广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(4)：271～275

有限存储容量的采购生产存贮模型*

A Procurement-production Inventory Model under Limited Storage Capacity

莫降涛，程云龙，朱彦利，李　娟

MO Jiang-tao, CHENG Yun-long, ZHU Yan-li, LI Juan

(广西大学数学与信息科学学院，广西南宁　530004)

(School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要：考虑仓库容量有限、产品允许缺货的原料采购、产品生产与存贮问题，针对原料的供应速率大于或小于其消耗速率这两种情况，分别建立相应的原料采购、产品生产与存贮的数学模型，求出租借仓库时的最优生产周期公式，并给出经济采购生产批量公式(EPPQ)，推广了已有文献的结果.

关键词：数学模型　经济生产批量　采购　生产周期

中图法分类号：O227　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2006)04-0271-05

Abstract: In this paper, we consider the procurement-production inventory problem with allowing shortages under limited storage capacity. According to the material supplying rate which is greater/less than consumption rats, two models are presented. For both cases, we characterise the optimal period of production and the economic procurement-production quantity which extend the presented results.

Key words: mathematical model, economic production quantity, procurement, cycle

采购、生产和存贮管理是企业生产经营管理的重要环节. 一方面，为了降低生产装配费，企业常常用批量生产的方式来组织生产；另一方面，由于仓库容量有限，当需存贮更多的产品时，必须租借仓库，导致存贮费的增加. 因此，在批量生产与租借仓库之间权衡，选择一个最优生产周期，使总费用最小，成为企业管理者的一个重要决策. 文献[1～3]考虑仓库容量有限时的存贮模型，推广了文献[4]的经济订购批量公式(EOQ)；文献[5～9]讨论生产存贮模型，得到租借仓库时的经济生产批量公式(EPQ)；文献[10,11]分析了原料即时供应、产品不允许缺货时的采购生产存贮问题. 但实际生活中，原料可能是以一定的速率到达(例如装配车间所需的半成品常常是按一定的速率进行生产)，产品可能缺货，所以考虑原料的供应速率和产品缺货，具有一定的实际意义. 本文对文献[11]的模型进行推广，假设原料以一定的速率供应，产品允许缺货，仓库容量有限，建立租借仓库时的采购生产存贮模型，给出经济采购生产批量公式(EPPQ).

1　模型 1：原料供应率大于其消耗率的情形

在这个模型中，我们假定仓库容量有限，需租借原料和产品仓库. 基于这样的假设，我们构建了一个原料供应率大于其消耗率，产品允许缺货的采购生产存贮模型. 构建模型的目的是确定周期 T 和产品生产策略以及原料订购策略，使在周期 $[0,T]$ 内，单位时间的总费用最小. 为此我们作如下的假设：

假设 1　市场对产品的需求是连续、均匀的，需求率为 D；

假设 2　产品允许缺货(缺货完全补足)，最大缺货量为 B_0；

假设 3　产品连续均匀生产，生产率为 $P(P > D)$；

假设 4　原料连续均匀供应，供应率为 R，生产单位产品需 α 单位的原料，故原料消耗率为 αP，且设

收稿日期：2006-06-05

作者简介：莫降涛(1963-)，男，副教授，主要从事运筹学理论与方法，供应链模型与优化方面的教学和研究工作。

*广西自然科学基金项目(0542043)资助。

$R > \alpha P$. 在产品生产期间，原料不允许缺货；

假设 5 每个周期订购一次原料，生产一次产品，原料固定订购费为 c_0，固定生产装配费为 c_1；

假设 6 使用自己的原料（产品）仓库时，单位原料（产品）在单位时间的存贮费为 $c_2(c'_2)$，使用租借原料（产品）仓库时，单位原料（产品）在单位时间的存贮费为 $c_3(c'_3)$，其中 $c_2 < c_3, c'_2 < c'_3$；单位产品在单位时间的缺货费为 c_4；

假设 7 自己原料（产品）仓库的最大容量为 $q_0(Q_0)$，原料（产品）的最大库存量为 $q_{\max}(Q_{\max})$；

假设 8 原料和产品存贮时，首先存满自己原料仓库和产品仓库，再存租借仓库；使用时，首先使用租借仓库，再使用自己仓库.

1.1 模型 1 的建立

假设生产从 t_1 时刻开始到 t_2 时刻结束. 由于原料供应速率大于其消耗率，所以不用提前订购原料，即从 t_1 时刻开始供应原料，假设在 t_7 时刻停止供应原料，则产品和原料的存贮状态图可用图 1 和图 2 表示.

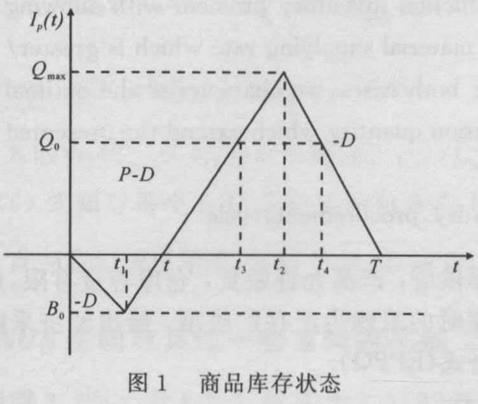

图 1 商品库存状态

Fig. 1 Graphical reprentation of the product inventory system

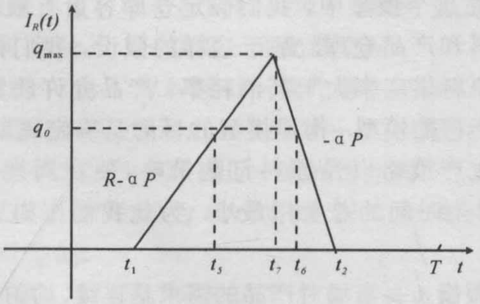

图 2 原料库存状态

Fig. 2 Graphical reprentation of the material inventory system

根据产品存贮状态图可知下列关系式成立：

$$B_0 = Dt_1 = (P - D)(t - t_1),$$

$$Q_{\max} = (P - D)(t_2 - t) = D(T - t_2).$$

从上 2 式可得：

$t_1 = \dfrac{P - D}{P}t, t_2 = \dfrac{D}{P}T + \dfrac{P - D}{P}t, Q_{\max} = B(T - t)$，其中 $B = \dfrac{(P - D)D}{P}$，于是，$t_4 - t_3 = \dfrac{Q_{\max} - Q_0}{P - D} + \dfrac{Q_{\max} - Q_0}{D} = T - t - \dfrac{Q_0}{B}$.

又由于原料的总需求量为 αDT，所以原料的供应时间为 $\alpha DT/R$，则

$q_{\max} = (R - \alpha P)\dfrac{\alpha DT}{R} = \dfrac{ADT}{P}, t_6 - t_5 = \dfrac{q_{\max} - q_0}{R - \alpha P} + \dfrac{q_{\max} - q_0}{\alpha P} = \dfrac{D}{P}T - \dfrac{q_0}{A}$，其中 $A = \alpha P(R - \alpha P)/R$.

因此，在 $[0, T]$ 内，原料在自己仓库和租借仓库的存贮费为：

$$I_1(T,t) = \frac{1}{2}c_2[(t_6 - t_5) + (t_2 - t_1)]q_0 = c_2\left(\frac{Dq_0}{P}T - \frac{q_0^2}{2A}\right),$$

$$I_2(T,t) = \frac{1}{2}c_3(q_{\max} - q_0)(t_6 - t_5) = c_3\left(\frac{AD^2}{2P^2}T^2 - \frac{Dq_0}{P}T + \frac{q_0^2}{2A}\right).$$

产品在自己仓库和租借仓库的存贮费为：

$$I_3(T,t) = \frac{1}{2}c'_2[(t_4 - t_3) + (T - t)]Q_0 = c'_2\left[Q_0(T - t) - \frac{Q_0^2}{2B}\right],$$

$$I_4(T,t) = \frac{1}{2}c'_3(Q_{\max} - Q_0)(t_4 - t_3) = c'_3\left[\frac{B}{2}(T - t)^2 - Q_0(T - t) + \frac{Q_0^2}{2B}\right]$$

产品缺货费为：

$$S_5(T,t) = \frac{1}{2}c_4 B_0 t = \frac{1}{2}c_4 Dt_1 t = \frac{1}{2}c_4 Bt^2.$$

在 $[0, T]$ 内，原料和产品的单位时间的总费用为：

$$C(T,t) = [c_0 + c_1 + I_1(T,t) + I_2(T,t) + I_3(T,t) + I_4(T,t) + S_5(T,t)]/T.$$

因此，我们所考虑的问题变为：求 T 和 t，使单位时间的总费用 $C(T,t)$ 最小，其数学模型是：

$$\min C(T,t), \tag{1}$$

优化问题(1) 的解 T^* 是最优生产周期.

1.2 模型 1 的求解

定理 1 在租借仓库的采购生产存贮模型 1 中，单位时间的总费用函数 $C(T,t)$ 是 T, t 的凸函数，且最优周期为：

$$T^* = \sqrt{\frac{2\left[c_0 + c_1 + \frac{(c_3 - c_2)q_0^2}{2A} + \frac{(c'_3 - c'_2)(c'_2 + c_4)Q_0^2}{2(c'_3 + c_4)B}\right]}{\frac{c_3 AD^2}{P^2} + \frac{c'_3 c_4 B}{c'_3 + c_4}}}. \tag{2}$$

证明 令 $M=[c_0+c_1+(c_3-c_2)q_0^2]/(2A)$, $N=(c'_3-c'_2)Q_0^2/(2B)$,则

$$C(T,t)=\frac{1}{T}\{M+N+c_3\frac{AD^2}{2P^2}T^2-(c_3-c_2)\frac{Dq_0}{P}T-(c'_3-c'_2)Q_0(T-t)+c'_3\frac{B}{2}(T-t)^2+\frac{1}{2}c_4Bt^2\}.$$

分别对变量 T,t 求偏导得:

$$\partial C(T,t)/\partial T=\{[\frac{c_3AD^2}{2P^2}+\frac{1}{2}c'_3B]T^2-\frac{1}{2}(c'_3+c_4)B^2t-(c'_3-c'_2)Q_0t-M-N\}/T^2, \qquad (3)$$

$$\partial C(T,t)/\partial t=[(c'_3-c'_2)Q_0-c'_3BT+(c'_3+c_4)Bt]/T, \qquad (4)$$

$$\partial C^2(T,t)/\partial T^2=[(c'_3+c_4)Bt^2+2(c'_3-c'_2)Q_0t+2(M+N)]/T^3>0,$$

$$\partial C^2(T,t)/\partial t^2=(c'_3+c_4)B/T>0,$$

$$\partial C^2(T,t)/\partial t\partial T=\partial C^2(T,t)/\partial T\partial t=-(c'_3-c'_2)Q_0+(c'_3+c_4)Bt/T^2.$$

设 H 为 $C(T,t)$ 的 Hesse 阵,H_{11} 为 H 的一阶顺序主子式的行列式,H_{22} 为 H 的二阶顺序主子式的行列式,于是有:

$$H_{11}=\partial^2C(T,t)/\partial T^2>0,$$

$$H_{22}=\partial^2C(T,t)/\partial T^2\times\partial^2C(T,t)/\partial t^2-[\partial^2C(T,t)/\partial t\partial T]^2=[2(M+N)(c'_3+c_4)B-(c'_3-c'_2)^2Q_0^2]/T^4=[2M(c'_3+c_4)B+(c'_3-c'_2)(c'_2+c_4)Q_0^2]/T^4>0.$$

所以 $C(T,t)$ 是 T,t 的凸函数. 令(3),(4)式等于零,解方程组得最优周期 T^*.

由定理1得:最优周期为 T^*,而在一个最优周期内,产品的产量为 $Q_2^*=DT^*$,生产时间为 $T_1^*=\frac{Q_2^*}{P}$,产品的最大库存量为 $Q_{\max}^*=B[\frac{c_4}{c'_3+c_4}T^*+\frac{c'_3-c'_2}{(c'_3+c_4)B}Q_0]$,原料的订购量为 $Q_1^*=\alpha Q_2^*$,原料的最大库存量为 $q_{\max}^*=ADT^*/P$.

下面,我们考虑原料及时供应和产品不允许缺货情形. 此时,相当于原料供应率 R 和单位缺货费 c_4 为无穷大. 令 $R\to\infty$ 和 $c_4\to\infty$,并利用 $A=\alpha P(R-\alpha P)/R$ 和 $B=\frac{(P-D)D}{P}$ 及(2)式得:

$$T^*=\sqrt{\frac{2P^2[c_0+c_1+\frac{(c_3-c_2)q_0^2}{2P_1}+\frac{P(c'_3-c'_2)}{2D(P-D)}Q_0^2]}{c_3P_1D^2+c'_3PD(P-D)}};$$

$$T_1^*=\sqrt{\frac{2D[c_0+c_1+\frac{(c_3-c_2)q_0^2}{2P_1}+\frac{P(c'_3-c'_2)}{2D(P-D)}Q_0^2]}{c_3DP_1+c'_3P(P-D)}};$$

$$Q_1^*=\sqrt{\frac{2DP_1^2[c_0+c_1+\frac{(c_3-c_2)q_0^2}{2P_1}+\frac{P(c'_3-c'_2)}{2D(P-D)}Q_0^2]}{c_3DP_1+c'_3P(P-D)}};$$

$$Q_2^*=\sqrt{\frac{2DP^2[c_0+c_1+\frac{(c_3-c_2)q_0^2}{2P_1}+\frac{P(c'_3-c'_2)}{2D(P-D)}Q_0^2]}{c_3DP_1+c'_3P(P-D)}},$$

其中 $P_1=\alpha P$;

$$Q_{\max}^*=\frac{(P-D)D}{P}T^*=\frac{(P-D)}{P}Q_2^*.$$

这与文献[11]的结果是一致的,因此模型1是文献[11]的模型的推广.

2 模型2:原料供应率小于其消耗率的情形

2.1 模型2的建立

当假设4改为原料供应率 $R<\alpha P$,其它假设不变时. 由于在生产过程中,不允许原料缺货,故在产品开始生产之前就应提前采购原料. 但为了降低原料的存贮,应在生产结束时,停止供应原料,且存贮量恰好降为零. 设在 t_0 时刻开始订购原料,则原料的存贮状态图如图3所示.

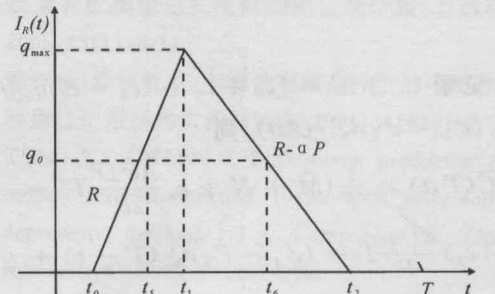

图3 原料的存贮状态

Fig. 3 Graphical reprentation of the material inventory system

由于原料的供应时间为 $\alpha DT/R$,由以上分析可知原料开始供应时间

$$t_0=t_2-\frac{\alpha DT}{R}=\frac{P-D}{P}t-\frac{(\alpha P-R)D}{PR}T,$$

又根据存贮状态图3得:$q_{\max}=R(t_1-t_0)$,于是,

$$q_{\max}=\frac{(\alpha P-R)D}{P}T=\frac{\alpha\widetilde{A}DT}{R},\quad t_6-t_5=\frac{q_{\max}-q_0}{R}+\frac{q_{\max}-q_0}{\alpha P-R}=\frac{\alpha D}{R}T-\frac{q_0}{\widetilde{A}}.$$

其中 $\widetilde{A}=(\alpha P-R)R/(\alpha P)$.

因此,在$[0,T]$内,原料在自己仓库和租借仓库

的存贮费为：

$\tilde{I}_1(T,t) = \frac{1}{2}c_2[(t_6 - t_5) + (t_2 - t_0)]q_0 = c_2[\frac{\alpha D q_0}{R}T - \frac{q_0^2}{2\tilde{A}}]$，

$\tilde{I}_2(T,t) = \frac{1}{2}c_3(q_{\max} - q_0)(t_6 - t_5) = c_3[\frac{\tilde{A}\alpha^2 D^2}{2R^2}T^2 - \frac{D\alpha q_0}{R}T + \frac{q_0^2}{2\tilde{A}}]$.

在$[0,T]$内，原料和产品的单位时间的总费用为：

$\tilde{C}(T,t) = [c_0 + c_1 + \tilde{I}_1(T,t) + \tilde{I}_2(T,t) + I_3(T,t) + I_4(T,t) + S_5(T,t)]/T$.

因此，我们所考虑的问题变为：求 T 和 t，使单位时间的总费用 $\tilde{C}(T,t)$ 最小，其数学模型是：

$$\min \tilde{C}(T,t), \tag{5}$$

优化问题(5)的解 $\tilde{T}^*$ 是最优生产周期.

2.2 模型2的求解

定理2 在租借仓库的采购生产存贮模型2中，单位时间的总费用函数 $\tilde{C}(T,t)$ 是 T,t 的凸函数，且最优周期为：

$$\tilde{T}^* = \sqrt{\frac{2[c_0 + c_1 + \frac{(c_3 - c_2)q_0^2}{2\tilde{A}} + \frac{(c'_3 - c'_2)(c'_2 + c_4)Q_0^2}{2(c'_3 + c_4)B}}{\frac{c_3\tilde{A}\alpha^2 D^2}{R^2} + \frac{c'_3 c_4 B}{c'_3 + c_4}}}, \tag{6}$$

证明 令 $\tilde{M} = [c_0 + c_1 + (c_3 - c_2)q_0^2]/(2\tilde{A})$，$N = (c'_3 - c'_2)Q_0^2/(2B)$，则

$\tilde{C}(T,t) = \frac{1}{T}\{\tilde{M} + N + c_3\frac{\tilde{A}\alpha^2 D^2}{2R^2}T^2 - (c_3 - c_2)\frac{\alpha D q_0}{R}T - (c'_3 - c'_2)Q_0(T - t) + \frac{1}{2}c'_3 B(T - t)^2 + \frac{1}{2}c_4 B t^2\}$，

分别对变量 T,t 求偏导得：

$$\partial\tilde{C}(T,t)/\partial T = \{[\frac{c_3\tilde{A}\alpha^2 D^2}{2R^2} + \frac{1}{2}c'_3 B]T^2 - \frac{1}{2}(c'_3 + c_4)Bt^2 - (c'_3 - c'_2)Q_0 t - \tilde{M} - N\}/T^2, \tag{7}$$

$$\partial\tilde{C}(T,t)/\partial t = [(c'_3 - c'_2)Q_0 - c'_3 BT + (c'_3 + c_4)Bt]/T, \tag{8}$$

$\partial\tilde{C}^2(T,t)/\partial T^2 = [(c'_3 + c_4)Bt^2 + 2(c'_3 - c'_2)Q_0 t + 2(\tilde{M} + N)]/T^3 > 0$,

$\partial\tilde{C}^2(T,t)/\partial t^2 = (c'_3 + c_4)B/T > 0$,

$\partial\tilde{C}^2(T,t)/\partial t\partial T = \partial\tilde{C}^2(T,t)/\partial T\partial t = -[(c'_3 - c'_2)Q_0 + (c'_3 + c_4)Bt]/T^2$.

设 H 为 $\tilde{C}(T,t)$ 的 Hesse 阵，H_{11} 为 H 的一阶顺序主子式的行列式，H_{22} 为 H 的二阶顺序主子式的行列式，则

$H_{11} = \partial^2\tilde{C}(T,t)/\partial T^2 > 0$,

$H_{22} = \partial^2\tilde{C}(T,t)/\partial T^2 \times \partial^2\tilde{C}(T,t)/\partial t^2 - [\partial^2\tilde{C}(T,t)/\partial t\partial T]^2 = [2(\tilde{M} + N)(c'_3 + c_4)B - (c'_3 - c'_2)^2 Q_0^2]/T^4 = [2\tilde{M}(c'_3 + c_4)B + (c'_3 - c'_2)(c'_2 + c_4)Q_0^2]/T^2 > 0$.

所以 $\tilde{C}(T,t)$ 是 T,t 的凸函数. 令(7)，(8)式等于零，解方程组得最优周期 $\tilde{T}^*$.

由定理2可推出：在一个最优周期 $\tilde{T}^*$ 内，产品的生产量为 $\tilde{Q}_2^* = D\tilde{T}^*$，生产时间为 $\tilde{T}_1^* = \frac{D\tilde{T}^*}{P}$，产品的库存量为 $\tilde{Q}_{\max}^* = B[\frac{c_4}{c'_3 + c_4}\tilde{T}^* + \frac{c'_3 - c'_2}{(c'_3 + c_4)B}Q_0]$，原料的订购量为 $\tilde{Q}_1^* = \alpha\tilde{Q}_2^*$，原料的最大库存量为 $\tilde{q}_{\max}^* = \alpha\tilde{A}D\tilde{T}^*/R$.

如果产品生产时间很短，存贮容量无限，不允许缺货时，相当于生产率 P 和单位缺货费 c_4 为无穷大，自己仓库的单位存贮费等于租借仓库的单位存贮费. 又由于在生产过程中原料不允许缺货，所以原料的供应率为无穷大. 令 $P \to \infty, R \to \infty, c_4 \to \infty, c'_2 = c'_3$，并利用 $\tilde{A} = \frac{(\alpha P - R)R}{\alpha P}$ 和 $B = \frac{(P - D)D}{P}$ 及(6)式得：

$$\tilde{T}^* = \sqrt{\frac{2(c_0 + c_1)}{c'_3 D}}, \tilde{Q}_2^* = \sqrt{\frac{2(c_0 + c_1)D}{c'_3}}.$$

这与文献[4]的经济订购批量公式(EOQ)一致.

3 算例分析

为了说明上述模型的有效性，设有一个生产系统，数据如下：$c_0 = 100$ 元/次，$c_1 = 1000$ 元/次，$c_2 = 0.2$ 元/天，$c_3 = 0.8$ 元/天，$c'_2 = 1$ 元/天，$c'_3 = 2$ 元/天，$c_4 = 5$ 元/件·天，$D = 10$ 件/天，$P = 30$ 件/天，$Q_0 = 80$ 单位，$\alpha = 2$ 单位. 对不同的原料供应率，其计算结果如表1所示。

将上述数据代入文献[11]的结果有：$T = 11.52$ 天，$Q_2 = 115$ 件，$Q_{\max} = 77$ 件，$Q_1 = 230$ 单位，$q_{\max} = 230$ 单位，$C = 161.20$ 元。由以上数据结果可知，当 $R > P_1$ 时，随着 R 的增大，单位时间的总费用逐渐增大，这是因为 R 越大，原料的库存量越大，库存时间越长，故库存费越高；当 $R < P_1$ 时，如果两者的相差程度较小，费用较低，反之较高，因为相差程度越小，提前订购的时间越短，原料库存量越小，库存费越低；但如果相差太大，此时可能引起原料供应不足，从而导致生产不能正常进行，所以费用较高.

表 1 两模型的优化结果

Table 1 Optimal results of the two models

	$R>P$			$R<P$			
	$R=100$	$R=200$	$R=1000$	$R=50$	$R=40$	$R=30$	$R=25$
生产周期 T^*（天）Production cycle T^* (days)	14.23	13.05	12.39	16.61	14.69	9	7
产品生产量 Q_2^*（件）Production quantity Q_2^* (units)	142	131	124	166	147	90	70
产品最大库存量 $Q_{\max}^*$（件）Maximum inventory quantity of product $Q_{\max}^*$ (units)	82	75	71	95	84	53	42
原料订购量 Q_1^*（单位）Ordering quantity of material Q_1^* (units)	285	261	247	332	294	180	140
原料最大库存量 $q_{\max}^*$（单位）Maximum inventory quantity of material $q_{\max}^*$ (units)	114	183	233	55	97	90	82
单位时间的总费用 C^*（元）Total cost per unit time C^* (yuan)	139.79	144.78	152.63	137.64	142.50	168.10	186.40

4 结束语

本文对原料的供应速率大于和小于其消耗速率这两种情况，分别建立了相应的原料采购、产品生产与存贮的数学模型，求出了租借仓库时的最优生产周期公式，并给出经济采购生产批量公式(EPPQ)，推广了已有的结果. 在模型中，我们同时考虑了原料供应率和存贮容量对存贮策略的影响，因而模型比较接近实际情况，具有一定的意义.

参考文献：

[1] 李温红. 仓库容量有限条件下的不允许缺货存贮模型[J]. 系统工程理论方法应用，1997，6(3)：68-71.

[2] ROY T K，MAITI M. A fuzzy EOQ model with demand-dependent unit cost under limited storage capacity[J]. European Journal of Operational Research，1997，99(2)：425-432.

[3] 刘德权. 仓库容量有限条件下的允许缺货存贮模型[J]. 空军雷达学院学报，2002，16(1)：22-23.

[4] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社，1998.

[5] 杨益民，付必胜. 仓库容量有限条件下的生产销售存贮模型[J]. 系统工程，2001，19(1)：18-23.

[6] 刘信斌，马良河. 生产与销售的库存模型[J]. 工科数学，2001，17(4)：70-73.

[7] 吴志丹，赵大宇. 库容有限且生产需一定时间的不允许缺货存贮模型[J]. 沈阳师范大学学报：自然科学版，2005，23(1)：8-11.

[8] 陈有禄，罗秋兰. 仓库容量有限条件下的一类存贮管理模型[J]. 数学的实践与认识，2004，34(6)：1-5.

[9] TENG J T，CHANG C T. Economic production quantity models for deteriorating Items with price-and stock-dependent demand [J]. Computers & Operations Research，2005，32(2)：297-308.

[10] 王昌福，周诚. 一类新的经济批量公式[J]. 数量经济技术经济研究，1999(10)：73-74.

[11] 杨益民，沙峰. 一类存贮模型及其最优存贮策略[J]. 数学的实践与识，2005，35(9)：28-33.

（责任编辑：韦廷宗）