广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(1)：19～21

指数丢番图方程 $|m^4-6m^2+1|^x+(4m^3-4m)^y=(m^2+1)^z$ 的解*

On the Solutions of the Exponential Diophantine Equation $|m^4-6m^2+1|^x+(4m^3-4m)^y=(m^2+1)^z$

杨仕椿
YANG Shi-chun

(阿坝师范高等专科学校，四川汶川 623000)
(A'Ba Teachers College，Wenchuan，Sichuan，623000，China)

摘要：设 $a=|m^4-6m^2+1|,b=4m^3-4m,c=m^2+1$，且 $2|m$，利用 Jacobi 符号以及广义 Fermat 方程的已有解，证明指数丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$ 仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,2,4)$.

关键词：指数丢番图方程 解 Jacobi 符号 Terai 猜想

中图法分类号：O156.7 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2007)01-0019-03

Abstract：Let $a=|m^4-6m^2+1|,b=4m^3-4m,c=m^2+1$, where $2|m,m\in\mathbf{N}$. In terms of Jacobi symbol, and a deep result of generalized Fermat equation, it is proved that the diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ has only one positive integer solution $(x,y,z)=(2,2,4)$.

Key words：exponential diophantine equation, solutions, Jacobi symbol, Terai's conjecture

设 $\mathbf{Z},\mathbf{N},\mathbf{P}$ 分别表示整数集、自然数集和素数集，$a,b,c\in\mathbf{N}$ 且两两互素，方程

$$a^x+b^y=c^z,x,y,z\in\mathbf{N} \tag{1}$$

是一类基本而又重要的指数丢番图方程，在数论、群论及组合数学中有广泛的应用，中外学者对其研究非常活跃. 1933 年，Mahler[1] 证明了方程(1)仅有有限多组解 (x,y,z). 1940 年，Gel'fond[2] 运用超越数论方法给出了其解的可有效计算的上界. 1994 年，Terai[3] 猜想，如果方程(1)有解 $(x,y,z)=(p,q,r)$ 适合 $\max(p,q,r)>1$，则方程(1)仅有解 $(x,y,z)=(p,q,r)$. 而文献[4]中建议将此猜想改为，方程(1)至多有 1 组解 (x,y,z) 适合 $\min(x,y,z)>1$. 从目前已知的研究结果看，上述猜想是成立的，但这仍然是一个远未解决的问题[4~7].

设 $r>1$，且

$$a=\left|\sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]}(-1)^k\binom{r}{2k}m^{r-2k}\right|,b=\left|\sum_{k=0}^{[\frac{r-1}{2}]}(-1)^k\binom{r}{2k+1}m^{r-2k-1}\right|,c=m^2+1, \tag{2}$$

这里 $2|m$，则方程(1)显然有解 $(x,y,z)=(2,2,r)$. 若 $r=2$，此时即为著名的商高数组的 Je sma-novicz 猜想情形，这方面已经有许多结果[8,9]. 对于 $r=3,5$，文献[3,8～14]在 b 或 c 是奇素数或奇素数方幂这些特殊情况时，证明了方程(1)仅有解 $(x,y,z)=(2,2,r)$；文献[4]中去掉了 b,c 的限制条件，运用 Gel'fond-Baker 方法证明了当 $r=5$ 且 $m\geqslant 524$ 时，方程(1)仅有解 $(x,y,z)=(2,2,5)$. 最近，文献[5,6]讨论了 r 为奇数的一般情况下方程(1)的解，其中文献[6]证明了，若 $2\nmid r,a,b,c$ 满足(2)式，$a\equiv 3(\mathrm{mod}4),b\equiv 2(\mathrm{mod}4)$，则当 $\frac{a}{b}>(e^{r/1856}-1)^{-1/2}$ 时方程(1)仅有解 $(x,y,z)=(2,2,r)$，文献[7]完全解决了 $r=5$ 的情形. 另外，利用文献[15,16]的关于本原素因子的深刻结论可以证明[9~11]，当 $c\in\mathbf{P}$ 时，方程(1)仅有解 $(x,y,z)=(2,2,r)$.

对于 r 为其它偶数的情形，由于处理起来非常麻烦，尚未见到任何结果. 本文讨论 $r=4$ 时方程(1)的情形，即方程

$$|m^4-6m^2+1|^x+(4m^3-4m)^y=(m^2+1)^z \tag{3}$$

收稿日期：2006-06-12
作者简介：杨仕椿(1969-)，男，副教授，主要从事代数及数论研究。
* 四川省教育厅自然科学(2006C057)基金和阿坝师专校级科研基金项目(ASB06-07)资助。

的解.

1 一些引理

引理 1[8] 方程

$$X^4 - Y^4 = Z^2, X,Y,Z \in \mathbf{N}, (X,Y) = 1 \tag{4}$$

没有正整数解 (X,Y,Z).

引理 2 广义 Fermat 方程

$$X^p + Y^p + 2^n Z^p = 0, X,Y,Z \in \mathbf{Z}, (X,Y,Z) = 1, n \in \mathbf{N} \tag{5}$$

的解满足 $n = 1$ 以及 $XYZ = 0, \pm 1$.

证明 见文献[4]中引理 2.4.

引理 3[8] 方程

$$X^2 + Y^2 = Z^4, X,Y,Z \in \mathbf{N}, (X,Y) = 1 \tag{6}$$

的解可表为

$$X + Y\sqrt{-1} = \lambda_1(s + \lambda_2 t\sqrt{-1})^4, Z = s^2 + t^2, \tag{7}$$

这里 $\lambda_1, \lambda_1 \in \{1, -1\}$, $s,t \in \mathbf{N}$, 且 $(s,t) = 1$.

引理 4 当 $2|m$ 时,方程(3)的解 (x,y,z) 必满足 $2|x$, 且 $2|y$.

证明 由于 $2|m$, 设 $m = 2^k m_1$, $2\nmid m_1$, 且 $\left(\frac{a}{m}\right)$ 为 Jacobi 符号,则

$$\left(\frac{m^2+1}{m^4-6m^2+1}\right) = \left(\frac{m^4-6m^2+1}{m^2+1}\right) = \left(\frac{(m^2-7)(m^2+1)+8}{m^2+1}\right) = \left(\frac{8}{m^2+1}\right) = \left(\frac{2}{m^2+1}\right) = \begin{cases} -1, & 若 k = 1, \\ 1, & 若 k > 1; \end{cases}$$

$$\left(\frac{m^2+1}{4m^3-4m}\right) = \left(\frac{4m^3-4m}{m^2+1}\right) = \left(\frac{4}{m^2+1}\right)\left(\frac{m}{m^2+1}\right)\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right) = \left(\frac{m}{m^2+1}\right)\left(\frac{2}{m^2+1}\right) = \left(\frac{2^k m_1}{2^{2k}m_1^2+1}\right)\left(\frac{2}{2^{2k}m_1^2+1}\right) = \left(\frac{2^{2k}m_1+1}{m_1}\right)\left(\frac{2^{k+1}}{2^{2k}m_1^2+1}\right) = \left(\frac{2^{k+1}}{2^{2k}m_1^2+1}\right) = 1,$$

而且

$$\left(\frac{m^4-6m^2+1}{4m^3-4m}\right) = \left(\frac{4m^3-4m}{m^4-6m^2+1}\right) = \left(\frac{m}{m^4-6m^2+1}\right)\left(\frac{m^2-1}{m^4-6m^2+1}\right) = \left(\frac{m^2-1}{m^4-6m^2+1}\right) = \left(\frac{m^4-6m^2+1}{m^2-1}\right) = \left(\frac{-4}{m^2-1}\right) = \left(\frac{-1}{m^2-1}\right) = -1,$$

则由方程(3)得, $(-1)^y = \left(\frac{(m^2+1)^z}{m^4-6m^2+1}\right) = 1$, 且当 $k = 1$ 时, $(-1)^x = \left(\frac{-(4m^3-4m)^y}{m^2+1}\right) = 1$, 当 $k > 1$ 时, $(-1)^x = \left(\frac{(m^2+1)^z}{4m^3-4m}\right) = 1$, 于是 $2|x, 2|y$.

引理 5[5~7] 当 $c \in \mathbf{P}$ 时,方程(3)仅有正整数解 $(x,y,z) = (2,2,4)$.

2 定理及其证明

定理 若 $2|m$, 则丢番图方程(3)仅有正整数解 $(x,y,z) = (2,2,4)$.

证明 由引理 4 得,方程(3)的解 (x,y,z) 必满足 $2|x$, 且 $2|y$. 如果 $y \geqslant 4$, 由方程(3)取模 m^4 可得, $zm^2 \equiv -6xm^2 \pmod{m^4}$, 即 $z \equiv -6x \pmod{m^2}$, 因 $2|m$, 则 $4|z$. 若 $y = 2$, 如果 $(x,y,z) \neq (2,2,4)$, 则有 $x \geqslant 4$, 且 $z > 4$, 由方程(3)两边取模 m^4 可得, $z \equiv -6x + 16 \pmod{m^2}$, 则 $4|z$. 因此总有 $4|z$.

若 $4|y, 4|z$, 则由方程(3)可得,

$$(a^{\frac{x}{2}})^2 + (b^{\frac{y}{4}})4 = (c^{\frac{z}{4}})^4, a,b,c \in \mathbf{N}, (a,b) = 1, \tag{8}$$

但由引理 1 可得,此时方程无解,则 $4\nmid y$. 于是 $y \geqslant 6$, 且 $\frac{y}{2}$ 必有奇素因子 p, 则此时可设 $\frac{y}{2} = pr$, 其中 r 为正奇数. 由方程(1)可得

$$(a^{\frac{x}{2}})^2 + (b^{\frac{y}{4}})4 = (c^{\frac{z}{4}})^4, a,b,c \in \mathbf{N}, (a,b) = 1, \tag{9}$$

于是由引理 3 得

$$a^{\frac{x}{2}} + b^{\frac{y}{2}}\sqrt{-1} = \lambda_1(s + \lambda_2 t\sqrt{-1})^4, c^{z/4} = s^2 + t^2, \tag{10}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_1 \in \{1, -1\}$, $s,t \in \mathbf{N}$, 且 $(s,t) = 1$. 于是由(10)式得

$$b^{\frac{y}{2}} = 4st|s^2 - t^2|, \tag{11}$$

因为 s 和 t 为一奇一偶,不妨设 $2|s$, 由于 $(s,t) = 1$, 则 $4s, t, s+t, s-t$ 两两互素,则由(11)式得

$$4s = b_1^{\frac{y}{2}}, t = b_2^{\frac{y}{2}}, s + t = b_3^{\frac{y}{2}}, \tag{12}$$

这里 $b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{N}$, $(b_1, b_2, b_3) = 1$, $2|b_1$. 因为 $\frac{y}{2} = pr$, 所以由(12)式可得

$$(b_3^r)^p + (-b_2^r)p = 2^{pr-2}((\frac{b_1}{2})^r)^p, \tag{13}$$

由于 $c \geqslant 5$, 则由(5),(7)式可知, $\max\{s,t\} \geqslant 2$, 但由引理 2 可知,方程(13)的解满足 $pr = 3$ 以及 $b_1b_2b_3 = 0, \pm 2$, 于是由(12),(13)式得 $b_1 = \pm 2$, $b_1b_2 = \pm 1$, 于是 $s = 2, t = 1$, 则 $c = 5$. 但由引理 5 可得,此时方程(3)仅有正整数解 $(x,y,z) = (2,2,4)$.

于是定理得证.

参考文献:

[1] MAHLER K. Zur Approximation algebraischer zahlen

Ⅰ: uber den grossten primtriler binarer formen[J]. Math Ann,1933,107(3):691-730.
[2] GEL'FOND A O. Sur la divisibilite de la difference des puissances de deux nombres entiers parune puissance d'un iderl premier[J]. Mat Sb,1940(1):7-25.
[3] TERAI N. The diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ [J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci,1994,70(1):22-26.
[4] 乐茂华. 关于指数丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$ 的 Terai 猜想[J]. 数学学报,2003,46(2):245-250.
[5] CAO Z F,DONG X L. An application of a lower bound for linear forms in two logarithms to the Terai-Jesmanovicz conjecture[J]. Acta Arith,2003,110(2):153-164.
[6] LE M H. A conjecture concerning the exponential Diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ [J]. Acta Arith,2003,106(3):345-353.
[7] 胡永忠,袁平之. 指数丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$ [J]. 数学学报,2005,48(6):1175-1178.
[8] MORDELL L J. Diophantine equations[M]. London: Academic Press,1969.
[9] 乐茂华. Gel'found-Baker 方法在丢番图方程中的应用[M]. 北京:科学出版社,1998:44-45.
[10] TERAI N. The diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ (Ⅱ)[J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci,1995,71(1):109-110.
[11] LE M H. A note on the diophantine equation $(m^3-3m)^x+(3m^2-1)^y=(m^2+1)^z$ [J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci,1997,73(2):148-149.
[12] CAO Z F. A note on the diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ [J]. Acta Arith,1999,91(1):85-93.
[13] DONG X L,CAO Z F. On Terai-jesmanowicz conjecture concerning the diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ [J]. Chinese Math Ann,2000,21A(4):709-714.
[14] 曹珍富. 不定方程及其应用[M]. 上海:上海交通大学出版社,2000:149-158.
[15] VOUTIER P M. Primitive divisons of Lucas and Lehmer sequences[J]. Math Comp,1995,64(3):869-888.
[16] BILU Y,HANROT G,VOUTIER P M. Existence of primitive divisons of Lucas and Lehmer numbers[J]. J Reine Anger Math,2001,539(1):75-122.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 18 页 Continue from page 18)

等式(2)成立的充要条件是:(1)式取等号,即 $|A|=4|W_0|$,以及 $B=\phi,U_2=U_3=\phi,W_i=\phi,i=1,2,\cdots$,从而 $U_1=A,V(G^*)=U_1\cup W_0$,并且 $|U_1|=4|W_0|$,于是,$|G^*|=|U_1|+|W_0|,|W_0|=\frac{1}{5}|G^*|$,此时有,$|E_n(G^*)|=\frac{3}{8}|G^*|+\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}|G^*|=\frac{2}{5}|G^*|$,因此,$G^*\in\Lambda$.

参考文献:

[1] TUTTE W T. How to draw a graph[J]. Proc London Math Soc,1963,13:743-768.
[2] THOMASSEN C. Planarity and duality of finite and infinite graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1980,29:244-271.
[3] DEAN N,HEMMINGER R L,TOFT B. On contractible edges in 3-connected graphs[J]. Congr Nuner,1987,38:291-293.
[4] MCCUAIG W. Contractible triples in 3-connected graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1994,60:308-314.
[5] BARNETTE D W. Cotractible circuits in 3-connected graphs[J]. Discrete Math,1998,187:19-29.
[6] KREISELL M. Contractible non-edge in 3-connected graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1998,74:192-201.
[7] REID T J,WU H. A longest cycle version of Tutt's wheels theorem[J]. J Combin Theory Ser B,1997,70:202-215.
[8] TUTTE W T. A theory of 3-connected graphs[J]. Nederl Wetensch Proc Ser A,1961,64:441-455.
[9] DAWES R W. Minimally 3-connected graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1986,40:159-168.
[10] 陈仪朝,苏健基. 恰含 5 条非基本边的极小 3 连通图[J]. 广西师范大学学报:自然科学版,2004,22(3):29-34.
[11] BONDY J A,MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York:North-Holland,1981.
[12] MADER W. Eine eigenschaff der atome endlicher graphen[J]. J Arch Math,1971,22:333-336.
[13] 潘玉美. 简约极小 3 连通图非基本边的分布[J]. 柳州师专学报,2005,20(3):109-111.

(责任编辑:韦廷宗)