半正规、C-正规与有限群的超可解性*

Semi-Normal, C-Normal and Super Solvability of Finite Groups

唐曾林[1]，李世荣[2]，曾凡辉[2]

TANG Zeng-lin[1], LI Shi-rong[2], ZENG Fan-hui[2]

(1. 湖南文理学院，湖南常德　415000；2. 广西大学数学与信息科学学院，广西南宁　530004)

(1. Hunan University of Arts and Science, Changde, Hunan, 415000, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要：利用半正规或 C- 正规子群刻划有限群的结构，得到：若群 G 的每个非循环 Sylow 子群的极大子群在 G 中或半正规或 C- 正规，则 G 超可解.

关键词：半正规　C- 正规　超可解　Sylow 基

中图法分类号：O152.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2007)01-0001-05

Abstract: Semi-normal subgroups and C-normal subgroups are used to characterize the structure of finite groups. It is obtained that if every maximal subgroup of non-cyclic Sylow subgroups of G either semi-normal or C-normal in G, then G is super solvable.

Key words: semi-normality, C-normality, super solvable, Sylow basis

苏向盈在文献[1]中首次引进了半正规子群的概念，得到：若群 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中半正规，则群 G 超可解；王燕鸣在文献[2]中引入 C- 正规子群的概念，得：若群 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中 C- 正规，则群 G 超可解. 本文将证明，可以把以上定理中的 Sylow 子群限制为非循环，从而推广了上述定理，另外，我们利用"或"的方法把半正规与 C- 正规结合起来，得到较文献[1,2]更强的结果.

1　定义及主要引理

为了方便讨论，我们给出半正规的定义：

定义 1[1]　群 G 的子群 A 叫做(在 G 中)半正规的，如果存在一个子群 B 使得 $AB=G$，且对 B 的任何子群 B_1，AB_1 是 G 的真子群. 这样的子群 B 叫做 A 在 G 中的 S- 补，A 在 G 中的 S- 补之集合记为 $S_G(A)$.

半正规子群的主要性质有：

引理 1[1]　设 A 是 G 的半正规子群，则

(1) 如果 $A \leqslant H \leqslant G$，那么 A 是 H 的半正规子群；

(2) 如果 $N \trianglelefteq G$，$N \leqslant A$，那么 A/N 是 G/N 的半正规子群，并且如果 $B \in S_G(A)$，那么 $BN/N \in S_{G/N}(A/N)$；

(3) 如果 $N \trianglelefteq G$，则 AN 是 G 的半正规子群；

(4) 如果 $N \trianglelefteq G$，那么 AN/N 是 G/N 的半正规子群. 于是对 G 的任意同态 θ，A^θ 是 G^θ 的半正规子群.

半正规子群有以下的等价性定义：

定义 2　群 G 的子群 A 叫做(在 G 中)半正规的，如果存在一个子群 B 使得 $AB=G$，且对 B 的任一素数幂阶子群 B_1，$AB_1 \leqslant G$.

先证明以下引理.

引理 2　设 $A, B_i \leqslant G$ 且 $AB_i \leqslant G (i=1,2,\cdots,n)$，则 $A < B_1, B_2, \cdots, B_n > \leqslant G$.

证明　对 n 用归纳法，当 $n=2$ 时，显然 $|A<B_1,B_2>| = |<B_1,B_2>A|$.

$\forall\, h \in A<B_1,B_2>$，则 $h=a_1g$，$a_1 \in A$，$g \in <B_1,B_2>$. 容易验证，$g=g_1g_2\cdots g_s$，$g_i \in B_1$ 或 B_2，于是 $h=a_1g_1g_2\cdots g_s$. 由引理 1，$h=(a_1g_1)g_2\cdots g_s = g'_1a_2g_2\cdots g_s = g'_1(a_2g_2)\cdots g_s = g'_1g'_2a_3\cdots g_s = \cdots = g'_1g'_2\cdots g'_sa_{s+1} \in <B_1,B_2>A$，其中 $a_ig_i = g'_ia_{i+1}$，$g'_i \in B_1$ 或 B_2，$a_k \in A$，$i=1,2,\cdots,s$，$k=1,2,\cdots,s+$

收稿日期：2006-05-25

作者简介：唐曾林(1973-)，男，讲师，主要从事有限群研究。

*国家自然科学基金(10161001)和广西自然科学基金(0249001)资助项目。

1. 故 $A<B_1,B_2>\subseteq<B_1,B_2>A$，所以 $A<B_1,B_2>=<B_1,B_2>A$，即 $A<B_1,B_2>\leqslant G$. 以此类推，可归纳得：$A<B_1,B_2,\cdots,B_n>\leqslant G$.

现在可以证明定义 1 和定义 2 的等价性.

事实上，若 A 满足定义 1，则 A 显然满足定义 2；反之，若 A 满足定义 2，即有 $B\leqslant G$ 使 $AB=G$ 且对 B 的任一素数幂阶子群 B_1，有 $AB_1\leqslant G$. $\forall\ C\leqslant B$，则 $C=<C_{p_1},C_{p_2},\cdots,C_{p_n}>$，其中 $C_{p_i}\in \mathrm{Syl}_{p_i}(C)$，则 $AC_{p_i}\leqslant G$，p_i 为素数，$i=1,2,\cdots,n$. 由引理 2 有，$AC\leqslant G$，所以 A 满足定义 1.

C- 正规子群的定义：

定义 3[2]　设 $H\leqslant G$，称 H 为 G 的 C- 正规子群，若存在 $K\trianglelefteq G$ 使得 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant Core_G(H)$.

C- 正规子群的等价性定义：

定义 4　设 $H\leqslant G$，称 H 为 G 的 C- 正规子群，若存在 $K\trianglelefteq G$ 使得 $G=HK$ 且 $H\cap K\trianglelefteq G$.

事实上，若 H 满足定义 3，即有 $K\trianglelefteq G$ 使 $G=HK$，$H\cap K\leqslant H_G$ 于是 $H(H_GK)=G$，$H_GK\trianglelefteq G$ 且 $H\cap H_GK=H_G(H\cap K)=H_G\trianglelefteq G$，故 H 满足定义 4；反之，若 H 满足定义 4，则 H 显然也满足定义 3.

C- 正规的常用性质：

引理 3[2]　(1) 若 H 在 G 中 C- 正规，$H\leqslant K\leqslant G$，则 H 在 K 中 C- 正规；

(2) 设 $N\trianglelefteq G$，$N\leqslant H$，那么 H 在 G 中 C- 正规当且仅当 H/N 在 G/N 中 C- 正规；

引理 4　设有 $N\trianglelefteq G$，$H\leqslant G$ 且 $(|N|,|H|)=1$. 如果 H 在 G 中 C- 正规，则 HN/N 在 G/N 中 C- 正规.

证明　H 在 G 中 C- 正规，即有 $K\trianglelefteq G$ 使 $G=HK$ 且 $H\cap K\leq H_G$. 不妨设 N 是 G 的 π- 子群，则 H 是 G 的 π'- 子群. 于是有 $|G|_\pi=|K|_\pi=|KN|_\pi$，所以 $|K\cap N|_\pi=|N|_\pi=|N|$，即 $N=K\cap N$，从而 $N\leqslant K$. 因 $HN/N\cdot K/N=G/N$，$HN/N\cap K/N=(HN\cap K)/N=(H\cap K)N/N\leqslant H_GN/N\leqslant(HN/N)_G$，所以 HN/N 在 G/N 中 C- 正规.

2　主要结果

有了前面的定义和引理我们可以得到本文的主要结果.

定理 1　若群 G 的每个非循环 Sylow 子群的极大子群在 G 中 C- 正规，则 G 超可解.

证明　首先定义非循环 Sylow 子群的集合，$M(P)=\{P\in \mathrm{Syl}_p(G),P$ 非循环$\}$，其中 p 是 $|G|$ 的素因子，假设命题非真，并设 G 是极小阶反例. 若 $M(P)=\phi$，即群 G 的所有 Sylow 子群都循环，当然有 G 超可解. 故可设 $M(P)\neq\phi$. 取 $|G|$ 的最小素因子 p，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$.

(1)$F(G)\neq 1$.

(i) 若 P 循环，则 G 有正规 p- 补，于是 G 可解，从而有 $F(G)\neq 1$.

(ii) 若 P 非循环，令 $P_1<\cdot P$. 根据定理 1 假设 P_1 在 G 中 C- 正规，欲证 $F(G)\neq 1$. 假设不真，即 $F(G)=1$，那么必有 $P_1\neq 1$. 因 P_1 在 G 中 C- 正规，故存在 $K\trianglelefteq G$ 使 $G=P_1K$ 且 $P_1\cap K\leqslant Core_G(P_1)\leqslant O_p(G)\leqslant F(G)=1$，从而 $P_1\cap K=1$，因此 $K<G$，$p^2\nmid|K|$（这是因为 $|G:P_1|=|K|$，而 $P_1<\cdot P$，由此 $|P:P_1|=p$，于是 $|K|=|G:P_1|=|G:P|\cdot|P:P_1|$，因为 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，故 $|G:P_1|=mp$，其中 $(m,p)=1$，）. 故 K 有 p 阶 Sylow p- 子群，其极大子群为 1，当然在 G 中 C- 正规，而 K 其余的 Sylow 子群也是 G 的 Sylow 子群，特别 K 的非循环 Sylow 子群也是 G 的非循环 Sylow 子群，由此知条件对子群 K 遗传，K 超可解. 从而 $F(K)\neq 1$，又 $F(K)$ char $K\trianglelefteq G$，故 $F(K)\trianglelefteq G$，所以 $F(K)\leqslant F(G)=1$，与 $F(K)\neq 1$ 矛盾. 这说明 $F(G)\neq 1$ 成立.

(2) 设 $N\trianglelefteq G$ 且 $N\leqslant O_p(G)$，其中 p 是 $|G|$ 的某个素数因子，则 G/N 满足定理 1 的条件.

若 G/N 的所有 Sylow 子群都循环，有 G/N 超可解，故设 T/N 是 G/N 的非循环 Sylow q- 子群，T_1/N 是 T/N 的极大子群. 若 $q=p$，则 T 为 G 的 Sylow 子群，而 T_1 是 T 的极大子群，由 T_1 在 G 中 C- 正规，由引理 3，T_1/N 在 G/N 中也 C- 正规；若 $q\neq p$，则由 Schur-Zassenhaus 定理[3] $T=QN$. 其中 Q 是 G 的非循环 Sylow q- 子群，于是 $T_1=T\cap T_1=T_1\cap QN=(T_1\cap Q)N$，令 $Q_1=T_1\cap Q$. 比较阶知，Q_1 是 Q 的极大子群，所以 Q_1 在 G 中 C- 正规. 又 $(|Q_1|,|N|)=1$ 由引理 4 知 $T/N=Q_1N/N$ 在 G/N 中 C- 正规. 故 G/N 满足定理 1 的条件. 由归纳 G/N 超可解.

(3)G 可解.

因为 $F(G)\neq 1$，即有某个 $p_1\in\pi(G)$ 使 $O_{p_1}(G)\neq 1$. 由 (2) 知 $G/O_{p_1}(G)$ 满足定理 1 的假设. 由归纳 $G/O_{p_1}(G)$ 超可解，此时 G 显然已可解.

(4)G 有唯一极小正规子群 N，使 $G=N\rtimes M$，$M<\cdot G$，M 超可解且 $C_G(N)=N=F(G)$.

设 N 是 G 的极小正规子群，因为 G 可解，故 N 是初等 *Abel* 群. 由 (2) 知 G/N 超可解，所以 N 是 G 的唯一极小正规子群. 若 $\Phi(G)\neq 1$，则有 $N\leqslant\Phi(G)$，于是 $G/\Phi(G)\cong(G/N)/(\Phi(G)/N)$，故 $G/\Phi(G)$ 超可解，从而 G 超可解，矛盾，故 $\Phi(G)=1$. 由文献[3]的定理 4.5 可得，$F(G)=N$. 另一方面由 $\Phi(G)=1$，存在 M

$<\!\cdot\, G$ 使 $N \not\leq M$. 从而 $NM=G$. 因 $N\cap M \trianglelefteq M$ 且 N 是交换的，所以 $N\cap M \trianglelefteq NM=G$，由 N 的唯一极小正规性得 $N\cap M=1$，所以 $G=N\rtimes M$. 又因 $C_G(N) \trianglelefteq N_G(N)=G$，所以 $C_G(N)\cap M \trianglelefteq M$，从而有 $C_G(N)\cap M \trianglelefteq NM=G$，所以 $C_G(N)\cap M=1$. 而 $C_G(N)=C_G(N)\cap NM=N(C_G(N)\cap M)=N$.

(5) $|N|=p$，即 N 是素数阶循环群.

令 q 为 $|G|$ 的最大素因子，假设 $q\neq p$. 令 $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，则 QN/N 是 G/N 的 Sylow q- 子群. 因 G/N 超可解，故 $QN/N \trianglelefteq G/N$. 若 G 中所有的 Sylow p- 子群都循环，而 N 是初等交换 p- 群，故 N 循环，又由 G/N 超可解，得 G 超可解，与 G 是极小阶反例矛盾. 于是可设 P 是 G 的非循环 Sylow 子群. 由于 N 是 G 的正规 p- 子群，故 $N\leqslant P$，所以 $P/N\in \mathrm{Syl}_p(G/N)$，于是 $QN/N\cdot P/N \leqslant G/N$，故 $QNP=QP\leqslant G$，根据引理3，QP 满足定理1条件. 若 $QP<G$，则由归纳得 QP 超可解，所以 $Q \trianglelefteq QP$，得 $Q \trianglelefteq QN$. 显然 $Q\cap N=1$，于是 $QN=Q\times N$，从而 $Q\leqslant C_G(N)=N$，矛盾，所以 $QP=G$. 若 $N\leqslant \Phi(P)$，则 $P=P\cap NM=N(P\cap M)=P\cap M$，故 $P\leqslant M$，从而 $N\leqslant M$，故 $G=NM=M$，矛盾. 所以 $N \not\leq \Phi(P)$，即有 $P_1 <\!\cdot\, P$ 使 $N\not\leq P_1$. 当 $P_1=1$ 时，则 $N=P$ 且 $|N|=p$，(5) 已成立，故设 $P_1\neq 1$. 因为前面说 P 非循环，由定理1假设 P_1 在 G 中 C- 正规. 根据定义3可知存在 $K \trianglelefteq G$ 使 $G=P_1K$ 且 $P_1\cap K\leqslant Core_G(P_1)\leqslant F(G)=N$. 由 N 的唯一极小正规性及 $N\not\leq Core_G(P_1)$ 得 $Core_G(P_1)=1$. 于是 $P_1\cap K=1$，从而 $p^2\nmid |K|$. 易知 K 的非循环 Sylow 子群也一定是 G 的非循环 Sylow 子群，从而 K 满足定理1条件，且 $K<G$，由归纳 K 超可解. 又 K 的 Sylow q- 子群也是 G 的 Sylow q- 子群. 设 $K_q\in \mathrm{Syl}_q(K)$，则有 $x\in G$ 使 $Q=K_q^x$，而 $K \trianglelefteq G$，所以 $K_q^x\leqslant K$，故 $Q\leqslant K$. 由此得 $Q \trianglelefteq K$，即有 Q char $K \trianglelefteq G$，故 $Q \trianglelefteq G$. 这样 $N\leqslant Q$，矛盾. 所以 $q=p$，即 p 是 $|G|$ 中的最大素因子.

因 G/N 超可解，故 $P/N \trianglelefteq G/N$，即 $P \trianglelefteq G$，所以 $P\leqslant F(G)=N$. 由此得 $N=P$. 设 $N_1 <\!\cdot\, N$，则 N_1 在 G 中 C- 正规. 于是存在 $K \trianglelefteq G$ 使 $G=N_1\cdot K$ 且 $N_1\cap K \trianglelefteq G$. 由 $N\not\leq N_1\cap K$ 及 N 的唯一极小正规性得 $N_1\cap K=1$，又因 $N\leqslant K$ 所以 $N_1\leqslant N_1\cap K=1$，从而 $|N|=p$. 总之 $|N|=p$. (5) 的证明完成，到此定理1得证.

推论 1[2]　若群 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中 C- 正规，则 G 超可解.

定理 2　若群 G 的每个非循环 Sylow 子群的极大子群在 G 中半正规，则 G 超可解.

证明　首先定义非循环 Sylow 子群的集合，$M(P)=\{P\in \mathrm{Syl}_p(G), P\text{非循环}\}$. 不失一般性，可以设 $M(P)\neq \phi$. 假若命题非真，并设 G 是极小阶反例. 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子.

(1) 现在证明，任取 $N \trianglelefteq G$ 满足 $N\leqslant O_p(G)$，则 G/N 超可解.

这是因为，设 T/N 是 G/N 的非循环 Sylow q- 子群的极大子群. 若 $q=p$，则 T 为 G 的非循环 Sylow p- 子群的极大子群，根据定理2条件 T 在 G 中半正规，由引理1知 T/N 在 G/N 中半正规. 若 $q\neq p$，则由 Schur-Zassenhaus 定理[3] 知 $T=Q_1N$. Q_1N/N 是 G/N 的 Sylow q- 子群的极大子群. 比较阶知，Q_1 是 G 的 Sylow q- 子群的极大子群，由半正规的性质知 $T/N=Q_1N/N$ 在 G/N 中半正规. 故 G/N 满足定理2的条件，由 G 的极小性，G/N 超可解.

又 p 是 $|G|$ 的最小素因子，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，若 P 循环，则 G 有正规 p- 补，于是 G 可解. 从而有 $F(G)\neq 1$. 若 P 非循环，令 $P_1 <\!\cdot\, P$，则 $P_1>1$. 又根据定理2假设 P_1 在 G 中半正规，即有 $B\in S_G(P_1)$，使 $G=P_1B$ 且 $\forall\, B_1<B$ 有 $P_1B_1<G$. 假设 $F(G)=1$，因为 $\Phi(G)\leqslant F(G)$，于是 $\Phi(G)=1$. 若 $B=G$，则 $P_1M<G$，$\forall\, M<\!\cdot\, G$. 由 M 的极大性有 $P_1M=M$，即 $P_1\leqslant M$. 又由 M 的任意性得 $1\neq P_1\leqslant \Phi(G)=1$，矛盾，所以 $B<G$. 从而存在 $M<\!\cdot\, G$ 使 $B\leqslant M$. 于是 $G=P_1M$，$|G:M|=p$ 的方幂. 设 $M=<M_p, M_{p_1}, \cdots, M_{p_s}>$，$M_p, M_{p_i}$ 分别为 M 的 Sylow p- 子群与 Sylow p_i- 子群，$i=1,2,\cdots,s$. 由于 M_p 不是 G 的 Sylow p- 子群，故有 P_1^* 满足 $M_p\leqslant P_1^* <\!\cdot\, P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. 由定理2假设，$P_1^*$ 在 G 中半正规. 由引理2得 $P_1^*<M_p, M_{p_1}, \cdots, M_{p_s}>\leqslant G$，即有 $P_1^*M\leqslant G$. 由于 $|MP_1^*:P_1^*|=|M:M\cap P_1^*|=|M:M_p|=p'$ 数，所以 $P_1^*\in \mathrm{Syl}_p(MP_1^*)$，故 $MP_1^*=M$. 从而 $P_1^*=M_p$，$|G:M|=p$，所以 $M \trianglelefteq G$.

由定理2假设，G 的非循环 Sylow p- 子群的极大子群在 G 中半正规. 设 $M_p\in \mathrm{Syl}_p(M)$，则 M_p 是 G 的 Sylow p- 子群的极大子群，M_p 在 G 中半正规，从而在 M 中也半正规，即有 $H\in S_M(M_p)$，由文献[1] 知 H 为 M 的 p'-$Hall$ 子群. 显然 H 也是 G 的 p'-$Hall$ 子群. 由于 H 中的每一 Sylow 子群的极大子群也是 G 的 Sylow 子群的极大子群，故 H 满足定理2假设条件，由归纳 H 超可解. 设 $\{H_{p_1}, H_{p_2}, \cdots, H_{p_s}\}$ 是 H 的 Sylow 基. 根据文献[1]，M_p 与每一 H_{p_i} 可交换，$p_i\neq p$，$i=1,2,\cdots,s$. 于是 $\{M_p, H_{p_1}, H_{p_2}, \cdots, H_{p_s}\}$ 是 M 的 Sylow 基，M 可解，从而 G 可解.

(2) G 有唯一极小正规子群 N，使 $G=N\rtimes M$，$M<\!\cdot\, G$，M 超可解且 $C_G(N)=N=F(G)$.

证明参照定理 1.

(3) $|N| = p$.

令 q 为 $|G|$ 的最大素因子，假设 $q \neq p$. 令 $Q \in Syl_q(G)$，则 QN/N 是 G/N 的 Sylow q- 子群. 因 G/N 超可解，故 $QN/N \trianglelefteq G/N$. 若所有的 Sylow p 子群都循环，而 N 是初等交换 -p 群，故 N 循环，又由 G/N 超可解，得 G 超可解，与 G 是极小阶反例矛盾. 于是可设 $P \in Syl_p(G)$，且 P 非循环. 由于 N 是 G 的正规 p- 子群，故 $N \leqslant P$，所以 $P/N \in Syl_p(G/N)$，于是 $QN/N \cdot P/N \leqslant G/N$，即 $QNP = QP \leqslant G$，显然 QP 满足定理条件. 若 $QP < G$，归纳得 QP 超可解. 于是 $Q \trianglelefteq QP$，更有 $Q \trianglelefteq QN$. 显然 $Q \cap N = 1$ 于是 $QN = Q \times N$，故 $Q \leqslant C_G(N) = N$，矛盾，所以 $QP = G$. 若 $N \leqslant \Phi(P)$，则 $P = P \cap NM = N(P \cap M) = P \cap M$，故 $P \leqslant M$. 从而 $N \leqslant M$，故 $G = NM = M$，矛盾. 所以 $N \leqslant /\Phi(P)$，即有 $P_1 <\cdot P$ 使 $N \not\leqslant P_1$. 当 $P_1 = 1$ 时，$N = P$，$|N| = p$，(3) 已成立. 故设 $P_1 \neq 1$. 因为前面说 P 非循环，由定理 2 假设 P_1 在 G 中半正规. 由此得 $P_1Q \leqslant G$，$|G : P_1Q| = |PQ : P_1Q| = p$. 于是 $P_1Q \trianglelefteq G$，从而 $N \leqslant P_1Q$，即 $N \leqslant P_1 \in Syl_p(P_1Q)$，矛盾. 所以 $q = p$，即 p 是 $|G|$ 中的最大素因子.

因 G/N 超可解，故 $P/N \trianglelefteq G/N$，即 $P \trianglelefteq G$，所以 $P \leqslant F(G) = N$. 由此得 $N = P$. 设 $N_1 <\cdot N$，因为 P 非循环，根据定理2假设，N_1 在 G 中半正规. 即有 $B \in S_G(N_1)$ 使 $G = N_1B$. 由于 $G = N \rtimes M$，M 为 G 的 p'-$Hall$ 子群. 又因 G 可解，故 B 有 p'-$Hall$ 子群，它也是 G 的 p'-$Hall$ 子群. 由 P. Hall 定理[3] 可设 $M < B$，即有 $N_1M < G$，由于 $M <\cdot G$，故 $N_1M = M$，即 $N_1 \leqslant M$. 所以 $N_1 \leqslant M \cap N = 1$，从而 $|N| = p$. 于是由 G/N 超可解，N 是素数阶循环群，得 G 超可解，与 G 是极小反例矛盾. 所以 $F(G) \neq 1$，即当 P_1 在 G 中半正规时，一定有 $F(G) \neq 1$，从而有素数 p 使得 $O_p(G) \neq 1$，又由前面知 $G/O_p(G)$ 超可解，从而 G 可解. 用前面的方法同理可得：G 有唯一极小正规子群 N，使 $G = N \rtimes M$，$M <\cdot G$，M 超可解且 $C_G(N) = N = F(G)$，G/N 超可解，并且 $|N| = p$. 于是 G 超可解，与 G 是极小反例矛盾. 综上所述，反例不存在，从而定理 2 得证.

推论 2[1]　若群 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中半正规，则 G 超可解.

定理 3　若群 G 的每个非循环 Sylow 子群的极大子群在 G 中，或者 C- 正规或者半正规，则 G 超可解.

证明　首先定义非循环 Sylow 子群的集合，$M(P) = \{P \in Syl_p(G), P$ 非循环$\}$. 若 $M(P) = \phi$，即群 G 的所有极大子群都循环，当然有 G 超可解. 故可设 $M(P) \neq \phi$. 现在假若命题非真，并设 G 是极小阶反例.

(1) 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子，$P \in Syl_p(G)$，(i) 若 P 循环，则 G 有正规 p- 补，于是 G 可解，从而有 $F(G) \neq 1$，(ii) 若 P 非循环，假设 $F(G) = 1$. 令 $P_1 <\cdot P$. 根据定理假设 P_1 在 G 中或 C- 正规或半正规.

如果 P_1 在 G 中 C- 正规，则存在 $K \trianglelefteq G$ 使 $G = P_1K$ 且 $P_1 \cap K \leqslant Core_G(P_1) \leqslant O_p(G) \leqslant F(G) = 1$，从而 $P_1 \cap K = 1$，因此 $K < G$，$p^2 \nmid |K|$. (这是因为 $|G : P_1| = |K|$，而 $P_1 <\cdot P$，由此 $|P : P_1| = p$，故有 $|G : P_1| = |G : P| \cdot |P : P_1|$，因为 $P \in Syl_p(G)$，故 $|G : P_1| = mp$，其中 $(m, p) = 1$，故 K 有 p 阶 Sylow p- 子群，其极大子群为 1，当然在 G 中 C- 正规，而 K 其余的 Sylow 子群也是 G 的 Sylow 子群，特别 K 的非循环 Sylow 子群也是 G 的非循环 Sylow 子群，由此知条件对子群 K 遗传，由归纳知，K 超可解. 从而 $F(K) \neq 1$，但是 $F(K)$ char $K \trianglelefteq G$，故 $F(K) \trianglelefteq G$，所以 $F(K) \leqslant F(G) = 1$ 矛盾，于是 P_1 在 G 中半正规. 但是根据前定理 2，P_1 在 G 中半正规时一定有：$F(G) \neq 1$，于是不管 P_1 在 G 中半正规还是 C- 正规都有 $F(G) \neq 1$.

(2) 取 $N \trianglelefteq G$ 满足 $N \leqslant O_p(G)$，则 G/N 超可解.

设 T/N 是 G/N 的 Sylow q- 子群的极大子群. 若 $q = p$，则 T 为 G 的 Sylow p- 子群的极大子群，由 T 在 G 中半正规知 T/N 在 G/N 中半正规；若 $q \neq p$，则由 Zassenhaus 定理[3] 知 $T = Q_1N$. Q_1N/N 是 G/N 的 Sylow q- 子群的极大子群. 比较阶知，Q_1 是 G 的 Sylow q- 子群的极大子群，又 $(|Q_1|, |N|) = 1$，由半正规的性质知 $T/N = Q_1N/N$ 在 G/N 中半正规. 故 G/N 满足定理 3 的条件，故 G/N 超可解. 这样一来，$G/O_p(G)$ 超可解，故 G 可解.

(3) G 有唯一极小正规子群 N，使 $G = N \rtimes M$，$M <\cdot G$，M 超可解且 $C_G(N) = N = F(G)$.

设 N 是 G 的极小正规子群，因为 G 可解，故 N 是初等交换 p- 群. 由 (2) 知 G/N 超可解，所以 N 是 G 的唯一极小正规子群. 若 $\Phi(G) \neq 1$，则有 $N \leqslant \Phi(G)$，于是 $G/\Phi(G) \cong (G/N)/(\Phi(G)/N)$，故 $G/\Phi(G)$ 超可解，从而 G 超可解，矛盾，故 $\Phi(G) = 1$. 根据文献[3] 的定理 4.5 得 $F(G) = N$. 又 $\Phi(G) = 1$，于是存在 $M <\cdot G$ 使 $N \not\leqslant M$，从而 $NM = G$. 因 $N \cap M \trianglelefteq M$ 且 N 是交换的，所以 $N \cap M \trianglelefteq NM = G$. 由 N 的唯一极小正规性得 $N \cap M = 1$，所以 $G = N \rtimes M$. 又因 $C_G(N) \trianglelefteq N_G(N) = G$，所以 $C_G(N) \cap M \trianglelefteq M$. 从而有 $C_G(N) \cap M \trianglelefteq NM = G$，所以 $C_G(N) \cap M = 1$. 这样就有 $C_G(N) = C_G(N) \cap NM = N(C_G(N) \cap M) =$

N.

(4) $|N| = p$，是素数阶循环群.

令 q 为 $|G|$ 的最大素因子，假设 $q \neq p$. 令 $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$，则 QN/N 是 G/N 的 Sylow q- 子群. 因 G/N 超可解，故 $QN/N \trianglelefteq G/N$. 若 G 的所有 Sylow p- 子群都循环，而 N 是初等交换 -p 群，故 N 循环，又由 G/N 超可解，得 G 超可解，与 G 是极小阶反例矛盾. 于是可设 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$，且 P 非循环. 由于 N 是 G 的正规 p-子群，故 $N \leqslant P$，所以 $P/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. 于是 $QN/N \cdot P/N \leqslant G/N$，即 $QNP = QP \leqslant G$，显然 QP 满足定理 3 的条件. 若 $QP < G$，则由归纳得 QP 超可解，所以 $Q \trianglelefteq QP$. 因为 $N \leqslant P$，所以 $QN \leqslant QP$ 得出 $Q \trianglelefteq QN$，显然 $Q \cap N = 1$. 于是 $QN = Q \times N$，与 $Q \in C_G(N) = N$，矛盾，所以 $QP = G$. 若 $N \leqslant \Phi(P)$，则 $P = P \cap NM = N(P \cap M) = P \cap M$，故 $P \leqslant M$. 从而 $N \leqslant M$，故 $G = NM = M$，矛盾. 所以 $N \nleqslant \Phi(P)$，即有 $P_1 <\cdot\, P$ 使 $N \ntrianglelefteq P_1$. 当 $P_1 = 1$ 时，$N = P$ 且 $|N| = p$，(4) 已成立. 故设 $P_1 \neq 1$. 因为前面说 P 非循环，由定理 3 假设 P_1 在 G 中或 C- 正规或半正规. 若 P_1 半正规，那么有 $P_1Q \leqslant G$，$|G : P_1Q| = |PQ : P_1Q| = p$，所以 $P_1Q \trianglelefteq G$，从而 $N \leqslant P_1Q$，于是得 $N \leqslant P_1 \in \mathrm{Syl}_p(P_1Q)$，矛盾. 若 P_1 在 G 中 C- 正规. 即有 $K \trianglelefteq G$ 使 $G = P_1K$ 且 $P_1 \cap K \leqslant Core_G(P_1) \leqslant F(G) = N$. 由 N 的唯一极小正规性及 $N \ntrianglelefteq Core_G(P_1)$ 得 $Core_G(P_1) = 1$. 于是 $P_1 \cap K = 1$，从而 $p^2 \nmid |K|$. 易知 K 的非循环 Sylow 子群也一定是 G 的非循环 Sylow 子群，从而 K 满足定理条件，且 $K < G$，由归纳 K 超可解. 又 K 的 Sylow q- 子群也是 G 的 Sylow q- 子群. 设 $K_q \in \mathrm{Syl}_q(K)$，则有 $x \in G$ 使 $Q = K_q^x$，而 $K \trianglelefteq G$，所以 $K_q^x \leqslant K$，所以 $Q = K_q^x \leqslant K$，故 $Q \leqslant K$. 由此得 $Q \trianglelefteq K$，即有 $Q \operatorname{char} K \trianglelefteq G$，故 $Q \trianglelefteq G$. 这样 $N \leqslant Q$，矛盾，所以 $p_1 = 1$，从而，P 是素数阶循环群，导致 N 也是素数阶循环群. 根据假设 G/N 超可解，得 G 也超可解，与 G 是极小阶反例矛盾，一定有，$q = p$，即 p 是 $|G|$ 中的最大素因子.

因 G/N 超可解，故 $P/N \trianglelefteq G/N$，即 $P \trianglelefteq G$，所以 $P \leqslant F(G) = N$. 由此得 $N = P$. 设 $N_1 <\cdot\, N$，因为 P 非循环，根据定理 3 假设，N_1 在 G 中或半正规或 C- 正规. 若 N_1 在 G 中半正规，即有 $B \in S_G(N_1)$ 使 $G = N_1B$. 由于 $G = N \rtimes M$，M 为 G 的 p'-$Hall$ 子群. 又因 G 可解，得 B 也可解，故 B 有 p'-$Hall$ 子群，它也是 G 的 p'-$Hall$ 子群. 根据文献[3]P. Hall 定理的性质 1 和文献[1]，可设 $M < B$，即有 $N_1M < G$，由于 $M <\cdot\, G$，故 $N_1M = M$，即 $N_1 \leqslant M$. 所以 $N_1 \leqslant M \cap N = 1$，即 $N_1 = 1$，所以 $|N| = p$. 若 N_1 在 G 中 C- 正规，由 C- 正规的等价性定义，存在 $K \trianglelefteq G$ 使 $G = N_1K$ 且 $N_1 \cap K \trianglelefteq G$. 由 $N \ntrianglelefteq N_1 \cap K$ 及 N 的唯一极小正规性得 $N_1 \cap K = 1$. 又因 $N \leqslant K$，所以 $N_1 = N_1 \cap K = 1$，从而 $|N| = p$. 总之 $|N| = p$. 于是由 G/N 超可解，N 是素数阶循环群，得 G 超可解，与 G 是极小反例矛盾. 综上所述，反例不存在，从而定理 3 得证.

推论 3[4]　若群 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中，或者 C- 正规或者半正规，则 G 超可解.

参考文献：

[1] 苏向盈. 有限群的半正规子群[J]. 数学杂志，1988，8(1)：5-9.

[2] WANG Y. C- normality of groups and its properties[J]. J of Algebra，1996，180：954-965.

[3] 徐明曜. 有限群导引(上，下)[M]. 北京：科学出版社，1999.

[4] 曾凡辉. 半正规、C-正规与有限群的超可解性[J]. 广西科学，2003，10(2)：81-85.

（责任编辑：邓大玉）