tau)\mathrm{d}\tau+2b_2B(s)-b_2s^2]-4c_0b_1\exp[\int_0^s h(\tau)\mathrm{d}\tau+b_2B(s)-\frac{1}{2}b_2s^2]\}\delta B(s).$$

式中用到关系式：

$$\int_R\phi(t)\delta B(t)=\int_R\phi(t)\diamond W(t)\mathrm{d}t,\phi(t)\in L^2(R),$$

其中随机积分 $\int(\cdot)\delta B(t)$ 是 Skorohod 积分.

3 方程(2)的随机精确孤子解

取广义随机 mKdV 方程(2)的埃而米特变换，得

$$\widetilde{U}_t=\widetilde{H}_0(t,z)(\widetilde{U}_{xxx}-6\widetilde{U}^2\widetilde{U}_x)+4\widetilde{H}_1(t,z)\widetilde{U}_x-\widetilde{H}_2(t,z)(2\widetilde{U}+x\widetilde{U}_x). \quad (24)$$

类似地，将方程(8)及方程(9)代入方程(24)，并利用延拓齐次平衡法知 $n=1$，即方程(24)的解形式为：

$$u=v_0(t,z)+v_1(t,z)\phi. \quad (25)$$

把方程(25)代入方程(24)，整理并令 ϕ 的各幂次项的系数为零，则得到超定方程组为

$$v_{0t}-H_2v_0=0, \quad (26)$$

$$H_0v_1\zeta_x^3\alpha^3-6H_0v_0^2v_1\zeta_x\alpha+4H_1v_1\zeta_x\alpha-H_2v_1-xH_2v_1\zeta_x\alpha-v_{1t}-v_1\zeta_t\alpha=0, \quad (27)$$

$$-7H_0v_1\zeta_x^3\alpha^3-6H_0v_1\zeta_x\alpha(2v_0v_1-v_0^2)-4H_1v_1\zeta_x\alpha+xH_2v_1\zeta_x\alpha+v_1\zeta_t\alpha=0, \quad (28)$$

$$12v_1\zeta_x^3\alpha^3-6v_1\zeta_x\alpha(v_1^2-2v_0v_1)=0, \quad (29)$$

$$-6v_1\zeta_x^3\alpha^3+v_1^3\zeta_x\alpha=0. \quad (30)$$

解方程(26)得

$$v_0(t,z)=c_0\exp(\int_0^t-H_2(s,z)\mathrm{d}s). \quad (31)$$

解方程(30)得

$$v_1=\alpha f,\text{或 } v_1=-\alpha f(\text{舍去}). \quad (32)$$

由方程(28)可以得到

$$\zeta_t=7H_0\zeta_x^3\alpha^2+6H_0\zeta_x(2v_0v_1-v_0^2)+4H_1\zeta_x-xH_2\zeta_x, \quad (33)$$

又因为 $\zeta_t=f'(t,z)x+g'(t,z)$，所以

$$f'(t,z)=-H_2(t,z)f(t,z). \quad (34)$$

从而有

$$f(t,z)=c_1\exp(\int_0^t-H_2(s,z)\mathrm{d}s), \quad (35)$$

同时也有

$$g'(t,z)=7H_0\zeta_x^3\alpha^2+6H_0\zeta_x(2v_0v_1-v_0^2)+4H_1\zeta_x, \quad (36)$$

所以

$$g(t,z)=\int_0^t[H_0(7\alpha^2c_1^3+12c_0c_1^2\alpha-6c_1c_0^2)\exp(\int_0^s-3H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)+4c_1H_1\exp(\int_0^s-H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)]\mathrm{d}s. \quad (37)$$

由方程(35)和方程(27)及 $\zeta=f(t,z)x+g(t,z)$ 得到

$$\zeta_2=c_1\exp(\int_0^t-H_2(s,z)\mathrm{d}s)x+\int_0^t[H_0(7\alpha^2c_1^3+12c_0c_1^2\alpha-6c_1c_0^2)\exp(\int_0^s-3H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)+4c_1H_1\exp(\int_0^s-H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)]\mathrm{d}s. \quad (38)$$

所以方程(24)的孤子解为

$$u(t,x,z)=c_0\exp(\int_0^t-H_2\mathrm{d}s)+\frac{\alpha}{2}c_1[1+\tanh\frac{\alpha}{2}(\zeta_1+\zeta_0)]\exp(\int_0^t-H_2\mathrm{d}s), \quad (39)$$

其中 $c_0=-\frac{\alpha}{2}c_1$，ζ_2 由方程(38)给出.

由定理1可知，广义随机 mKdV 方程(2)的随机孤子解为

$$U(t,x)=\frac{\alpha}{2}C_1\tanh\frac{\alpha}{2}(\theta_2+$$

$$\zeta_0)\exp(\int_0^t -h(s)\mathrm{d}s - b_2B(t) + \frac{b_2t^2}{2}), \quad (40)$$

其中

$$\theta_2 = -\frac{2c_0}{\alpha}\exp(\int_0^t -h(s)\mathrm{d}s - b_2B(t) + \frac{b_2t^2}{2})x +$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^t \{4b_0c_0^3\exp[\int_0^s -3h(\tau)\mathrm{d}\tau - 3b_2B(s) + \frac{3b_2s^2}{2}] -$$

$$8c_0b_1\exp(\int_0^s -h(\tau)\mathrm{d}\tau - b_2B(s) + \frac{b_2s^2}{2})\}\delta B(s). \quad (41)$$

4 结论

本文通过 Hermite 变换把 Wick-类型的广义随机 KdV 方程和广义随机 mKdV 方程变成普通的 KdV 方程,利用截断展开法和延拓齐次平衡法求出方程的解,然后通过 Hermite 的逆变换求出相应方程的随机钟状类孤子解.这些方法可以求出一大类随机非线性演化方程的随机类孤子解,也可以推广应用到(2+1)维或更复杂的有物理背景的随机非线性演化方程.

参考文献:

[1] 闫振亚,张鸿庆.具有三个任意函数的变系数 KdV-mKdV 方程的精确孤子解[J].物理学报,1999,48(1):1957-1961.

[2] 阮航宇,陈一新.寻找变系数非线性方程精确解的新方法[J].物理学报,2001,50(4):577-580.

[3] 张解放,陈芳跃.截断展开法和广义变系数 KdV 方程的精确类孤子解[J].物理学报,2001,50(9):1648-1650.

[4] FAN E G,ZHANG H Q,LIN G. Backlund transformation,Lax pairs,symmetries and exact solutions for variable coefficient KdV equations[J]. Acta Physica Sinica:Overseas Edition,1998,7(9):649-654.

[5] 张玉峰,孔令臣,杨耕文.广义变系数 KdV,mKdV 方程的精确类孤子解[J].甘肃工业大学学报,2002,28(3):115-117.

[6] 李德生,张鸿庆.改进的 tanh 函数方法与广义变系数 KdV 和 MKdV 方程新的精确解[J].物理学报,2003,52(7):1569-1573.

[7] WADATI M. Stochastic Korteweg-de Veries equation [J]. J Phys Soc Jpn,1983,52:2642-2648.

[8] HOLDEN H,ΦSENDAL B,UB ΦE J,et al. Stochastic partial differential equations [M]. Berlin: Birhkäuser,1996.

[9] DE BOUARD A,DEBUSSCHE A. White noise driven Korteweg-de Vries equation[J]. J Funct Anal,1999,169(2):532-558.

[10] PRINTEMS J. The stochastic Korteweg-de Vries equation in[J]. J Differen Equat,153:338-373.

[11] XIE Y C. Exact solutions for stochastic KdV equations [J]. Physics Letters A,2003,310:161-167.

[12] 韦才敏,夏尊铨,田乃硕.广义随机 KdV 方程的精确类孤子解[J]. 物理学报,2005,54(6):2463-2467.

[13] XIE Y C. Positonic solutions for Wick-type stochastic KdV equations[J]. Chaos,Solitons and Fractals,2004,20:337-342.

[14] CHEN Y,WANG Q,LI B. The stochastic soliton-like solutions of stochastic KdV equations [J]. Chaos, Solitons and Fractals,2005,23:1465-1473.

(责任编辑:邓大玉)

(上接第 86 页 Continue from page 86)

权 Moore-Penrose 逆.

(3)⇒(8):$\forall X \in obD^-$,由引理 4,有

$na^{\#}anbk^2b^{\#}M(B,X) = na^{\#}anbkb_{n,k}^{+}nM(B,X) = bkb_{n,k}^{+}n^2a^{\#}anM(B,X) = bkb_{n,k}^{+}na_{m,n}^{+}manM(B,X)$.

同理 $bk^2b^{\#}na^{\#}anM(A,X) = bkb_{n,k}^{+}na_{m,n}^{+}manM(B,X)$, 故 $na^{\#}anbk^2b^{\#}M(A,X) = bk^2b^{\#}na^{\#}anM(A,X), \forall X \in obD^-$.

(8)⇒(9):$\forall X \in obD^-$,由引理 4,有

$na^{\#}anbM(B,X) = bkb_{n,k}^{+}n^2a^{\#}anbM(B,X) \subseteq bkb_{n,k}^{+}n^2a^{\#}anM(B,X) = na^{\#}anbk^2b^{\#}M(B,X) = bk^2b^{\#}na^{\#}anM(B,X) \subseteq bM(B,X)$.

类似可证 $bk^2b^{\#}na^{\#}M(A,X) \subseteq na^{\#}M(A,X)$.

(9)⇒(2):$na^{\#}anbM(C,X) \subseteq bM(C,X)$,则存在 $x \in M(C,C)$, 使 $na^{\#}anb = bx = bkb_{n,k}^{+}nbx = bkb_{n,k}^{+}n^2a^{\#}anb$.

同理可证 $bk^2b^{\#}na^{\#} = a_{m,n}^{+}manbk^2b^{\#}na^{\#}$.

当 m,n,k 分别为单位态射时,即得文献[1,4]的相应结论.

参考文献:

[1] 庄瓦金.关于态射的 * Moore-Penrose 逆的倒换顺序律的刻画[J].华中师范大学学报,1992(专集):51-53.

[2] 刘桂香.关于态射的加权 Moore-Penrose 逆[J].数学理论与应用,2002,22(3):34-39.

[3] 朱萍,曹永知.态射的加权 Moore-Penrose 逆[J].数学物理学报,2001,21A(1):36-42.

[4] WANG G R,WEI Y M,QIAO S Z. Generalized inverses: theory and computations [M]. Beijing/New York:Science Press,2004.

(责任编辑:韦廷宗)