具有免疫接种及饱和传染率的传染病模型分析*

Analysis of an Infectious Disease Model with Immunization Vaccination and Saturating Infect Rate

徐为坚[1]，陈时东[2]

XU Wei-jian[1]，CHEN Shi-dong[2]

（1.玉林师范学院数学与计算机科学系，广西玉林 537000；2.玉林师范学院物理与信息科学系，广西玉林 537000）

（1. Department of Mathematics and Computer Science，Yulin Teachers' College，Yulin，Guangxi，537000，China；2. Department of Physics and Information Science，Yulin Teachers' College，Yulin，Guangxi，537000，China）

摘要：分析具有免疫接种、免疫消除、无出生死亡及饱和传染率的传染病模型，得到模型的无病平衡点及地方病平衡点全局渐近稳定的条件.

关键词：数学模型　平衡点　全局渐近稳定　传染病

中图法分类号：O175　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)04-0261-03

Abstract：Infectious disease model with Immunization Vaccination，Immunization elimination，naught birth and death，saturating infect rate are analyzed. And then the conditions on the global asymptotic stability of the non-disease equilibrium and local disease's equilibrium are obtained.

Key words：mathematical model，equilibrium，global asymptotic stability，infectious disease

传染病历来是危害人类健康的大敌，历史上传染病一次又一次的流行给人类的生存和国计民生带来了巨大的灾难.长期以来，人类与各种传染病进行了不屈不饶的斗争，在传染病的防治中取得了不少成功的经验和方法.其中，预防接种就是一种控制传染病的有效方法，它在人类征服传染病的进程中发挥了极大作用(如对天花、流感、乙型肝炎等疾病的防治).接种的目的是使易感人群的数量降低，防止疾病流行，使疾病不能形成地方病.因此，免疫接种模型的研究对传染病的防治有重要的指导意义.

利用动力学的方法来建立传染病的数学模型，并通过模型对传染病进行定性、定量分析，这是研究传染病的一种重要方法，通过对模型动力学性态的研究，可以揭示疾病的流行规律，预测疾病变化发展的趋势，分析其流行的原因，寻求对疾病预防和控制的最优策略，为人们制定预防决策提供理论依据[1,2].早在1927年，Kermack 和 Mckendrick[3]首先利用动力学的方法来建立传染病的数学模型，这个模型基于3个假设：①假设总人数是常数 N，不因时间变化而改变；②假设易感者由于受传染病的影响，其人数随时间而变化的变化率与当时易感者的人数和当时染病者人数之积成正比；③假设从染病者类转到消除类的速度与当时染病者类的人数成正比.若设传染率系数为 β，移出率系数为 r，则在 t 时刻单位时间内被所有病人传染的人数为 $\beta S(t)I(t)$，单位时间内移出者的数量为 $rI(t)$，于是得到传染病的 KM-SIR 模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta SI,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-rI, S+I+R=N,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=rI,\end{cases}$$

其中 $S(t)$、$I(t)$ 与 $R(t)$ 分别表示易感者、染病者和消除类者的人数，β、r 为正常数.此模型在一定的条件下(人口数量较小时)是合理的.但当人口数量很大时，一个病人在单位时间内传染的人数 βS 随 S 的增加呈直线无限增加，这不符合实际情况，因为易感者人数再多，一个病人与他人的接触能力在单位时间内总是有限的，所以受接触能力的限制，传染力总有一

收稿日期：2006-06-14

作者简介：徐为坚(1956-)，女，广西贵港人，副教授，主要从事生物数学研究。

＊国家自然科学基金资助项目(10471117)和广西教育厅科研项目(200510211)联合资助。

个饱和状态.因此研究具有饱和接触率或饱和传染率的传染病模型,更符合实际情况.文献[4]给出了饱和接触率为$U(N)=\dfrac{\alpha N}{1+\omega N}$的模型,文献[5]研究了具有饱和接触率为$q(I)=\dfrac{\beta I^2}{1+\alpha I^2}$的SIR模型并给出了疾病消除平衡态的局部与全局渐近稳定性.本文研究具有免疫接种、免疫消除、无出生死亡及饱和传染率$p(S)=\dfrac{\beta S}{1+\alpha S}$的SIR模型,得到了无病平衡点及地方病平衡点全局渐近稳定的条件,为选择接种率预防与控制传染病的流行,提供理论依据.

1 模型及其平衡点

设$S(t)$、$I(t)$和$R(t)$分别表示时刻t时易感者、染病者和消除者的人数;θ为接种率,接种后单位时间内有θS个易感者具有免疫力;r为移出率系数,单位时间内有rI个病人康复;ω为免疫丧失率,单位时间内康复者中有ωR人丧失免疫力而重新成为易感者,并设总人数为1(否则作适当变换可得),则具有免疫接种、免疫消除、无出生死亡及饱和传染率$p(S)=\dfrac{\beta S}{1+\alpha S}$的KM-SIR模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\dfrac{\beta SI}{1+\alpha S}-\theta S+\omega R,\\ \dfrac{dI}{dt}=\dfrac{\beta SI}{1+\alpha S}-rI,\\ \dfrac{dR}{dt}=rI+\theta S-\omega R,\end{cases}\qquad(1)$$

其中$S+I+R=1$,α、β、θ、ω、r均为正常数.

由$S+I+R=1$,即$R=1-S-I$,则(1)式转化为

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\dfrac{\beta SI}{1+\alpha S}-(\theta+\omega)S-\omega I+\omega,\\ \dfrac{dI}{dt}=\dfrac{\beta SI}{1+\alpha S}-rI,\end{cases}\qquad(1')$$

作时间变换$dt=(1+\alpha S)d\tau$,(1′)式化为

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{d\tau}=-\beta SI-(\theta+\omega)S(1+\alpha S)+\\ \qquad\omega(1-I)1+\alpha S),\\ \dfrac{dI}{d\tau}=\beta SI-rI(1+\alpha S).\end{cases}\qquad(2)$$

作无量纲变换 $S=\dfrac{\bar{S}}{\alpha}$,$I=\dfrac{r\bar{I}}{\alpha\omega}$,$\tau=\dfrac{\bar{\tau}}{r}$,并记$\bar{S}=x$,$\bar{I}=y$,$\bar{\tau}=t$,得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-(ax+1)y+(c-bx)(1+x)\equiv\\ \qquad P(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=(dx-1)y\equiv Q(x,y),\end{cases}\qquad(3)$$

其中$a=\dfrac{\beta}{\alpha\omega}+1$,$c=\dfrac{\alpha\omega}{r}$,$b=\dfrac{\theta+\omega}{r}$,$d=\dfrac{\beta-r\alpha}{r\alpha}$.

定理1 (i)当$d\leqslant\dfrac{b}{c}$时,(3)式只有无病平衡点$E_0(\dfrac{c}{b},0)$;

(ii)当$d>\dfrac{b}{c}$时,(3)式除无病平衡点E_0外,还存在唯一的地方病平衡点$E(x^*,y^*)$,其中$x^*=\dfrac{1}{d}$,$y^*=\dfrac{(cd-b)(d+1)}{d(a+d)}$.

证明 令

$\begin{cases}-(ax+1)y+(c-bx)(1+x)=0\\ (dx-1)y=0\end{cases}$,求得解为

$x=\dfrac{c}{b}$,$y=0$;$x=\dfrac{1}{d}$,$y=\dfrac{(cd-b)(d+1)}{d(a+d)}$.

因为$d+1=(\dfrac{\beta}{r\alpha}-1)+1=\dfrac{\beta}{r\alpha}>0$,$a+d=(\dfrac{\beta}{\alpha\omega}+1)+(\dfrac{\beta}{r\alpha}-1)=\dfrac{\beta}{\alpha\omega}+\dfrac{\beta}{r\alpha}>0$,所以要$\dfrac{1}{d}>0$,$\dfrac{(cd-b)(d+1)}{d(a+d)}>0$,必须$cd-b>0$,即$d>\dfrac{b}{c}$,故当$d\leqslant\dfrac{b}{c}$(即$\dfrac{c}{b}\leqslant\dfrac{1}{d}$)时,(3)式只有无病平衡点$E_0(\dfrac{c}{b},0)$;

当$d>\dfrac{b}{c}$(即$\dfrac{c}{b}>\dfrac{1}{d}$)时,(3)式除无病平衡点$E_0$外,还存在唯一的地方病平衡点$E(x^*,y^*)$,其中$x^*=\dfrac{1}{d}$,$y^*=\dfrac{(cd-b)(d+1)}{d(a+d)}$.

2 平衡点的局部渐近稳定性

由$S+I\leqslant1$,显然有

定理2 集合$D=\{(x,y)|x\geqslant0,y\geqslant0,\omega x+ry\leqslant\alpha\omega\}$是(3)式的正向不变集.

定理3 (i)当$d<\dfrac{b}{c}$时,无病平衡点$E_0(\dfrac{c}{b},0)$是局部渐近稳定的;

(ii)当$d>\dfrac{b}{c}$时,E_0是不稳定的;地方病平衡点$E(x^*,y^*)$是局部渐近稳定的,其中$x^*=\dfrac{1}{d}$,$y^*=\dfrac{(cd-b)(d+1)}{d(a+d)}$.

证明 由$\dfrac{\partial P}{\partial x}=(c-b)-ay-2bx$,$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-(ax+1)$,$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=dy$,$\dfrac{\partial Q}{\partial y}=(dx-1)$,

(i)当$d<\dfrac{b}{c}$时,在$E_0(\dfrac{c}{b},0)$处特征方程为$f(\lambda)=(-b-c-\lambda)(\dfrac{dc}{b}-1-\lambda)$,得特征根$\lambda_1=-(b+c)<0$,$\lambda_2=\dfrac{dc}{b}-1<\dfrac{c}{b}\dfrac{b}{c}-1=0$,从而无病平衡点$E_0(\dfrac{c}{b},0)$是局部渐近稳定的;

(ii) 当 $d > \frac{b}{c}$ 时，在 $E_0(\frac{c}{b},0)$ 处，特征根 $\lambda_1 = -(b+c) < 0, \lambda_2 = \frac{dc}{b} - 1 > \frac{c}{b}\frac{b}{c} - 1 = 0$，从而无病平衡点 $E_0(\frac{c}{b},0)$ 为不稳定的鞍点；

在 $E(x^*,y^*)$ 处，其中 $x^* = \frac{1}{d}, y^* = \frac{(cd-b)(d+1)}{d(a+d)}$. 特征方程 $f(\lambda) = [(c-b) - ay^* - 2bx^* - \lambda][(dx^* - 1) - \lambda] + (ax^* + 1)dy^* = \lambda^2 + [ay^* + (2b-d)x^* + 1 + b - c]\lambda + (a + 1 + x^*)dy^* = \lambda^2 + p\lambda + q$，因为 $p = ay^* + (2b - d)x^* + 1 + b - c = \frac{cd^2(a-1) + 2ab + 2db + db^2}{d(a+d)}$，而 $a - 1 = (\frac{\beta}{\alpha\omega} + 1) - 1 = \frac{\beta}{\alpha\omega} > 0$，$a+d,b,c,d$，均为正常数，所以 $p > 0$，又 $q = (a + 1 + x^*)dy^* > 0$，故两特征根具有负实部，从而地方病平衡点 $E(x^*,y^*)$ 是局部渐近稳定的.

3 平衡点的全局渐近稳定性

定理 4 (i) 当 $d < \frac{b}{c}$ 时，无病平衡点 $E_0(\frac{c}{b},0)$ 是全局渐近稳定的；

(ii) 当 $d > \frac{b}{c}$ 时，地方病平衡点 $E(x^*,y^*)$ 是全局渐近稳定的，其中 $x^* = \frac{1}{d}, y^* = \frac{(cd-b)(d+1)}{d(a+d)}$.

证明 (i) 当 $d < \frac{b}{c}$ 时，$E_0(\frac{c}{b},0)$ 是(3)式的唯一平衡点，又由定理 3，E_0 是局部渐近稳定的，由定理 2，(3)式的一切初值在区域 $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, \omega x + ry \leqslant \alpha\omega\}$ 内的正半轨线有界，故无病平衡点 $E_0(\frac{c}{b},0)$ 是全局渐近稳定的.

(ii) 当 $d > \frac{b}{c}$ 时，在区域 $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, \omega x + ry \leqslant \alpha\omega\}$ 内，取 Dulac 函数 $B(x,y) = x^{-1}y^{-1}$，则

$BP = -\frac{ax+1}{x} + \frac{(c-bx)(1+x)}{xy}, BQ = \frac{dx+1}{x}, \frac{\partial(BP)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 y}(-bx^2 - c) = \frac{1}{x^2}[1 - \frac{1}{y}(bx^2 + c)] \leqslant \frac{1}{x^2}(1 - \frac{c}{y}) \leqslant \frac{1}{x^2}(1 - \frac{\alpha\omega}{r}\frac{r}{\alpha\omega}) = 0$，$\frac{\partial(BQ)}{\partial y} = 0$，于是发散量 $\mathrm{div} = \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0$，$((x,y) \in D)$，且 div 不在单连通区域 D 的任一子区域内恒为零，所以由 Bendixsen-Dulac 判别法[6] 知，(3) 式在区域 D 内不存在极限环. 又由定理 3，$E(x^*,y^*)$ 是局部渐近稳定的.

同时由定理 2 知，(3) 式的一切初值在区域 D 内的正半轨线有界，从而 $E(x^*,y^*)$ 在区域 D 内是全局渐近稳定的.

4 结论

由上述讨论我们知道，当 $d < \frac{b}{c}$ 时，(3) 式有全局渐近稳定的无病平衡点 $E_0(\frac{c}{b},0)$；当 $d > \frac{b}{c}$，(3) 式有全局渐近稳定的正平衡点 $E(\frac{1}{d}, \frac{(cd-b)(d+1)}{d(a+d)})$. 即当 $R_0 = \frac{\omega(\beta - r\alpha)}{r(\theta+\omega)} < 1$ 时，系统 (1′) 式有全局渐近稳定的无病平衡点 $E_0(\frac{\omega}{\theta+\omega},0)$，这时疾病消除；当 $R_0 = \frac{\omega(\beta - r\alpha)}{r(\theta+\omega)} > 1$ 时，(1′) 式有全局渐近稳定的地方病平衡点 $E(\frac{r}{\beta - \alpha r}, \frac{\omega(\beta - \alpha r) - r(\theta+\omega)}{(\beta - \alpha r)(r+\omega)})$，疾病流行而成为地方病. 说明 $R_0 = \frac{\omega(\beta - r\alpha)}{r(\theta+\omega)} = 1$ 是疾病消除与否的阈值.

记 $\theta^* = \omega(\frac{\beta - r\alpha}{r} - 1)$，则所得结果表明：当接种率 $\theta > \theta^*$ 时疾病将会消失；当接种率 $\theta < \theta^*$，或不接种($\theta = 0$)时，疾病将成为地方病.

因此，在实际的疾病防控工作中，我们可以选择适当接种率使疾病消除. 可见本文的结果对传染病的防治与控制，有理论和实际上的指导意义.

致谢：

衷心感谢中国科学院博士生导师、研究员陈兰荪教授的悉心指导。

参考文献：

[1] 陈兰荪，陈键. 非线性生物动力系统[M]. 北京：科学出版社，1993.

[2] 马知恩，周义仓，王稳地，等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京：科学出版社，2004.

[3] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics[J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A, 1927, 115: 700-721.

[4] DIETZ K. Overall population patterns in the transmission cycle of infection disease agents[M]//Anderson R M, May R M. Population Biology of Infectious Disease. Berlin: Springer, 1982: 87-102.

[5] RUAN SHIGUI, WANG WENDI. Dynamical behavior of an epidemic mode with a nonlinear incidence rate[J]. Diff Equat, 2003, 188(1): 135-163.

[6] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2001: 158-159.

(责任编辑：韦廷宗)