广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(1)：6～10

有关 C-可补子群 *

On the C-supplement Subgroups

赵 勇

ZHAO Yong

（四川师范大学数学与软件科学学院，四川成都 610066）

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan, 610066, China)

摘要：运用群系理论讨论 Sylow 子群的极大子群和 Sylow 子群的二次极大子群，以及极小子群对有限群结构的影响. 得到：(1)设 G 是与 A_4 无关的有限群，P 是 $|G|$ 的最小素因数，$\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{N}_p$ 的群系，则 $G\in\mathscr{F}$ 的充要条件为 G 存在一个正规子群，使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 H 的 Sylow p-子群的二次极大子群在 G 中 C-可补；(2)设 $\mathscr{F}$ 是非空子群闭的局部群系，G 是有限群，p 是 $|G|$ 的最小素因数且 $G^{\mathscr{F}}$ 是可解，那么 $G\in\mathscr{F}\Leftrightarrow G$ 存在正规子群 N 使得 $G/N\in\mathscr{F}$ 且对于 $P\in \mathrm{Syl}_p(N)$，$P\cap G^{\mathscr{F}}$ 的 2^2 阶循环子群在 G 中 C-可补且极小子群皆包含在 $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ 中.

关键词：群系 有限群 C-可补

中图法分类号：O152 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2007)01-0006-05

Abstract: The C-supplement condition on the maximal subgroup or the second maximal subgroup of Sylow subgroup and the minimal subgroup of G are used to study the structure of G by the theory of formations. The following results are obtained. (1) Let G be a finite group which is A_4-free and $\mathscr{F}$ be a formation containing $\mathscr{N}_p$, where p is the smallest prime number dividing $|G|$. Then $G\in\mathscr{F}$, and there exists a normal subgroup H of G such that $G/H\in\mathscr{F}$ and the second maximal subgroup of Sylow p- subgroup of H is C- supplement in G. (2) Let $\mathscr{F}$ be non-empty and subgroup-closed formation, G be a finite group and $G^{\mathscr{F}}$ is solvable. Then $G\in\mathscr{F}$, and there exists a normal subgroup N of G such that $G/N\in\mathscr{F}$, and for $p\in \mathrm{Syl}_p(G)$, the subgroups of prime order and the subgroup of order 4 are contained in $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$. The result above generalizes some known ones.

Key words: formations, finite groups, C-supplement

在群论中，人们常常利用子群的性质研究群的结构. 1996 年，王燕鸣教授在文献[1]中引进了 C-正规的概念，称群 G 的一个子群 H 在 G 中 C-正规，如果存在 G 的正规子群 K，使得 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant H_G$，其中 H_G 表示 G 包含在 H 中的最大的正规子群，并运用了子群 C-正规性刻画了一些有限群的结构. 2004 年王燕鸣教授在文献[2]中将 C-正规的有关条件削弱，引进了 C-可补的概念，并且得到了一些新的重要结果. 称群 G 的一个子群 H 在 G 中 C-可补，如果存在 G 的子群 K，使得 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant H_G$，其中 H_G 表示 G 包含在 H 中的最大的正规子群. 显然群 G 的每 C-正规子群皆是 G 的 C-可补子群，但反之则不然. 本文将在已有的结论的基础上运用群系理论来讨论 Sylow 子群的极大子群和 Sylow 子群的 2-极大子群以及极小子群对有限群结构的影响.

文中所涉及的群均为有限群. $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的全体素因子的集合；$H<\cdot G$ 表示 H 是 G 的极大子群；$H\mathrm{char}G$ 表示 H 是 G 的特征子群；$G=H\ltimes M$ 表示 G 是正规子群 M 被子群 H 的半直积. 称子群 K 为群 G 的 2-极大子群，如果 K 是 G 的某个极大子群的极大子群.

一个群类 $\mathscr{F}$ 称为群系，如果它关于同态像和次直积都是封闭的. 一个函数 f 称为一个群系函数，如果对于任意素数 p，$f(p)$ 为一个群系. 一个群系 $\mathscr{F}$ 称为局部的，如果存在一个群系函数 f 满足 $\mathscr{F}=\{G$

收稿日期：2006-06-20

修回日期：2006-09-19

作者简介：赵 勇(1982-)，男，硕士研究生，主要从事有限群论研究。

*四川省学位委员会和四川省教育厅重点学科建设基金项目资助。

$|G/C_G(H/K)\in f(p)$，对于 G 的所有主因子 H/K 且 $p||H/K|\}$，此时称 f 局部定义了群系 $\mathscr{F}$，并记作 $\mathscr{F}=LF(f)$. 如果一个群系满足条件：由 $G/\Phi(G)\in\mathscr{F}$ 总有 $G\in\mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为饱和群系. 熟知，一个群系是局部的当且仅当它是饱和的. 在本文中 $\mathscr{U}$ 表示所有超可解群构成的群类，$\mathscr{N}_p$ 表示所有 p-幂零群构成的群类. 明显地，$\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{N}_p$ 均为饱和群系.

设 $\mathscr{F}$ 是群系，称 $G^{\mathscr{F}}$ 为群 G 的 $\mathscr{F}$-上根，如果 $G^{\mathscr{F}}=\bigcap\{N\lhd G|G/N\in\mathscr{F}\}$. 用 $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ 表示群 G 的所有非单位的 $\mathscr{F}$-超中心子群的积，并称为 G 的 $\mathscr{F}$-超中心. 当 $\mathscr{F}$ 为幂零群系时，$Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ 就是 G 的超中心 $Z_\infty(G)$. 称群系 $\mathscr{F}$ 是子群闭的，如果 $G\in\mathscr{F}$，任意的 G 的子群也属于 $\mathscr{F}$. 其余未交代的概念和符号参见文献[3].

1 用到的一些引理

引理 1.1[2] 设 G 是有限群，则：

(1) 若 H 在 G 中 C-可补，且 $H\leqslant K\leqslant G$，则 H 在 K 中 C-可补；

(2) 设 $N\lhd G$ 且 $N\leqslant H$，则 H 在 G 中 C-可补当且仅当 H/N 在 G/N 中 C-可补；

(3) 设 H 是 G 的 π-子群，且 N 是 G 的正规 π'-子群. 如果 H 在 G 中 C-可补，那么 HN/N 在 G/N 中 C-可补.

引理 1.2[2] 设 G 是有限群，N 是 G 的一个正规子群. 若 G/N 是超可解的且 N 的 Sylow 子群的极大子群均在 G 中 C-可补，则 G 是超可解群.

引理 1.3[2] 设 G 是与 A_4 无关的有限群，p 是 $|G|$ 的最小素因数，P 是 G 的任意 Sylow p-子群. 若 P 的每个 2-极大子群 C-可补于 G，则 $G/O_p(G)$ 是 p-幂零群且 G 是可解的.

引理 1.4[2] 设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的一个素因子，且 $(|G|,p-1)=1$. 如果 $p^3\nmid|G|$ 且 G 与 A_4 无关，则 G 是 p-幂零群.

引理 1.5[3] 设 P 为 G 的 p-子群但不是 G 的 Sylow p-子群，则 $P<N_G(P)$.

引理 1.6[4] 设 F 是包含 U 的局部群系. 如果 G 有一个循环正规子群 N 使得 $G/N\in\mathscr{F}$，则 $G\in\mathscr{F}$.

引理 1.7[5] 令 $\mathscr{F}_i=LF(F_i)$，$i=1,2$，其中 F_i 是局部定义群系 $\mathscr{F}_i$ 的满的群系函数，则以下两款等价：

(1) $\mathscr{F}_1\subseteq\mathscr{F}_2$；

(2) $F_1(p)\subseteq F_2(p)$.

引理 1.8[6] 令 $N(\neq 1)$ 是有限群 G 的可解正规子群. 如果 G 的每个包含在 N 中的极小正规子群 L_i $(i=1,2,\ldots,s)$ 均不包含在 $\Phi(G)$ 中. 那么 N 的 *Fitting* 子群 $F(N)=L_1\times L_2\times\cdots\times L_s$.

引理 1.9[7] 设 $\mathscr{F}$ 是子群闭的饱和群系，并且 $H\leqslant G$，那么 $H\cap Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)\subseteq Z_\infty^{\mathscr{F}}(H)$.

引理 1.10 设 $\mathscr{F}$ 是非空的子群闭局部群系，G 是有限群. 若 $M\leqslant G$，则 $M^{\mathscr{F}}\leqslant G^{\mathscr{F}}$.

证明 由于 $M/M\cap G^{\mathscr{F}}\cong MG^{\mathscr{F}}/G^{\mathscr{F}}\leqslant G/G^{\mathscr{F}}$，而 $G/G^{\mathscr{F}}\in\mathscr{F}$ 且 $\mathscr{F}$ 是子群闭的，所以 $M/M\cap G^{\mathscr{F}}\in\mathscr{F}$，于是 $M^{\mathscr{F}}\leqslant M\cap G^{\mathscr{F}}$，从而 $M^{\mathscr{F}}\leqslant G^{\mathscr{F}}$.

引理 1.11[8] 设 $\mathscr{F}$ 是局部群系，G 是有限群且 $G^{\mathscr{F}}$ 可解. 若 $G^{\mathscr{F}}\neq 1$ 且群 G 的任意 $\mathscr{F}$-伪正规极大子群属于 $\mathscr{F}$，则：

(1) $G^{\mathscr{F}}$ 是 p-群，对于某个素数 p；

(2) $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 是 $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 的极小正规子群；

(3) 若 $p>2$，则 $\exp G^{\mathscr{F}}=p$；若 $p=2$，则 $\exp G^{\mathscr{F}}\leqslant 4$；

(4) 若 $G^{\mathscr{F}}$ 是交换群，则 $G^{\mathscr{F}}$ 是初等交换群.

2 主要定理

定理 2.1 设 $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{U}$ 的局部群系；G 是有限群. 则下列两款等价：

(a) $G\in\mathscr{F}$.

(b) G 有一个正规子群 N 使得 $G/N\in\mathscr{F}$ 且 N 的 Sylow 子群的极大子群均在 G 中 C-可补.

证明 (a)⇒(b)，取 $N=1$ 即可得.

(b)⇒(a)，假设定理结论不真，G 是极小阶反例. 由引理 1.1(1)和引理 1.2 知 N 是超可解群. 取 $p=\max(\pi(N))$，$P\in \mathrm{Syl}_p(N)$，则 $P\,\mathrm{char}\,N\unlhd G$，因而 $P\unlhd G$. 现设 H 是 G 包含在 P 中的极小正规子群. 考虑商群 G/H. 令 L/H 是 N/H 的 Sylow 子群的极大子群. 若 L/H 是 p-群，则 L 是 N 的 Sylow p-子群的极大子群. 由题设条件及引理 1.1(2)知 L/H 在 G/H 中 C-可补；若 L/H 是 q-群 $(q\neq p,q\in\pi(G))$，则 $L=QH$，其中 Q 是 N 的某个 Sylow q-子群的极大子群. 由题设条件及引理 1.1(3)知 $L/H=QH/H$ 在 G/H 中 C-可补. 又 $G/N\cong(G/H)/(N/H)\in\mathscr{F}$. 于是 G/H 满足题设条件，由 G 的极小性知 $G/H\in\mathscr{F}$. 若 G 还有另一个包含于 P 的极小正规子群 H_1，类似可证明 $G/H_1\in\mathscr{F}$. 此时 $G=G/H_1\cap H\in\mathscr{F}$，矛盾；同时若 $H\leqslant\Phi(G)$，则 $G/\Phi(G)\cong(G/H)/(\Phi(G)/H)\in\mathscr{F}$，再由 F 的局部性知 $G\in\mathscr{F}$，矛盾. 于是 H 是 G 的唯一包含在 P 中的极小正规子群且 $H\nleqslant\Phi(G)$. 由引理 1.8 知 $P=F(P)=H\in \mathrm{Syl}_p(N)$.

现不妨取 P_1 是 H 的任意的极大子群，由题设条件知 P_1 在 G 中 C-可补，即存在 $K\leqslant G$，使得 $G=P_1K$

且 $P_1\cap K\leqslant(P_1)_G$. 而 $P_1\not\geq H$，由 H 的极小性知 $(P_1)_G=1$. 由于 $H\not\leqslant\Phi(G)$，则 $H\cap\Phi(G)\lneqq H$. 再由 H 是 G 的极小正规子群知 $H\cap\Phi(G)=1$. 而 $\Phi(H)\leqslant H\cap\Phi(G)$，因此 $\Phi(H)=1$. 又 H 是 p-群，故 H 必是初等 *Abel* 群. 由于 $H=H\cap G=H\cap P_1K=P_1(H\cap K)$. 因 H 是初等 *Abel* 群，故有 $H\cap K\trianglelefteq H$. 而 $H\cap K\trianglelefteq K$，于是 $H\cap K\trianglelefteq G$. 由 H 的极小性知或 $H\cap K=1$ 或 $H\cap K=H$. 若 $H\cap K=1$ 成立，则 $H=P_1(H\cap K)=P_1$，矛盾. 故 $H\cap K=H$. 这样 $H\leqslant K$，即有 $P_1=P_1\cap K=1$. 因此 H 的任意极大子群均为 1，故 H 必是 p-阶循环群. 由于 $G/H\in\mathscr{F}$，据引理 1.6 知 $G\in\mathscr{F}$，矛盾. 此矛盾表明极小阶反例不存在，结论成立.

定理 2.2 设 G 是一个有限群，p 是 $|G|$ 的最小素因数，$\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{N}_p$ 的局部群系. 则下列两款等价：

(a)$G\in\mathscr{F}$.

(b)G 存在一个的正规子群 H 使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 H 的 Sylow p-子群的极大子群均在 G 中 C-可补.

证明 (a)⇒(b)，取 $H=1$ 即可得.

(b)⇒(a)：

(1)设 $H=G$. 我们有断言：设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的最小素因数，P 是 G 的任意 Sylow p-子群. 若 P 的每个极大子群在 G 中 C-可补，则 $G\in\mathscr{N}_p\subseteq\mathscr{F}$. 下面证明此断言：

假设断言不成立，G 是极小阶反例. 则有：

(i)$O_p(G)\neq1$.

若 $O_p(G)=1$，令 $P_1<\cdot P$，由题设知 P_1 在 G 中 C-可补，即存在 $K_1\leqslant G$，使得 $G=P_1K_1$ 且 $P_1\cap K_1\leqslant(P_1)_G\leqslant O_p(G)=1$. 于是 $|K_1|=|G:P_1|=|G:P||P:P_1|=pm$，其中 $(p,m)=1$. 因此 K_1 的 Sylow p-子群 K_{1p} 是 p 阶循环群. 由文献[9]的定理 10.1.9 知 $K_1\in\mathscr{N}_p$. 设 $K_{1p'}$ 是 K_1 的正规 *Hall* p'-子群，则 $K_{1p'}$ 是 G 的 *Hall* p'-子群. 令 $N=N_G(K_{1p'})$. 明显地，$N\lneqq G$. (若 $N=G$，则 $K_{1p'}\trianglelefteq G$，从而 $G\in\mathscr{N}_p$，矛盾.)若 $P\leqslant N$，则 $N=G$，矛盾. 于是 $P\cap N<P$. 不妨取 $P_2<\cdot P$ 使得 $P\cap N\leqslant P_2$. 由断言的题设知 P_2 在 G 中 C-可补，即存在 $K_2\leqslant G$，使得 $G=P_2K_2$ 且 $P_2\cap K_2\leqslant(P_2)_G$. 类似可证得 $K_2\in\mathscr{N}_p$. 设 $K_{2p'}$ 是 K_2 的正规 *Hall* p'-子群，则 $K_{2p'}$ 也是 G 的 *Hall* p'-子群. 因 p 是 $|G|$ 的最小素因数，若 $p=2$，则由文献[10]主要定理知 $K_{1p'}$ 和 $K_{2p'}$ 在 G 中共轭. 若 $p>2$，则由 Feit-Thomoposon 定理知 G 是可解的，于是 $K_{1p'}$ 和 $K_{2p'}$ 在 G 中共轭. 设 $K_{1p'}=K_{2p'}^g$. 由于 $G=P_2K_2$ 且 $K_{2p'}\trianglelefteq K_2$，故可取 $g\in P_2$. 于是 K_2^g 正规化 $K_{2p'}^g=K_{1p'}$，因此 $K_2^g\leqslant N$. 而 $G=G^g=(P_2K_2)^g=P_2K_2^g=P_2N$，因此 $P=P\cap G=P\cap P_2N=P_2(P\cap N)\leqslant P_2$，矛盾. 此矛盾表明 $O_p(G)=1$ 不成立.

(ii)$O_p(G)$是 G 的极小正规子群.

事实上，设 L 是 G 的包含于 $O_p(G)$极小正规子群. 由类似定理 2.1 中的证明可得 G/L 符合定理条件，由 G 的极小性知 $G/L\in\mathscr{N}_p$. 由于 $\mathscr{N}_p$ 是饱和群系，若 $L\leqslant\Phi(G)$，则 $G/\Phi(G)\in\mathscr{N}_p$，从而 $G\in\mathscr{N}_p$，矛盾；若 G 有两个极小正规子群含于 $O_p(G)$也可得 $G\in\mathscr{N}_p$，矛盾. 故 L 是 G 的唯一含于 $O_p(G)$的极小正规子群且 $L\not\leqslant\Phi(G)$. 由引理 1.8 知 $O_p(G)=L$.

(iii)最终矛盾.

若 $P=O_p(G)\trianglelefteq G$，任取 $P_3<\cdot P$. 因 P_3 在 G 中 C-可补，则存在 $K_3\leqslant G$，使得 $G=P_3K_3$ 且 $P_3\cap K_3\leqslant(P_3)_G\lneqq O_p(G)$. 由 $O_p(G)$的极小正规性知 $P_3\cap K_3=1$. 由类似 $O_p(G)\neq1$ 的证明可得矛盾. 故 $O_p(G)<P$. 因 $L\not\leqslant\Phi(G)$，则存在 G 的一个极大子群 M，使得 $G=M\ltimes L$. 现设 $P^*\in\mathrm{Syl}_p(M)$，则 $LP^*\in\mathrm{Syl}_p(G)$，不妨令 $P=LP^*$. 若 $P^*=1$，则 $P=O_p(G)$，矛盾. 故 $P^*\neq1$. 取 $P_4<\cdot P$ 使 $P^*\leqslant P_4$. 于是 $L\not\leqslant P_4$.(事实上，如果 $L\leqslant P_4$，则 $P=LP^*\leqslant P_4$，矛盾.)由断言条件有 P_4 在 G 中 C-可补，即存在 $T\leqslant G$，使得 $P_4T=G$ 且 $P_4\cap T\leqslant(P_4)_G$. 由于 $O_p(G)=L\not\leqslant P_4$，则明显有 $(P_4)_G\lneqq O_p(G)=L$，从而由 L 的极小性知 $(P_4)_G=1$，即 $P_4\cap T=1$. 于是由类似 $O_p(G)\neq1$ 的证明可得矛盾. 此矛盾表明极小阶反例不存在，断言成立.

(2)设 $H<G$. 由(1)中断言知 $H\in\mathscr{N}_p$. 取 $H_{p'}$ 是 H 的正规 *Hall* p'-子群，则 $H_{p'}\,\mathrm{char}\,H\trianglelefteq G$，即有 $H_{p'}\trianglelefteq G$. 考虑商群 $G/H_{p'}$，明显 $(G/H_{p'})/(H/H_{p'})\cong G/H\in\mathscr{F}$，设 $A\in\mathrm{Syl}_p(H)$，则 $AH_{p'}/H_{p'}\in\mathrm{Syl}_p(H/H_{p'})$，由于 A 在 G 中 C-可补，由引理 1.1 知 $AH_{p'}/H_{p'}$ 在 $G/H_{p'}$ 中 C-可补，于是 $G/H_{p'}$ 满足定理条件，故 $G/H_{p'}\in\mathscr{F}$. 若 $H_{p'}\neq1$. 设 $\mathscr{N}_p$ 被满的群系函数 F_1 所局部定义，则 $\mathscr{N}_p=LF(F_1)$；设 $\mathscr{F}$ 被满的群系函数 F_2 所局部定义，则 $\mathscr{F}=LF(F_2)$. 由于 $\mathscr{N}_p\subseteq\mathscr{F}$，由引理 1.7 知 $F_1(q)\subseteq F_2(q)$，q 是任意素数. 而 $G/C_G(K_1/K_2)\in F_1(q)$，其中 K_1/K_2 是 G 的主因子，$K_1\leqslant H_{p'}$ 且 $q\,|\,|K_1/K_2|$，因此 $G/C_G(K_1/K_2)\in F_2(q)$，于是 $G\in\mathscr{F}=LF(F_2)$. 若 $H_{p'}=1$，则 $H=P$. 对任意 $|G|$ 的素因数 $q\neq p$，令 $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$，则 $PQ\leqslant G$. 由(1)中断言知 $PQ\in\mathscr{N}_p$，故 $PQ=P\times Q$. 从而对于 G 的每个主因子 H_1/H_2，其中 $H_1\leqslant P$，有 $G/C_G(H_1/H_2)$是 p-群. 于是 $G\in\mathscr{F}=LF(F_2)$.

定理 2.3 设 G 是与 A_4 无关的有限群，p 是 $|G|$ 的最小素因数，$\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{N}_p$ 的群系. 则下列两款等价：

(a)$G\in\mathscr{F}$.

(b)G 存在一个的正规子群 H 使得 $G/H\in\mathscr{F}$ 且 H 的 Sylow p-子群的 2-极大子群均在 G 中 C-可补.

证明 (a)$\Rightarrow$(b),取 $H=1$ 即可得.

(b)$\Rightarrow$(a):

参照定理 2.2 的证明我们只需证明断言:设 G 是与 A_4 无关的有限群,p 是 $|G|$ 的最小素因数,$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. 若 P 的每个 2-极大子群在 G 中 C-可补,则 $G\in\mathscr{N}_p$. 下面证明断言.

假设断言结论不真,G 是极小阶反例. 则有:

(1)$O_p(G)\neq 1$.

事实上,若 $O_p(G)=1$,则引理 1.3 有 $G\in\mathscr{N}_p$,矛盾.

(2)$O_{p'}(G)=1$.

事实上,若 $O_{p'}(G)\neq 1$,考虑商群 $G/O_{p'}(G)$. 由引理 1.1(3)知 $G/O_{p'}(G)$ 符合定理条件,由 G 的极小性知 $G/O_{p'}(G)\in\mathscr{N}_p$,因此 $G\in\mathscr{N}_p$,矛盾.

(3)推出最终矛盾.

设 L 是 G 的包含在 $O_p(G)$ 中的极小正规子群. 由引理 1.1 知 G/L 符合定理条件,由 G 的极小性知 $G/L\in\mathscr{N}_p$. 由于 $\mathscr{N}_p$ 是饱和群系,类似定理 2.2 的证明可得 L 是 G 的唯一含于 $O_p(G)$ 的极小正规子群且 $L\not\leqslant\Phi(G)$. 由引理 1.8 知 $O_p(G)=F(O_p(G))=L$. 下分两款讨论.

(i)若 $P\trianglelefteq G$,取 P_1 是 P 的 2-极大子群. 因 P_1 在 G 中 C-可补,则存在 $K_1\leqslant G$,使得 $G=P_1K_1$ 且 $P_1\cap K_1\leqslant(P_1)_G\lneqq P=O_p(G)=L$. 由 L 的极小正规性知 $(P_1)_G=1$,于是 $|K_1|=|G:P_1|=|G:P||P:P_1|=p^2m$,其中$(p,m)=1$. 因此 $p^3\nmid|K_1|$,由引理 1.4 知 $K_1\in\mathscr{N}_p$. 设 $K_{1p'}$ 是 K_1 的正规 *Hall* p'-子群,则 $K_{1p'}$ 是 G 的 *Hall* p'-子群. 令 $N=N_G(K_{1p'})$. 明显地,$K_{1p'}\trianglelefteq N$ 且 $N\lneqq G$.(若 $N=G$,则 $K_{1p'}\trianglelefteq G$,从而 $G\in\mathscr{N}_p$,矛盾.)于是 $G=P_1K_1=P_1N$. 现不妨取 $P^*\in\mathrm{Syl}_p(N)$ 使得 $P^*\leqslant P$. 若 $P^*=P$,则 $N=G$,矛盾. 若 $P^*<\cdot P$,则$|G:N|=p$. 由于 p 是$|G|$的最小素因数,故 $N\trianglelefteq G$. 因此 $K_{1p'}\,\mathrm{char}N\trianglelefteq G$,则 $K_{1p'}\trianglelefteq G$. 于是 $G\in\mathscr{N}_p$,矛盾. 故可取 P_2 是 P 的一个 2-极大子群使得 $P^*\leqslant P_2$. 由题设知 P_2 在 G 中 C-可补,即存在 $K_2\leqslant G$,使得 $G=P_2K_2$ 且 $P_2\cap K_2\leqslant(P_2)_G$. 类似可证得 $K_2\in\mathscr{N}_p$. 设 $K_{2p'}$ 是 K_2 的正规 *Hall* p'-子群,则 $K_{2p'}$ 也是 G 的 *Hall* p'-子群. 由引理 1.3 知 G 是可解的,于是 $K_{1p'}$ 和 $K_{2p'}$ 共轭. 设 $K_{1p'}=K_{2p'}^g$. 由于 $G=P_2K_2$ 且 $K_{2p'}\trianglelefteq K_2$,故可取 $g\in P_2$. 于是 K_2^g 正规化 $K_{2p'}^g=K_{1p'}$,因此 $K_2^g\leqslant N$. 而 $G=G^g=(P_2K_2)^g=P_2K_2^g=P_2N$,因此 $P=P\cap G=P\cap P_2N=P_2(P\cap N)\leqslant P_2$,矛盾.

(ii)若 $P\ntrianglelefteq G$,因 $L\not\leqslant\Phi(G)$,则存在 G 的一个极大子群 M,使得 $G=M\ltimes L$. 现取 $P^*\in\mathrm{Syl}_p(M)$使得 $P=LP^*$. 由(i)知 $P^*\neq 1$. 若 $P^*<\cdot P$,则$|L|=|P:P^*|=p$. 由于 p 是$|G|$的最小素因数,取 $q\neq p$,$q\in\pi(G)$,有 $p<q$. 令 $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,有 $LQ\lneqq G$,由文献[9]定理 10.1.9 知 $LQ\in\mathscr{N}_p$. 故 $LQ=L\times Q$,于是由(2)和文献[9]定理 9.3.1 知 $Q\leqslant C_G(L)=C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$,矛盾. 故 P^* 非 P 的极大子群. 不妨取 P 的 2-极大子群 P_3 使得 $P^*\leqq P_3$. 于是 $L\not\leqslant P_3$.(事实上,如果 $L\leqslant P_3$,则 $P=LP^*\leqslant P_3$,矛盾.)由定理条件有 P_3 在 G 中 C-可补,即存在 $T\leqslant G$,使得 $P_3T=G$ 且 $P_3\cap T\leqslant(P_3)_G\lneqq O_p(G)$. 由 $O_p(G)$ 的极小正规性知 $(P_3)_G=1$. 由类似于(i)的证明可得矛盾. 此矛盾表明极小阶反例不存在,断言结论成立.

定理 2.4 设 $\mathscr{F}$ 是非空的子群闭的局部群系,G 是有限群,p 是$|G|$的任意素因数且 $G^{\mathscr{F}}$ 是可解的. 则下列两款等价:

(a)$G\in\mathscr{F}$.

(b)G 存在正规子群 N 使得 $G/N\in\mathscr{F}$;对于 $P\in\mathrm{Syl}_p(N)$,$P\cap G^{\mathscr{F}}$ 的 2^2 阶循环子群在 G 中 C-可补且 $P\cap G^{\mathscr{F}}$ 的极小子群皆包含在 $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$中.

证明 (a)$\Rightarrow$(b),取 $N=1$ 即可得.

(b)$\Rightarrow$(a):假设定理结论不成立,G 是极小阶反例. 任取 G 的真子群 M,由于 $M/M\cap N\cong MN/N\leqslant G/N$,而 $G/N\in\mathscr{F}$,因 $\mathscr{F}$ 是子群闭的,故 $M/M\cap N\in\mathscr{F}$. 取 $P_1\in\mathrm{Syl}_p(M\cap N)$,则存在 $P\in\mathrm{Syl}_p(N)$使得 $P_1=P\cap(M\cap N)=P\cap M$. 而 $P_1\cap M^{\mathscr{F}}=(P\cap M)\cap M^{\mathscr{F}}$,由引理 1.10 知 $M^{\mathscr{F}}\leqslant G^{\mathscr{F}}$,从而 $P_1\cap M^{\mathscr{F}}\leqslant P\cap G^{\mathscr{F}}$,故 $P_1\cap M^{\mathscr{F}}$ 的极小子群包含在 $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)\cap M\leqslant Z_\infty^{\mathscr{F}}(M)$中(引理 1.9). 再由引理 1.1 知 $P_1\cap M^{\mathscr{F}}$ 的 2^2 阶循环子群在 M 中 C-可补. 于是 M 满足定理条件,即定理条件是子群闭的. 于是 G 是极小非 $\mathscr{F}$-群. 由引理 1.11 知 $G^{\mathscr{F}}$ 是 p-群(对于某个素数 p)且 $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$是 $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$的极小正规子群. 于是 $P\cap G^{\mathscr{F}}=G^{\mathscr{F}}$. 现在考虑下列情形:

情形 1:$G^{\mathscr{F}}$ 是交换群. 由引理 1.11(4)知 $G^{\mathscr{F}}$ 是初等交换群. 由于 $G^{\mathscr{F}}$ 的极小子群皆包含在 $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$中,则 $G^{\mathscr{F}}\leqslant Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$,从而 $G\in\mathscr{F}$,矛盾.

情形 2:$G^{\mathscr{F}}$ 非交换群且 $p>2$. 由引理 1.11(3)知 $\exp G^{\mathscr{F}}=p$,类似于情形 1 的讨论可得 $G\in\mathscr{F}$,矛盾.

情形 3:$G^{\mathscr{F}}$ 非交换群且 $p=2$. 此时 $\exp G^{\mathscr{F}}=4$. 取 $x\in G^{\mathscr{F}}\backslash\Phi(G^{\mathscr{F}})$,则 $o(x)=4$. 于是由定理条件知 $\langle x\rangle$在 G 中 C-可补,即存在 $K\leqslant G$ 使得 $G=\langle x\rangle K$ 且 $\langle x\rangle\cap K\leqslant\langle x\rangle_G$. 若 $K=G$,则$\langle x\rangle=\langle x\rangle_G\trianglelefteq G$. 故而

$1\neq\langle x\rangle\Phi(G^{\mathscr{F}})/\Phi(G^{\mathscr{F}})\trianglelefteq G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$，由 $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 是 $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 的极小正规子群知 $\langle x\rangle\Phi(G^{\mathscr{F}})/\Phi(G^{\mathscr{F}})=G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$，故 $G^{\mathscr{F}}=\langle x\rangle\Phi(G^{\mathscr{F}})=\langle x\rangle$，这与 $G^{\mathscr{F}}$ 是非交换群矛盾. 因此 $K<G$. 不妨设 $P^*=G^{\mathscr{F}}\cap K$，则 $P^*\trianglelefteq K$. 下面分两款讨论.

(1) 若 $P^*=1$，由于 $G=\langle x\rangle K=G^{\mathscr{F}}K$，于是 $|G^{\mathscr{F}}|=|G:K|=|\langle x\rangle|$. 又 $\langle x\rangle\leqslant G^{\mathscr{F}}$，则 $G^{\mathscr{F}}=\langle x\rangle$，与 $G^{\mathscr{F}}$ 是非交换群相矛盾.

(2) 若 $P^*\neq1$，考虑子群 $N_G(P^*)$. 由于 $K\leqslant N_G(P^*)$，且由引理 1.5 知 $P^*<N_{G^{\mathscr{F}}}(P^*)$，于是有 $|G:N_G(P^*)|=|G^{\mathscr{F}}:N_{G^{\mathscr{F}}}(P^*)|<|G^{\mathscr{F}}:P^*|$，而 $G=G^{\mathscr{F}}K$，所以 $|G^{\mathscr{F}}:P^*|=|G^{\mathscr{F}}:G^{\mathscr{F}}\cap K|=|G:K|\leqslant4$，故 $|G:N_G(P^*)|=2$ 或者 $G=N_G(P^*)$.

(i) 若 $|G:N_G(P^*)|=2$，则 $N_G(P^*)\trianglelefteq G$. 令 $P_2=G^{\mathscr{F}}\cap N_G(P^*)$，则 $P_2\trianglelefteq G$. 若 $P_2\leqslant\Phi(G^{\mathscr{F}})$，则 $G^{\mathscr{F}}=G^{\mathscr{F}}\cap\langle x\rangle K=G^{\mathscr{F}}\cap\langle x\rangle N_G(P^*)=\langle x\rangle(G^{\mathscr{F}}\cap N_G(P^*))=\langle x\rangle P_2=\langle x\rangle\Phi(G^{\mathscr{F}})=\langle x\rangle$，矛盾. 若 $P_2\not\leqslant\Phi(G^{\mathscr{F}})$，则 $1\neq P_2\Phi(G^{\mathscr{F}})/\Phi(G^{\mathscr{F}})\trianglelefteq G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$. 由于 $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 是 $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 的极小正规子群，故 $G^{\mathscr{F}}=P_2\Phi(G^{\mathscr{F}})=P_2$，于是有 $G=N_G(P^*)$，矛盾于 $|G:N_G(P^*)|=2$.

(ii) 若 $G=N_G(P^*)$，则 $P^*\trianglelefteq G$. 于是 $P^*\Phi(G^{\mathscr{F}})/\Phi(G^{\mathscr{F}})\trianglelefteq G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$. 由 $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 的极小性知或者 $P^*\Phi(G^{\mathscr{F}})=\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 或者 $P^*\Phi(G^{\mathscr{F}})=G^{\mathscr{F}}$. 若前者成立，则 $G^{\mathscr{F}}\cap K=P^*\leqslant\Phi(G^{\mathscr{F}})$，于是 $G^{\mathscr{F}}=G^{\mathscr{F}}\cap\langle x\rangle K=\langle x\rangle(G^{\mathscr{F}}\cap K)=\langle x\rangle\Phi(G^{\mathscr{F}})=\langle x\rangle$，矛盾. 若后者成立，则 $G^{\mathscr{F}}=P^*\Phi(G^{\mathscr{F}})=P^*=G^{\mathscr{F}}\cap K$，即有 $G^{\mathscr{F}}\leqslant K$. 于是必有 $G=K$，矛盾于 $K<G$. 此矛盾表明极小阶反例不存在，定理结论成立.

推论 2.5 设 $\mathscr{F}$ 是非空的子群闭的局部群系，G 是有限群 p 是 $|G|$ 的任意素因数且 $G^{\mathscr{F}}$ 是可解的. 若对于 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$，$P\cap G^{F}$ 的极小子群皆包含在 $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ 中且 $P\cap G^{\mathscr{F}}$ 的 2^2 阶循环子群在 G 中 C-可补，则 $G\in\mathscr{F}$.

推论 2.6 设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的素因数. 若 G 存在正规子群 N 使得 $G/N\in\mathscr{U}$，对于 $P\in\mathrm{Syl}_p(N)$，$P\cap G^{\mathscr{U}}$ 的 2^2 阶循环子群在 G 中 C-可补且 $P\cap G^{\mathscr{U}}$ 的极小子群皆包含在 $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$ 中，则 $G\in\mathscr{U}$.

推论 2.7 设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的素因数. 若 G 存在正规子群 N 使得 $G/N\in\mathscr{N}_p$，对于 $P\in\mathrm{Syl}_p(N)$，$P\cap G^{\mathscr{N}_p}$ 的 2^2 阶循环子群在 G 中 C-可补且 $P\cap G^{\mathscr{N}_p}$ 的极小子群皆包含在 $Z_\infty^{\mathscr{N}_p}(G)$ 中，则 $G\in\mathscr{N}_p$.

推论 2.8 设 $\mathscr{F}$ 是所有幂零群构成的群系. G 是有限群，p 是 $|G|$ 的素因数. 若 G 存在正规子群 N 使得 $G/N\in\mathscr{F}$，对于 $P\in\mathrm{Syl}_p(N)$，$P\cap G^{\mathscr{F}}$ 的 2^2 阶循环子群在 G 中 C-可补且 $P\cap G^{\mathscr{F}}$ 的极小子群皆包含在 $Z_\infty(G)$ 中，则 $G\in\mathscr{F}$.

参考文献：

[1] WANG YANMING. C- normality of groups and its properties[J]. Joural of Algebra, 1996, 180: 954-965.

[2] WANG YANMING. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups C- supplemented [J]. J Algebra, 2004, 224: 467-478.

[3] 徐明曜. 有限群导引：上[M]. 北京：科学出版社，1993.

[4] LI SHIRONG. On minimal subgroups of finite groups Ⅲ [J]. Communications in Algebra, 1998, 26 (8), 2453-2461.

[5] DOERK K, HAWKES T. Finite Solvable Groups[M]. Berlin-NewYork: De Gruyter, 1992.

[6] LI DEYU, GUO XIUYUN. The influence of C-normality of subgroups on the structure of finite groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 150: 53-60.

[7] GUO W. The theorey of classes of groups[J]. Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] 郭文彬. 群类论[M]. 北京：科学出版社，2000.

[9] ROBINISON D J S. A course in the theory of groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[10] CROSS F. Conjugacy of odd order Hall subgroups[J]. Bull London Math Soc, 1987, 19: 311-319.

(责任编辑：韦廷宗)