广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(1)：39～43

一种提高正互反判断矩阵一致性水平的新算法*

A New Algorithm for Improving Consistency of the Judgement Matrices

郭欣荣，吕跃进，王志强

GUO Xin-rong，Lü Yue-jin，WANG Zhi-qiang

(广西大学数学与信息科学学院，广西南宁 530004)

(School of Mathematics and Information Science，Guangxi University，Nanning，Guangxi，530004，China)

摘要：在从正互反判断矩阵完全一致的传统定义出发，挖掘一致性定义中所涉及到的三元素组之间的关系，得到相关定理的基础上，提出一种改善正互反判断矩阵一致性的新算法，并利用计算机仿真实验和一个算例说明新算法的可行性和有效性.

关键词：矩阵 判断矩阵 一致性 修正层次分析法

中图法分类号：O223；C934 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2007)01-0039-05

Abstract：The relations between triplets which are involved in the positive reciprocal judgement matrices' consistency are discussed. On the basis of some theories given，a new algorithm is proposed to improve the positive reciprocal judgement matrices' consistency. The feasibility and effectiveness of the algorithm are illustrated in the computing simulation and a numerical example.

Key words：matrix，judgement matrix，consistency，AHP

层次分析法[1]（简称 AHP）作为处理多目标、多因素决策问题的有效方法，被广泛应用于能源系统分析、城市规划、经济管理、教育管理、科研成果评价、社会科学等众多领域. 然而，运用该方法进行方案排序时，构造出来的判断矩阵往往不能满足一致性要求，而判断矩阵的一致性水平又直接影响到由此判断矩阵得到的排序向量能否真实地反映各比较方案之间的客观排序. 因此，如何调整已构造出的判断矩阵并使之通过一致性检验成为 AHP 理论研究和应用中一个很重要的内容.

目前关于判断矩阵一致性调整问题的方法有很多[2～9]，其中大多都是采用一致性逼近的方法. 文献[2,3]根据判断矩阵各列与其排序向量的差异对判断矩阵中偏差最大的列及相应行进行修正；文献[5～8]则根据判断矩阵和与排序向量相关的一致矩阵的逼近程度来对个别元素进行修正；文献[4,9]则从判断矩阵自身出发，根据一致矩阵的特点，对偏差较大的元素进行校正. 这些方法各有特点，对判断矩阵一致性的改善都能起到一定的作用，但局限性也较多，如文献[2,3,5～8]中所提方法都跟一定的排序方法相关联，文献[4,5]的修正结果中都出现了小数，超出了标度所适用的范围等. 然而，一个好的修正算法应当不依赖于所采用的排序方法，否则判断矩阵的一致性就会与其思维一致性相脱节，同时，为了便于和原来的语言判断相对应，修正值也最好采用原来的标度.

本文从正互反判断矩阵完全一致的传统定义出发，通过深入挖掘一致性定义中所涉及到的三元素组之间的关系，得到几个具有指导意义的定理. 基于这些定理，选择一个能够间接反映三元素组之间关系的一致性检验指标[10]，修正该指标后提出了一种改善正互反判断矩阵一致性的新算法，并利用计算机仿真实验分析该算法的可行性，结合一个算例说明该算法的有效性. 该算法具有修正速度快、原信息丢失少、修正值合理（修正值在标度取值范围之内）、易于实现且不受排序方法的限制等优点.

1 定义和定理

定义 1.1（正互反矩阵）[1] 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称

收稿日期：2006-05-09

作者简介：郭欣荣（1979-），女，硕士研究生，主要从事预测与决策研究。

* 广西大学科研基金（X032016）资助项目。

为正互反矩阵，若其元素满足：

$$a_{ij}>0;a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}};a_{ii}=1(\text{其中},i,j=1,2,\cdots,n).$$

定义 1.2(一致性矩阵)[1]　正互反矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为一致性矩阵，若其元素满足：

$$a_{ij}=\frac{a_{ik}}{a_{jk}}(\text{其中},i,j,k=1,2,\cdots,n).$$

正互反判断矩阵 A 中的任意一个元素 a_{ij} 反映了方案 i 和方案 j 之间的重要性之比，它既可以通过这两方案间的直接比较而得到，又可以通过其他方案间的两两比较而获得，也就是说，如果方案 i 与方案 k 之间的重要性之比为 a_{ik}，而方案 k 与方案 j 之间的重要性之比为 a_{kj}，则方案 i 和方案 j 之间的重要性之比也可以用 $a_{ik}\cdot a_{kj}$ 来取代. 当决策者的判断完全一致时，不管用直接方法还是间接方法，方案 i 和方案 j 之间重要性的比值应该是唯一的，即 $a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}(k=1,2,\cdots,n)$. 然而，由于人们在进行判断时会受各种因素的干扰，这些判断值并不一定相等，有时甚至相左，这恰恰正是判断矩阵不一致的原因. 因此，对不一致正互反判断矩阵进行校正，关键是利用判断矩阵中所提供的相关信息对矩阵中的某些元素作出修正，使尽可能多的差值 $|a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}|$ 更接近于零.

引入偏差符号 $\delta_{ij,k}=|a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}|(i,j,k\in N)$，其中，$N=\{1,2,\cdots,n\}$.

定理 1.1　当下标 $i,j,k(i,j,k\in N)$ 中至少有两个相同时，偏差 $\delta_{ij,k},\delta_{ji,k},\delta_{ik,j},\delta_{ki,j},\delta_{jk,i},\delta_{kj,i}$ 全为零.

根据定理 1.1，在一致性修正过程中，能够引起我们注意的偏差仅有 P_n^3 个.

定理 1.2　当下标 $i,j,k(i,j,k\in N)$ 两两各不相同时，与其相关的偏差 $\delta_{ij,k},\delta_{ji,k},\delta_{ik,j},\delta_{ki,j},\delta_{jk,i},\delta_{kj,i}$ 可以互相导出.

证明　(1)$\delta_{ij,k}\Rightarrow\delta_{kj,i}$.

若 $a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}>0$，则 $\delta_{ij,k}=|a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}|=a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}$，从而，

$\delta_{kj,i}=|a_{kj}-a_{ki}\cdot a_{ij}|=|a_{kj}-a_{ki}\cdot(\delta_{ij,k}+a_{ik}\cdot a_{kj})|=|-a_{ki}\cdot\delta_{ij,k}|=a_{ki}\cdot\delta_{ij,k}$；

若 $a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}<0$，则 $\delta_{ij,k}=|a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}|=a_{ik}\cdot a_{kj}-a_{ij}$，从而，

$\delta_{kj,i}=|a_{kj}-a_{ki}\cdot a_{ij}|=|a_{kj}-a_{ki}\cdot(a_{ik}\cdot a_{kj}-\delta_{ij,k})|=|a_{ki}\cdot\delta_{ij,k}|=a_{ki}\cdot\delta_{ij,k}$.

(2) 同理可证，$\delta_{kj,i}\Rightarrow\delta_{ki,j}$；$\delta_{ki,j}\Rightarrow\delta_{ji,k}$；$\delta_{ji,k}\Rightarrow\delta_{jk,i}$；$\delta_{jk,i}\Rightarrow\delta_{ik,j}$；$\delta_{ik,j}\Rightarrow\delta_{ij,k}$.

推论 1.1　当下标 $i,j,k(i,j,k\in N)$ 两两各不相同时，与其相关的六个偏差 $\delta_{ij,k},\delta_{ji,k},\delta_{ik,j},\delta_{ki,j},\delta_{jk,i},\delta_{kj,i}$ 可由其中的任何一个唯一确定.

推论 1.2　当下标 $i,j,k(i,j,k\in N)$ 两两各不相同时，与其相关的六个偏差 $\delta_{ij,k},\delta_{ji,k},\delta_{ik,j},\delta_{ki,j},\delta_{jk,i},\delta_{kj,i}$ 要么同时为零，要么均不为零.

推论 1.3　当下标 $i,j,k(i,j,k\in N)$ 两两各不相同时，与其相关的六个偏差 $\delta_{ij,k},\delta_{ji,k},\delta_{ik,j},\delta_{ki,j},\delta_{jk,i},\delta_{kj,i}$ 发生变化时必然同步，并且变化趋势相同.

证明　(1) 当 $a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}>0$ 时，$\delta_{ij,k}=|a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}|=a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}$，从而，

$\delta_{kj,i}=-(a_{kj}-a_{ki}\cdot a_{ij})=a_{ki}\cdot a_{ij}-a_{kj}$；$\delta_{ik,j}=-(a_{ik}-a_{ij}\cdot a_{jk})=a_{ij}\cdot a_{jk}-a_{ik}$；

$\delta_{jk,i}=a_{jk}-a_{ji}\cdot a_{ik}$；$\delta_{ki,j}=a_{ki}-a_{kj}\cdot a_{ji}$；$\delta_{ji,k}=-(a_{ji}-a_{jk}\cdot a_{ki})=a_{jk}\cdot a_{ki}-a_{ji}$.

不妨令 $\delta_{ij,k}$ 减小，而使 $\delta_{ij,k}$ 减小的直接方式是：减小 a_{ij} 或增大 a_{ik} 或增大 a_{kj}. 容易发现，不管采用哪种方式，$\delta_{ji,k},\delta_{ik,j},\delta_{ki,j},\delta_{jk,i},\delta_{kj,i}$ 都将变小，但减小的幅度不尽相同.

(2) 当 $a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}<0$ 时，与(1) 证明类似.

(3) 当 $a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}=0$ 时，根据推论 1.2.1，与其相关的 6 个偏差 $\delta_{ij,k},\delta_{ji,k},\delta_{ik,j},\delta_{ki,j},\delta_{jk,i},\delta_{kj,i}$ 必将同时变大.

由定理 1.2 及其相关推论可知，可将 6 个关系非常紧密的 6 个偏差 $\delta_{ij,k},\delta_{ji,k},\delta_{ik,j},\delta_{ki,j},\delta_{jk,i},\delta_{kj,i}$ 归为一类，这样，在一致性修正过程中需要考察分析的偏差共有 C_n^3 类，大大减少了我们的工作量. 特别地，当 $n=3$ 时，需要讨论的偏差只有一类，调整其中任何一个偏差，其余偏差均会相应地以不同的程度变小.

定理 1.3　若仅对矩阵 A 中的一个元素对 (a_{ij},a_{ji}) 作出修正，则只有下标同时含 i,j 有的偏差才可能发生变化，其余偏差均不变.

证明　从偏差公式 $\delta_{ij,k}=|a_{ij}-a_{ik}\cdot a_{kj}|(i,j,k\in N)$ 中容易得出上述结论.

2　一致性修正算法

2.1　模糊一致性检验方法的选择

选择一个能够间接地体现三元素组之间偏差关系的检验标准[10]：

$$CI(M_{n\times n})=\begin{cases}0,n<3,\\ \det(M_{n\times n}),n=3,\\ \dfrac{1}{C_n^3}\cdot\sum\limits_{i=1}^{C_n^3}CI(M_{3\times 3}^{(i)}),n>3,\end{cases}$$

其中，$M_{3\times 3}^{(i)}$ 代表不同的传递矩阵.

定理 2.1[10]　$M_{3\times 3}=\begin{bmatrix}1 & a_{ij} & a_{ik}\\ a_{ji} & 1 & a_{jk}\\ a_{ki} & a_{kj} & 1\end{bmatrix}$ 为一致矩阵的充要条件是 $\det(M_{3\times 3})=0$.

定理 2.2　$\det(M_{3\times 3})=0$ 的充要条件是 $\delta_{ij,k}=$

$|a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}| = 0.$

证明 $\det(M_{3\times 3}) = \frac{a_{ij}}{a_{ik} \cdot a_{kj}} + \frac{a_{ik} \cdot a_{kj}}{a_{ij}} - 2 \geqslant 2.1 - 2 = 0.1$ 而等号成立的充要条件是 $\frac{a_{ij}}{a_{ik} \cdot a_{kj}} = \frac{a_{ik} \cdot a_{kj}}{a_{ij}}$ 即 $(a_{ij})^2 = (a_{ik} \cdot a_{kj})^2$. 由矩阵中元素的非负性可得,$a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$. 证毕.

可见,传递矩阵 $M_{3\times 3}^{(i)}$ 间接地反映了偏差类 $[\delta_{ij,k}]$ 之间的关系. 当偏差趋近于零时,三元素组 (i,j,k) 的传递性变好,整个矩阵的一致性得到提高.

在界值的设定上,文献[10]认为矩阵满意一致的标准应该是阶数 n 的一个函数,并通过仿真分析,按照文献[1]中三阶矩阵的满意比例设定了各阶矩阵一致性指标值的满意值 CI^*(见表1). 当 $CI < CI^*$ 时,认为矩阵 M 具有满意一致性,能够通过一致性检验. 否则,认为矩阵 M 不具有满意一致性.

文献[10]关于界值的设定忽略了一个很重要的事实:随着矩阵阶数的改变,一致矩阵的容量也会发生相应变化[11]. 作者通过大量的数据实验发现,文献[1]中达到满意指标的矩阵比例随着阶数的增大而大幅度减少(见表1),因此只根据三阶矩阵的满意比例来设定各阶矩阵的满意指标值是很片面的. 我们对随机产生的100000个正互反矩阵按照文献[10]中的指标值形式进行计算,得到了各阶矩阵的新的一致性满意值 CI^{**}(见表1).

表1 各阶正互反判断矩阵的一致性满意界值和比例

Table 1 The satisfied values and proportions for the positive reciprocal judgement matrices' consistency

n	$CI^{*[10]}$	$CI<0.1$ 的矩阵比例(%)[1] Proportions of the matrices which satisfy"$CI<0.1$"	CI^{**}
3	1.132	32.56	1.05
4	5.239	10.18	0.61
5	10.234	2.59	0.65
6	16.329	0.46	0.65
7	19.699	0.041	0.64
8	23.755	0.004	0.66
9	27.223	0	0.66

2.2 一致性修正思想

为尽量保留专家提供的偏好信息,一个基本的修正原则是每次只调整一对元素. 不妨设欲修正元素对 (a_{rs}, a_{sr}) 使得尽可能多的差值 $|a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}|$ 更接近于零,根据定理1.3,只有下标同时含有 r,s 的偏差才可能发生变化,其余偏差均不变. 于是,当 $n \geqslant 3$ 时,

$$CI'(A_{n\times n}) - CI(A_{n\times n}) = \frac{1}{C_n^3} \cdot (\sum_{i=1}^{C_n^3} \det(A_{3\times 3}^{'(i)}) - \sum_{i=1}^{C_n^3} \det(A_{3\times 3}^{(i)})) = \frac{1}{C_n^3} \cdot (\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} \det(A_{3\times 3}^{'(k)}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} \det(A_{3\times 3}^{(k)})),$$

其中,$A_{3\times 3}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{rs} & a_{rk} \\ a_{sr} & 1 & a_{sk} \\ a_{kr} & a_{ks} & 1 \end{bmatrix}$.

由于单次修正是否有效决定于修正后矩阵的指标值与原来相比是否呈现减小的状态,因此,收敛的修正算法应该满足 $CI^{(m)}(A_{n\times n}) - CI^{(m-1)}(A_{n\times n}) < 0$. 而 $\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} \det(A_{3\times 3}^{(k)}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} (\frac{a_{rs}}{a_{rk} \cdot a_{ks}} + \frac{a_{rk} \cdot a_{ks}}{a_{rs}} - 2)$.

令

$$\frac{d(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} (\frac{a_{rs}}{a_{rk} \cdot a_{ks}} + \frac{a_{rk} \cdot a_{ks}}{a_{rs}} - 2))}{d(a_{rs})} = 0,$$

可得,$a_{rs} = \sqrt{\frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} a_{rk} \cdot a_{ks}}{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} a_{sk} \cdot a_{kr}}}$,

即当 $a_{rs} = \sqrt{\frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} a_{rk} \cdot a_{ks}}{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} a_{sk} \cdot a_{kr}}}$ 时,$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} \det(A_{3\times 3}^{(k)})$ 取得最小值.

选择合适的被修正元素 a_{rs} 和合适的修正值 a'_{rs},使得 $\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r 且 k\neq s}}^{n} \det(A_{3\times 3}^{(k)})$ 最大幅度地变小,因此我们提出一个新的一致性修正算法.

2.3 新的一致性修正算法

步骤1:对初始矩阵 A 进行一致性检验,若检验不能通,则转步骤2.

步骤2:计算当前矩阵 A 中各非对角线元素的拟修正值:$a_{ij}(i \neq j)$ 的修正值 a'_{ij} 取为在标度取值范围内离 $\sqrt{\frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i 且 k\neq j}}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}}{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i 且 k\neq j}}^{n} a_{jk} \cdot a_{ki}}}$ 最近的那个值,若有多个,则任取一个. 由于 $a'_{ij} = 1/a'_{ji}$,因此,在实际操作中只需考察上三角元素便可.

步骤3:选定被修正元素 a_{rs} 及相应的修正值 a'_{rs}:

计算上三角各元素的所可能引起的一致性指标值的变化量 $\Delta CI(a_{ij})$, 其中, $\Delta CI(a_{ij}) = C_n^3(a_{ij}' - a_{ij})(\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i且k\neq j}}^{n} a_{jk}\cdot a_{ki} - a_{ji}'\cdot a_{ji}\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i且k\neq j}}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj})$. 将最小的 $\Delta CI(a_{ij})$(一般地, $\min\{\Delta CI(a_{ij}), i.j\in N\} < 0$) 所对应的元素定位为最终被修正元素(若有多个,则任选一个),相应的拟修正值为其修正值. 转步骤 1.

算法中步骤 3 的执行使得本算法的收敛速度达到了最高,对于低阶矩阵,也可实行手动调整,选择 $|a_{ij}' - a_{ij}|$ 最大的元素进行修正便可. 在实际应用中,也可引导专家一起参与一致性修正的过程,在按规则进行修正分析的同时,纳入专家对相关元素的修正意见,直到达到比较满意的精度要求为止.

3 算法的可行性分析

对随机抽取的 10000 个正互反矩阵分别就修正能力(收敛性)、平均迭代次数、平均可达到的指标值 3 个方面进行计算机仿真数据分析的结果见表 2.

表 2 新算法的数据仿真分析

Table 2 The data simulation analysis for the new method

矩阵阶数 Order of matrix	修正能力 Ability on modification	平均迭代次数 Average iteration	平均指标值 Average value
3	1	1	0.0114
4	1	1.3703	0.2375
5	1	2.0965	0.4074
6	1	3.1137	0.4909
7	1	4.5072	0.5311
8	1	6.0011	0.5783
9	1	7.9032	0.5983

特别地,当一致性检验指标换成文献[1]中的 *Saaty* 比例检验法时,新算法同样具有很好的效果(见表 3).

表 3 新算法的数据仿真对比分析

Table 3 The correlation data simulation analysis for the new method

矩阵阶数 Order of matrix	修正能力 Ability on modification	平均迭代次数 Average iteration	平均指标值 Average value
3	1	1	0.0011
4	1	1.3479	0.0406
5	1	2.0989	0.0652
6	1	3.1366	0.0774
7	1	4.4933	0.0843
8	1	6.0558	0.0887
9	1	7.9704	0.0915

新算法对文献[5]的一个算例重新运算如下.

例 1[5] 给定正互反判断矩阵如下

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 2 & 1/5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

步骤 1: $CI = 1.5621 > 0.65$, 转步骤 2.

步骤 2: 拟修正值阵

$$\begin{pmatrix} \times & 2 & 1 & 4 & 2 \\ \times & \times & 1/2 & 1/2 & 2 \\ \times & \times & \times & 3 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & 1 \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}; \text{影响程度阵}$$

$$\begin{pmatrix} \times & 0 & 1.8500 & 9.6250 & 3.3250 \\ \times & \times & 0 & 9.1667 & 6.6500 \\ \times & \times & \times & 6.4667 & \underline{11.2000} \\ \times & \times & \times & \times & 5.9417 \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

步骤 3: 新矩阵及指标值 $A' =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 3 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 1 & \underline{\underline{1}} \\ 1 & 1/3 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 2 & \underline{\underline{1}} & 2 & 1 \end{pmatrix}; CI' = 1.0021 > 0.65,$$

转步骤 1. 再经一次迭代过程,可得 $CI'' = 0.5208 < 0.65$, 结束.

与文献[5]中的结果相比较,新算法的修正过程所需迭代次数少(文献[5]中需要 8 ~ 19 次迭代,而本文所提方法仅需 2 次);修正元素少,尽量保留了原判断矩阵所具有的信息;修正值没有超出所采用标度的适用范围等. 大量的实践证明,新算法的优势是很明显的,新算法是一种比较高效的修正方法.

4 结束语

本文从正互反判断矩阵完全一致的传统定义出发,针对一致性检验指标的特点,提出一种提高正互反判断矩阵一致性水平的新算法,在对其收敛性进行理论分析的同时,又通过数据实验的方法对算法作了全方面的比较分析. 我们认为新算法的优势明显,是一种比较高效的修方法. 高效的一致性修正方法应在引导专家参与的前提下针对一致性定义(或其等价定义)及一致性检验方法的特点而设计,我们对此将作进一步的研究.

参考文献:

[1] 王莲芬,许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京:中国人民

大学出版社,1990.

[2] 徐泽水.判断矩阵一致性修正的新方法[J].系统工程理论与实践,2000,20(4):86-89.

[3] 刘万里,雷治军.关于 AHP 中判断矩阵校正方法的研究[J].系统工程理论与实践,1997,17(6):30-39.

[4] 王雪华,秦学志,杨德礼.AHP 中判断矩阵一致性修正的模式识别法[J].系统工程理论与实践,1997,17(11):56-59.

[5] 魏翠萍,章志敏.一种改进判断矩阵一致性的算法[J].系统工程理论与实践,2000,20(8):62-66.

[6] 李梅霞.AHP 中判断矩阵一致性改进的一种新方法[J].系统工程理论与实践,2000,20(2):122-125.

[7] 徐泽水.判断矩阵一致性改进的一种实用方法[J].系统工程,1998,16(6):61-63.

[8] 张群会,龙熙华.AHP 中判断矩阵一致性改进的迭代算法[J].数学的实践与认识,2001,31(5):565-568.

[9] 骆正清.AHP 中不一致性判断矩阵调整的新方法[J].系统工程理论与实践,2004,24(6):84-92.

[10] J I PELAEZ,M T LAMATA. A new measure of congsistency for positive reciprocal matrices [J]. Computers and mathematics with applications, 2003 (46):1840-1845.

[11] 吕跃进.标度系统一致性矩阵容量的计算方法[J].数学的实践与认识,2003,33(9):102-107.

(责任编辑:邓大玉)

(上接第 34 页 Continue from page 34)

$$\frac{T^{\pm *}_{n_{k-1}} - ET^{\pm *}_{n_k}}{W_{n_k}} \leqslant \frac{T^{\pm *}_{n} - ET^{\pm *}_{n}}{W_n} \leqslant \frac{T^{\pm *}_{n_k} - ET^{\pm *}_{n_{k-1}}}{W_{n_{k-1}}}, \frac{T^{\pm *}_{n} - ET^{\pm *}_{n}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n_k}}{W_{n_{k-1}}}\frac{T^{\pm *}_{n_k} - ET^{\pm *}_{n_k}}{W_{n_k}} + \frac{E\left|\sum\limits_{j=n_{k-1}}^{n_k}\omega_j X_j^{\mp *}\right|}{W_{n_{k-1}}} \leqslant a^2 \frac{T^{\pm *}_{n_k} - ET^{\pm *}_{n_k}}{W_{n_k}} + \sup_i E|X_i|(a^2-1) \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} W_n^{-1}(T_n^{\pm *} - ET_n^{\pm *}) \leqslant \sup_i E|X_i|(a^2-1), \text{a. s.}$$

又

$$\frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \geqslant \left(T^{\pm *}_{n_{k-1}} - ET^{\pm *}_{n_{k-1}} - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} E\omega_i X_i^{\pm *}\right)/W_{n_k} = \frac{T^{\pm *}_{n_{k-1}}-ET^{\pm *}_{n_{k-1}}}{W_{n_{k-1}}}\frac{W_{n_{k-1}}}{W_{n_k}} - \frac{\sup\limits_i E|X_i|(W_{n_k}-W_{n_{k-1}})}{W_{n_k}} \geqslant \frac{1}{a^2}\frac{T^{\pm *}_{n_{k-1}}-ET^{\pm *}_{n_{k-1}}}{W_{n_{k-1}}} + \sup_i E|X_i|\left(-1+\frac{W_{n_{k-1}}}{W_{n_k}}\right) \geqslant \frac{1}{a^2}\frac{T^{\pm *}_{n_{k-1}}-ET^{\pm *}_{n_{k-1}}}{W_{n_{k-1}}} + \sup_i E|X_i|\left(-1+\frac{1}{a^2}\right)$$

所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \geqslant \sup_i E|X_i|\left(-1+\frac{1}{a^2}\right), \text{a. s.}$$

综合即得

$$\sup_i E|X_i|\left(-1+\frac{1}{a^2}\right) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \leqslant \sup_i E|X_i|(a^2-1), \text{a. s.}$$

令 $a \to 1$,可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} = 0$, a. s. 再由(7)式得(6)式. 定理得证.

参考文献:

[1] 伍艳春. $\tilde{\varphi}$ 混合序列的广义 Jamison 型加权和的强收敛性[J].广西科学,2004,11(1):10-12.

[2] 唐国强,伍艳春. $\tilde{\varphi}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J].桂林工学院学报,2004,24(1):100-102.

[3] 吴群英,林亮. $\tilde{\varphi}$ 混合序列的完全收敛性和强收敛性[J].工程数学学报,2004,21(1):75-80.

(责任编辑:韦廷宗)