广西科学 Guangxi Sciences 2006,13(4):255~260

具有脉冲效应的 Holling Ⅲ 系统的动力行为*

Analysis of a Holling Type Ⅲ Predator System with Impulsive Effect

李祖雄,黄健民,陈　飞

LI Zu-xiong,HUANG Jian-min,CHEN Fei

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林　541004)

(Mathematics Science College,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:通过周期性释放天敌和化学控制的综合害虫管理(IPM)改进捕食者具有 Holling Ⅲ 型功能性反应系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=ax(t)-bx^2(t)-\dfrac{\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2},\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=-cy(t)+\dfrac{k\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2}.\end{cases}$$

得到一个新的系统:

$$\left.\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=ax(t)-bx^2(t)-\dfrac{\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2},\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=-cy(t)+\dfrac{k\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2}.\end{cases}\right\}t\neq nT,\ \left.\begin{cases}\Delta x(t)=-p_1x(t),\\ \Delta y(t)=-p_2y(t)+q.\end{cases}\right\}t=nT.$$

给出当 $q>0,0\leqslant p_1<1,0\leqslant p_2<1$ 时,新系统的害虫周期全局渐近稳定性与新系统的持续生存条件.研究当 $q>0,0\leqslant p_1<1,0\leqslant p_2<1$ 时,新系统正周期解的存在性和当 $q\equiv 0,0<p_1<1,0\leqslant p_2<1$ 时,无捕食者周期解的存在性和稳定性.

关键词:Holling Ⅲ类功能反应　脉冲效应　全局渐近稳定性　持续生存　分支

中图法分类号:O175　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2006)04-0255-06

Abstract: By introducing a constant periodic releasing natural enemies and integrated pest management, we devolop the system where the predator has Holling type Ⅲ functional response:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=ax(t)-bx^2(t)-\dfrac{\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2},\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=-cy(t)+\dfrac{k\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2}.\end{cases}$$

At the sametime, we obtain a new system:

$$\left.\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=ax(t)-bx^2(t)-\dfrac{\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2},\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=-cy(t)+\dfrac{k\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2}.\end{cases}\right\}\ t\neq nT,\ \left.\begin{cases}\Delta x(t)=-p_1x(t),\\ \Delta y(t)=-p_2y(t)+q.\end{cases}\right\}t=nT.$$

When $q>0,0\leqslant p_1<1$ and $0\leqslant p_2<1$, we obtain conditions for global asymptotic stability of pest-eradication periodic solution and permanence of the new system, and also obtain the existence of a postive periodic solution of the new system. Finally, we discuss the existence and stability of the predator-free periodic solution.

Key words: functional response of Holling type Ⅲ, impulsive effect, globally asymptotical stability, permanence, bifurcation

近年来,对具有脉冲效应的食饵-捕食系统的研究引起了学者们的关注,并取得了较好的结果[1~6].本文考虑基于下列食饵具有线性密度制约,捕食者具有 Holling Ⅲ 型功能性反应系统:

收稿日期:2006-04-14

修回日期:2006-06-23

作者简介:李祖雄(1972-),男,湖南张家界人,主要从事常微分方程研究工作。

*国家自然科学基金(10461002)资助。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ax(t)-bx^2(t)-\dfrac{\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2},\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-cy(t)+\dfrac{k\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2}.\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x(t),y(t)$ 分别是食饵(害虫)与捕食者(天敌)的生物量,a,b,c,α,β 及 k 都是正常数,且分别具有一定的生物意义,例如,a 表示食饵的内禀增长率,c 表示捕食者的死亡率等. 此外系统(1) 要具有可行的平衡点则必须 $k\alpha-c>0$.

陈均平等[7] 对系统(1)进行了研究,通过变换得到了平衡点 $O(0,0),S(x^*,y^*),R(x_+,0)$,其中 $x^*>0,y^*>0$. 且在一定条件下 O,R 是鞍点或结点,S 是全局稳定的. 由此看出系统(1) 不存在害虫被根除而天敌不灭绝的稳定的平衡点. 本文通过周期性释放天敌和化学控制的综合害虫管理(IPM) 对系统(1) 进行改进得到一个新的系统:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}&=ax(t)-bx^2(t)-\frac{\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2},\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}&=-cy(t)+\frac{k\alpha x^2(t)y(t)}{x^2(t)+\beta^2}.\end{aligned}\right\}t\neq nT,$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta x(t)&=-p_1x(t),\\ \Delta y(t)&=-p_2y(t)+q.\end{aligned}\right\}t=nT.\tag{2}$$

其中 $\Delta x(t)=x(t^+)-x(t);\Delta y(t)=y(t^+)-y(t)$;$T$ 是脉冲周期;$n\in Z_+,Z_+=\{1,2,\cdots\};0\leqslant p_1<1(0\leqslant p_2<1)$ 为每次进行化学控制而减少的害虫(捕食者)比例;$q\geqslant 0$ 是每次释放天敌的数量;a,b,c,α,β 及 k 都是正常数.

1 预备知识

设 $R_+=[0,\infty),R_+^2=\{z\in R^2|z\geqslant 0\}$. 函数 $f=(f_1,f_2)^T$,其中 f_1,f_2 分别是系统(2) 的第 1 和第 2 个方程的右端函数. 令 $V_0=\{V|R_+\times R_+^2\to R_+\}$,$V$ 在 $(nT,(n+1)T]$ 上连续且 $\lim\limits_{(t,u)\to(nT,z),t>nT}V(t,u)=V(nT^+,z)$ 存在.

定义 1.1 设 $V\in V_0$,则 $(t,z)\in(nT,(n+1)T]\times R_+^2$ 关于系统(2) 的右上导数定义为:

$$D^+V(t,z)=\limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(t+h,z+hf(t,z))-V(t,z)].$$

定义 1.2 设 $z(t)=(x(t),y(t))$ 为系统(2) 满足 $x(0^+)>0,y(0^+)>0$ 的解,若存在常数 $M\geqslant m>0$,有 $m\leqslant x(t)\leqslant M,m\leqslant y(t)\leqslant M$,则称系统(2) 是一致持续生存的.

引理 1.1[2] 设 $z(t)$ 是系统(2) 的初值为 $z(0^+)\geqslant 0$ 的解,则 $z(t)\geqslant 0$. 当任意 $t\geqslant 0$,且当 $z(0^+)>0$ 时有 $z(t)>0,t\geqslant 0$.

引理 1.2[8] 假设 $V\in V_0$ 下列不等式成立

$$\begin{cases}D^+V(t,z)\leqslant h(t,V(t,z)),t\neq nT,\\ V(t,z(t^+))\leqslant\psi_n(V(t,z)),t=nT.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $h:R_+\times R_+^2\to R_+$ 在 $(nT,(n+1)T]\times R_+^2$ 上连续并且对 $z\in R_+^2,n\in N$ 有 $\lim\limits_{(t,u)\to(nT^+,z)}h(t,u)=h(nT^+,z)$ 存在,且 $\psi_n:R_+\to R_+$ 是非减的,令 $r(t)$ 是下列标量脉冲微分方程在 $[0,+\infty)$ 的最大解

$$\begin{cases}u'(t)=h(t,u(t)),t\neq nT;\\ u(t^+)=\psi_n(u(t)),t=nT;\\ u(0^+)=u_0.\end{cases}\tag{4}$$

则 $V(0^+,z_0)\leqslant u_0$ 进而 $V(t,z(t))\leqslant r(t),t\geqslant 0,z(t)$ 是系统(2) 的解.

下面给出系统(2) 的子系统的基本性质

$$\begin{cases}y'(t)=-cy(t),t\neq nT;\\ y(t^+)=(1-p_2)y(t)+q,t=nT;\\ y(0^+)=y_0.\end{cases}\tag{5}$$

引理 1.3 系统(5) 有一个正周期解 $y^*_{(t)}$ 且对系统(5) 的其它任何正解 $y(t)$,均有 $|y(t)-y^*(t)|\to 0,t\to\infty$. 其中 $y^*_{(t)}=\dfrac{q\exp(-c(t-nT))}{1-(1-p_2)\exp(-cT)},t\in(nT,(n+1)T],n\in N,y^*(0^+)=\dfrac{q}{1-(1-p_2)\exp(-cT)}$.

2 害虫灭绝与系统持续生存条件

定理 2.1 当 $q>0,0\leqslant p_1<1,0\leqslant p_2<1$ 时,令 $(x(t),y(t))$ 是系统(2) 的任意一个解,如果

$$T<\frac{-\ln(1-p_1)}{a}\triangleq T_{\max}$$

成立,则害虫灭绝周期解 $(0,y^*(t))$ 是全局渐近稳定的.

证明 首先,证明害虫灭绝周期解的局部稳定性. 令 $x(t)=u(t),y(t)=y^*(t)+v(t)$ 则

$$\begin{pmatrix}u(t)\\ v(t)\end{pmatrix}=\Phi(t)\begin{pmatrix}u(0)\\ v(0)\end{pmatrix},0\leqslant t<T,$$

其中 Φ 满足:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -c\end{pmatrix}\Phi(t).$$

$\Phi(0)=I$ 是单位矩阵. 这样系统(2) 的第 3,第 4 个方程线性可化为

$$\begin{pmatrix}u(nT^+)\\ v(nT^+)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p_1 & 0\\ 0 & 1-p_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(nT)\\ v(nT)\end{pmatrix}.$$

因此,如果矩阵

$$M=\begin{pmatrix}1-p_1 & 0\\ 0 & 1-p_2\end{pmatrix}\Phi(T)$$

的 2 个特征根的模小于 1,则周期解 $(0,y^*(t))$ 是局部稳定的. 事实上,2 个 Floquet 乘子是 $u_1=(1-$

$p_2)\exp(-cT)<1, u_2=(1-p_1)\exp(\int_0^T a\mathrm{d}t)$. 根据 Floquet 理论，如果 $|u_2|<1$ 即 $T<\frac{-\ln(1-p_1)}{a}$，系统(2) 的周期解 $(0,y^*(t))$ 是局部稳定的.

其次，证明周期解 $(0,y^*(t))$ 是全局吸引的. 令 $\delta=(1-p_1)\exp(\int_0^T a\mathrm{d}t)<1$，由系统(2) 得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant ax(t), t\neq nT;\\ \Delta x(t)=-p_1x(t), t=nT.\end{cases}\tag{6}$$

在 $(nT,(n+1)T]$ 上对式(6) 积分得

$$x((n+1)T)\leqslant x(nT^+)\exp(\int_{nT}^{(n+1)T}a\mathrm{d}t)=x(nT)(1-p_1)\exp(\int_{nT}^{(n+1)T}a\mathrm{d}t)=x(nT)\delta.$$

因此 $x(nT)\leqslant x(0^+)\delta^n$，于是 $n\to\infty$ 时，$x(nT)\to 0$；$t\in(nT,(n+1)T]$ 时，$0<x(t)\leqslant x(nT)(1-p_1)\exp(aT)$. 所以 $n\to\infty$ 时 $x(t)\to 0$.

最后，证明 $t\to\infty$ 时，$y(t)\to y^*(t)$，令 $m_2=\frac{qe^{-cT}}{1-(1-p_2)e^{-cT}}-\varepsilon>0$，$\varepsilon$ 为任意小的正数，由系统(2) 知，考虑方程：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=-cz(t), \quad t\neq nT;\\ \Delta z(t)=-p_2z(t)+q, \quad t=nT;\\ z(0^+)=y(0^+)\geqslant 0.\end{cases}\tag{7}$$

由引理(1.2) 和引理(1.3) 知，当 t 充分大时，$y(t)\geqslant z(t)>y^*(t)-\varepsilon=m_2$. 设 $t\geqslant 0$ 时，$y(t)\geqslant m_2$，对于 $0<\varepsilon_1<\sqrt{\frac{c}{k\alpha-c}}\beta$，存在一个 $T_0>0$，使得 $t\geqslant T_0$ 时，$0<x(t)<\varepsilon_1$. 不妨设 $t\geqslant 0$ 时，$0<x(t)<\varepsilon_1$，由系统(2) 有 $-cy(t)\leqslant\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant y(t)(-c+\frac{k\alpha\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2+\beta^2})$，再利用引理(1.2) 和引理(1.3) 得 $z(t)\leqslant y(t)\leqslant w(t)$，且 $t\to\infty$ 时，$z(t)\to y^*(t)$，$w(t)\to w^*(t)$，其中 $z(t)$ 和 $w(t)$ 分别为方程(7) 和下面脉冲微分方程的解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}=w(t)(-c+\frac{k\alpha\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2+\beta^2}), \quad t\neq nT;\\ w(0^+)=y(0^+)\geqslant 0.\end{cases}\tag{8}$$

其中

$$w^*(t)=\frac{q\exp((-c+\frac{k\alpha\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2+\beta^2})(t-nT))}{1-(1-p_2)\exp((-c+\frac{k\alpha\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2+\beta^2})T)}, nT<t\leqslant(n+1)T.$$

因此对于任意给定的 $\varepsilon_2>0$，存在 $T_1>0$ 使得 $t>T_1$ 时，$y^*(t)-\varepsilon_2<y(t)<w^*(t)+\varepsilon_2$. 令 $\varepsilon_1\to 0$，t 充分大时，$y^*(t)-\varepsilon_2<y(t)<y^*(t)+\varepsilon_2$，于是 $t\to\infty$ 时，$y(t)\to y^*(t)$. 证毕.

定理 2.2 当 $q>0, 0\leqslant p_1<1, 0\leqslant p_2<1$ 时，存在常数 $M>0$，使得系统(2) 的任意解 $z(t)=(x(t),y(t))$，当 t 足够大时，均有 $x(t)\leqslant M, y(t)\leqslant M$.

证明 设 $z(t)=(x(t),y(t))$ 是系统(2) 的任意解，令 $V(t)=kx(t)+y(t)$，则 $V\in V_0$ 并且

$$\begin{cases}D^+V(t)+\lambda V(t)=k(a+\lambda)x(t)-kbx^2(t)-(c-\lambda)y(t), \quad t\neq nT;\\ V(nT^+)=k(1-p_1)x(nT)+(1-p_2)y(nT)+q\leqslant V(nT)+q, \quad t=nT.\end{cases}\tag{9}$$

显然当 $0<\lambda\leqslant c$，(9) 式第 1 个式子满足不等式

$D^+V(t)+\lambda V(t)\leqslant(\lambda+a)kx(t)-kbx^2(t)\leqslant M_0=\frac{k(\lambda+a)^2}{4b}$，$t\neq nT$ 因而是有界的. 并且当 $C_0=\lambda$ 和 $M_0=\frac{k(\lambda+a)^2}{4b}$，这样(9) 式可化为

$$\begin{cases}D^+V(t)\leqslant -C_0V(t)+M_0, \quad t\neq nT;\\ V(nT^+)\leqslant V(nT)+q, \quad t=nT.\end{cases}$$

根据引理(1.2) 可得

$$V(t)\leqslant(V(0^+)-\frac{M_0}{C_0})\exp(-C_0t)+q\frac{1-\exp(-nC_0T)}{1-\exp(-C_0T)}\exp(-C_0(t-nT))+\frac{M_0}{C_0},$$

其中 $T\in(nT,(n+1)T)$. 所以 $V(t)$ 是最终有界的并且存在一个常数 $M>0$ 使得对于系统(2) 的每个解 $z(t)=(x(t),y(t))$，当 t 充分大时，都有 $x(t)\leqslant M, y(t)\leqslant M$.

定理 2.3 当 $q>0, 0\leqslant p_1<1, 0\leqslant p_2<1$ 时，如果 $T>\frac{-\ln(1-p_1)}{a}$，则系统(2) 是持续生存的.

证明 设 $(x(t),y(t))$ 是系统(2) 的具有正初值的解. 前面已经证明了存在 2 个正常数 m_2 和 M，当 t 充分大时，$y(t)\geqslant m_2, x(t)\leqslant M, y(t)\leqslant M$ 且 $M>\frac{a}{b}$，$t\geqslant 0$. 下面只需证明存在一个正常数 m_1，当 t 充分大时，$x(t)\geqslant m_1$，下面分 2 步进行：

① 由已知条件 $T>\frac{-\ln(1-p_1)}{a}$ 知，可选取 $m_3(0<m_3<\frac{a}{b})$ 和充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $L=\frac{k\alpha m_3^2}{m_3^2+\beta^2}<c$，$\delta=aT-bm_3T-\frac{\alpha m_3}{m_3^2+\beta^2}\cdot\frac{q}{L-c}-\frac{\alpha m_3}{m_3^2+\beta^2}\cdot\varepsilon T-\ln(\frac{1}{1-p_1})>0$，则一定存在一点 t_1，使得 $x(t_1)\geqslant m_3$，否则 $y'(t)<y(t)(-c+L)$. 由引理(1.2) 和引理(1.3)，得到 $y(t)\leqslant z(t)$ 和 $y(t)\to$

$\overline{z(t)}, t \to \infty. z(t)$ 为下面方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = z(t)(-c+L), \quad t \neq nT; \\ \Delta z(t) = -p_2 z(t) + q, \quad t = nT; \\ z(0^+) = y(0^+) \geqslant 0. \end{cases} \tag{10}$$

的解，并且有 $\overline{z(t)} = \dfrac{q\exp((-c+L)(t-nT))}{1-(1-p_2)\exp((-c+L)T)}, nT < t < (n+1)T$. 所以存在一个 T_1，使得当 $t > T_1$ 时，有 $y(t) \leqslant z(t) \leqslant \overline{z(t)} + \varepsilon$ 和 $x'(t) \geqslant x(t)(a - bm_3 - \dfrac{\alpha m_3(\overline{z(t)}+\varepsilon)}{m_3^2+\beta^2})$. 当 $N_1 \in N$ 且 $N_1 T \geqslant T_1, n \geqslant N_1$，可得

$$\begin{cases} x'(t) \geqslant x(t)(a - bm_3 - \dfrac{\alpha m_3(\overline{z(t)}+\varepsilon)}{m_3^2+\beta^2}), \\ \quad t \neq nT; \\ x(t^+) = (1-p_1)x(t), t = nT. \end{cases}$$

当 $(n \geqslant N_1)$，将上式在 $(nT,(n+1)T]$ 上积分得

$$x((n+1)T) \geqslant x(nT^+)\exp(\int_{nT}^{(n+1)T}(a - bm_3 - \frac{\alpha m_3(\overline{z(t)}+\varepsilon)}{m_3^2+\beta^2})dt) = (1-p_1)x(nT)\exp(aT - bm_3T - \frac{\alpha m_3}{m_3^2+\beta^2}\cdot\frac{q}{L-c} - \frac{\alpha m_3}{m_3^2+\beta^2}\cdot\varepsilon T) = x(nT)\exp(\delta),$$

当 $k \to \infty$ 时，$x((N_1+k)T) \geqslant x(N_1T)\exp(k\delta) \to \infty$. 与 $x(t)$ 的有界性矛盾，存在一个 $t_1 > 0$ 有 $x(t_1) \geqslant m_3$.

② 当 $t \geqslant t_1$ 时，$x(t) \geqslant m_3$，则结论成立. 否则，令 $t_* = \inf_{t>t_1}\{t \mid x(t) < m_3\}$，$t_*$ 分为脉冲点和非脉冲点 2 种情况.

(Ⅰ) t_* 为脉冲点，令 $t_* = n_1T(n_1 \in N)$，那么 $t \in [t_1, t_*]$ 时，$x(t) \geqslant m_3$，并且 $(1-p_1)m_3 \leqslant x(t_*^+) = (1-p_1)x(t_*) \leqslant m_3$，选取 $n_2, n_3 \in Z_+$ 使得

$$n_2T > \frac{1}{-c+L}\ln\frac{\varepsilon}{M+q}, (1-p_1)^{n_2+1}\exp((n_2+1)\delta_1T)\exp(n_3\delta) > 1.$$

其中 $\delta_1 = a - bm_3 - \dfrac{\alpha M m_3}{m_3^2+\beta^2} < 0$. 令 $\overline{T} = n_2T + n_3T$，一定存在一点 $t_2 \in [t_*, t_* + \overline{T}]$，使得 $x(t_2) \geqslant m_3$. 否则考虑方程(10) 满足初值条件 $z(t_*^+) = y(t_*^+)$ 的解，当 $t \in (nT,(n+1)T), n_1 < n \leqslant n_1 + n_2 + n_3$ 时有

$$z(t) = (z(t_*^+) - \frac{q}{1-(1-p_2)\exp((-c+L)T)})\cdot\exp((-c+L)(t-t_*)) + \overline{z(t)}.$$

则有 $|z(t) - \overline{z(t)}| < (M+q)\exp((-c+L)(t-t_*)) < \varepsilon$，从而得 $t_* + n_2T \leqslant t \leqslant t_* + \overline{T}, y(t) \leqslant z(t) \leqslant \overline{z(t)} + \varepsilon$. 这样同步骤 ① 一样可得 $x(t_* + \overline{T}) \geqslant x(t_* + n_2T)\exp(n_3\delta)$.

当 $t \in [t_*, t_* + n_2T]$ 时，由系统(2) 得

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} \geqslant x(t)(a - bm_3 - \dfrac{\alpha m_3 M}{m_3^2+\beta^2}) = \\ \quad \delta_1 x(t), t \neq nT; \\ \Delta x(t) = -p_1 x(t), t = nT. \end{cases} \tag{11}$$

对式(11) 在 $[t_*, t_* + n_2T]$ 上积分得 $x(t_* + n_2T) \geqslant m_3(1-p_1)^{n_2}\exp(n_2\delta_1T)$，因此与 $x(t_* + \overline{T}) \geqslant m_3(1-p_1)^{n_2}\exp(n_2\delta_1T)\exp(n_3\delta) > m_3$ 矛盾. 记 $\bar{t} = \inf_{t\geqslant t_*}\{t \mid x(t) \geqslant m_3\}$，则有 $x(\bar{t}) \geqslant m_3$，对于 $t \in [t_*, \bar{t}]$，$x(t) < m_3$ 并且 $x(\bar{t}) = m_3$. 又 $x(t)$ 是左连续的，当 $t = nT$ 时，$x(t^+) = (1-p_1)x(t) \leqslant x(t)$，则 $\bar{t}$ 不可能是脉冲点. 假设 $t \in (t_* + (l-1)T, t_* + lT], l \in N, l \leqslant n_2 + n_3$，对于 $t \in (t_*, \bar{t})$，由式(11) 得

$$x(t) \geqslant x(t_*^+)(1-p_1)^{l-1}\exp((l-1)\delta_1T)\exp(\delta_1(t-(t_*+(l-1)T))) \geqslant m_3(1-p_1)^l\exp(l\delta_1T) \geqslant m_3(1-p_1)^{n_2+n_3}\exp((n_2+n_3)\delta_1T) \triangleq m_1', x(\bar{t}) \geqslant m_3,$$

上述过程可重复.

(Ⅱ) t_* 不是脉冲点，那么 $t \in [t_1, t_*)$ 时，$x(t) \geqslant m_3$，并且 $x(t_*) = m_3$. 若 $t_* \in (n_1'T, (n_1'+1)T), n_1' \in Z_+$，一定存在一点 $t_3 \in ((n_1'+1)T, (n_1'+1)T + \overline{T}]$，使得 $x(t_3) \geqslant m_3$. 否则考虑方程(10) 满足初始条件 $z((n_1'+1)T^+) = y((n_1'+1)T^+)$ 的解. 当 $t \in (nT, (n+1)T], n_1' \leqslant n \leqslant n_1' + n_2 + n_3$ 时有

$$z(t) = (z((n_1'+1)T^+) - \frac{q}{1-(1-p_2)\exp((-c+L)T)})\cdot\exp((-c+L)(t-(n_1'+1)T)) + \overline{z(t)}.$$

同(Ⅰ)类似讨论有

$$x((n_1'+1)T + \overline{T}) \geqslant x((n_1'+1+n_2)T)\exp(n_3\delta).$$

当 $t \in (t_*, (n_1'+1)T]$ 时，$x(t)$ 的取值有 2 种可能：

(i) $t \in (t_*, (n_1'+1)T]$ 时，$x(t) < m_3$. 这样当 $t \in (t_*, (n_1'+1+n_2)T)$ 时，$x(t) < m_3$，式(11) 成立，对式(11) 积分得

$x((n_1'+1+n_2)T) \geqslant m_3(1-p_1)^{n_2+1}\exp(\delta_1(n_2+1)T)$，于是 $x((n_1'+1)T + \overline{T}) \geqslant m_3(1-p_1)^{n_2+1}\exp(n_3\delta)\exp(\delta_1(n_2+1)T) > m_3$. 矛盾. 令 $\tilde{t} = \inf_{t>t_*}\{t \mid x(t) \geqslant m_3\}$，则 $t \in (t_*, \tilde{t})$ 时，$x(t) < m_3$，并且 $x(\tilde{t}) = m_3$，对于 $t \in (t_*, \tilde{t})$，设 $t \in (n_1'T + (l'-1)T, n_1'T + l'T], l' \in Z_+, l' \leqslant 1 + n_2 + n_3$，在 $(t_*,$

$\tilde{t}$)上对式(11)积分得

$x(t) \geqslant m_3(1-p_1)^{l'-1}\exp(l'\delta_1 T) \geqslant m_3(1-p_1)^{n_2+n_3}\exp((n_2+n_3+1)\delta_1 T) \triangleq m_1 < m_1', x(\tilde{t}) \geqslant m_3$. 上述过程可重复.

(ii) 存在一点 $t \in (t_*, (n_1'+1)T]$,使得 $x(t) \geqslant m_3$,令 $t^* = \inf_{t>t_*}\{t \mid x(t) \geqslant m_3\}$,于是当 $t \in [t_*, t^*)$ 时,$x(t) < m_3$ 并 $x(t^*) = m_3$. 在 (t_*, t^*) 上对式(11)积分得

$x(t) \geqslant x(t_*)\exp(\delta_1(t-t_*)) \geqslant m_3\exp(\delta_1 T) > m_1, x(t^*) \geqslant m_3$. 上述过程可重复.

综上可得 $x(t) \geqslant m_1, t \geqslant t_1$. 证毕.

注 令 $g(T) = T + \dfrac{\ln(1-p_1)}{a}$, $\lim\limits_{T\to 0} g(T) < 0$, $\lim\limits_{T\to\infty} g(T) = \infty$, $g'(T) > 0$. 因此,$g(T) = 0$ 有唯一的一个正根,记为 $T_{\max}$. 由定理 2.1 和定理 2.3 知 $T < T_{\max}$ 时,害虫根除周期解 $(0, y^*(t))$ 是全局渐近稳定的,$T > T_{\max}$ 时,系统是持续生存的.

3 系统的正周期存在性

利用分支理论来研究系统(2)的正周期的存在性. 为了计算方便做变量替换,令 $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = x(t)$ 这时系统(2)变成下列形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -cx_1(t) + \dfrac{k\alpha x_1(t)x_2^2(t)}{x_2^2+\beta^2} \triangleq F_1(x_1(t), x_2(t)), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = ax_2(t) - bx_2^2 - \dfrac{\alpha x_1(t)x_2^2(t)}{x_2^2+\beta^2} \triangleq F_2(x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \quad t \neq nT,$$

$$\begin{cases} x_1(nT^+) = (1-p_2)x_1(nT) + q \triangleq \theta_1(x_1(nT), x_2(nT)), \\ x_2(nT^+) = (1-p_1)x_2(nT) \triangleq \theta_2(x_1(nT), x_2(nT)). \end{cases} \quad t = nT. \tag{12}$$

用 Φ 表示系统(12)的流,有 $x(t) = \Phi(t, x_0)$, $0 < t < T$,其中 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $x_0 = x(0^+)$.

要用到的记号(本节的所有符号与文献[9]的符号相同):

$d_0' = 1 - \left(\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial x_2}\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\right)(T_0, x_0)$,其中 T_0 是 $d_0' = 0$ 的根.

$$a_0' = 1 - \left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right)(T_0, x_0),$$

$$b_0' = -\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\right)(T_0, x_0),$$

$$\frac{\partial\Phi_1(t,x_0)}{\partial x_1} = \exp\left(\int_0^t \frac{\partial F_1(\xi(r))}{\partial x_1}dr\right),$$

$$\frac{\partial\Phi_2(t,x_0)}{\partial x_2} = \exp\left(\int_0^t \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}dr\right),$$

$$\frac{\partial\Phi_1(t,x_0)}{\partial x_2} = \int_0^t \exp\left(\int_u^t \frac{\partial F_1(\xi(r))}{\partial x_1}dr\right)\cdot\left(\frac{\partial F_1(\xi(u))}{\partial x_2}\right)\exp\left(\int_0^u \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}dr\right)du,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2(t,x_0)}{\partial x_1\partial x_2} = \int_0^t \exp\left(\int_u^t \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}dr\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 F_2(\xi(u))}{\partial x_1\partial x_2}\right)\exp\left(\int_0^u \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}dr\right)du,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2(t,x_0)}{\partial x_2^2} = \int_0^t \exp\left(\int_u^t \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}dr\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 F_2(\xi(u))}{\partial x_2^2}\right)\exp\left(\int_0^u \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}dr\right)du + \int_0^t \exp\left(\int_u^t \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial^2 F_2(\xi(u))}{\partial x_2\partial x_1}\right)\times \int_0^u \exp\left(\int_p^u \frac{\partial F_1(\xi(r))}{\partial x_1}dr\right)\left(\frac{\partial F_1(\xi(u))}{\partial x_2}\right)\times \exp\left(\int_0^p \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}dr\right)dp\,du,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2(t,x_0)}{\partial \overline{T}\partial x_2} = \frac{\partial F_2(\xi(t))}{\partial x_2}\exp\left(\int_0^t \frac{\partial F_2(\xi(r))}{\partial x_2}dr\right),$$

$$\frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial T} = y'(T_0),$$

$$B = -\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial\overline{T}} + \frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial x_1}\frac{1}{a'}\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial\overline{T}}\right)\frac{\partial\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_2} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial\overline{T}\partial x_2} + \frac{\partial^2\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_1\partial x_2}\frac{1}{a'}\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial\overline{T}}\right)),$$

$$C = -2\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial x_1\partial x_2}\left(-\frac{b_0'}{a_0'}\frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_2} - \frac{\partial^2\Theta_2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_2}\right)^2 + 2\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_2}\frac{b_0}{a_0}\frac{\partial^2\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_2^2},$$

其中 $\xi(t) = (y^*(t), 0)$.

引理 3.1[9] 当 $q > 0, 0 \leqslant p_1 < 1, 0 \leqslant p_2 < 1$ 时,如果 $|1 - a_0'| < 1$,并且 $d_0' = 0$,则有下列结果.

(Ⅰ) 如果 $BC \neq 0$,则可以得到一个分支. 当 $BC < 0$ 时,系统(12)有非平凡的周期解分支;当 $BC > 0$ 时,有一个超临界分支.

(Ⅱ) 当 $BC = 0$ 时,则有不确定的情况.

定理 3.1 当 $q_1 > 0, 0 \leqslant p_1 < 1, 0 \leqslant p_2 < 1$ 时,当 $T > T_0$ 且充分接近 T_0 时,其中 $T_0 = -\dfrac{\ln(1-p_1)}{a}$,则系统(2)有一个正周期解.

证明 由引理 3.1 得

$|1 - a_0'| = (1-p_2)\exp(-cT_0) < 1$, $d_0' = 0$, $b_0' = 0$;

$$\frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial x_1} = (1-p_2)\exp(-cT_0);$$

$$\frac{\partial\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_2} = \exp(aT_0);$$

$$\frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial T_0\partial x_2}=a\exp(aT_0);$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_1\partial x_2}=0;$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2(T_0,x_0)}{\partial x_2^2}=\exp(aT_0)\int_0^T(-2b-\frac{2\alpha y^*}{\beta^2})\mathrm{d}t<0;$$

$$\frac{\partial\Phi_1(T_0,x_0)}{\partial T}=\frac{-cq\exp(-cT_0)}{1-(1-p_2)\exp(-cT_0)}.$$

因为$\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}=1-p_2,\frac{\partial\Theta_1}{\partial x_2}=0,\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1}=0$,和$\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_2}=1-p_1$,容易得$C=(1-p_1)\exp(aT_0)\int_0^{T_0}(2a+\frac{2\alpha y^*}{\beta^2})\mathrm{d}t>0$和$B=-a(1-p_1)\exp(aT_0)<0$,所以$BC<0$,根据引理3.1可知系统(2)有一个非平凡的周期解分支.

4 无捕食者周期解的存在性和稳定性

在$q\equiv 0,0<p_1<1,0\leqslant p_2<1$的情形下,考虑系统(2)的子系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(a-bx(t)),t\neq nT;\\ x(nT^+)=(1-p_1)x(nT),t=nT.\end{cases}\tag{13}$$

将系统(13)在$(nT,(n+1)T]$上积分得

$$x(t)=\frac{ax(nT^+)}{bx(nT^+)+(a-bx(nT^+))\exp(-a(t-nT))},t\in(nT,(n+1)T].\tag{14}$$

这样可得

$$x((n+1)T^+)=\frac{(1-p_1)ax(nT^+)}{bx(nT^+)+(a-bx(nT^+))\exp(-aT)}\triangleq F(x(nT^+)).\tag{15}$$

若$T<\frac{1}{a}\ln\frac{1}{1-p_1}$,则方程(15)有唯一的不动点,也就是系统(2)仅有平凡周期解(0,0),类似定理2.1,可以证明平凡解(0,0)是全局渐近稳定的.若$T>\frac{1}{a}\ln\frac{1}{1-p_1}$,平凡解是不稳定的,方程(15)有一个正不动点,记为x^*,则

$$x^*=\frac{a(1-p_1-\exp(-aT))}{b(1-\exp(-aT))}.$$

系统(14)对应于不动点x^*的T-周期解记为$x^*(t)$,则

$$x^*(t)=\frac{a(1-p_1-\exp(-aT))}{b(1-p_1-\exp(-aT+p_1\exp(-a(t-nT))))},$$

当$t\in(nT,(n+1)T]$时

$$x^*(0^+)=\frac{a(1-p_1-\exp(-aT))}{b(1-\exp(-aT))}.$$

因此,系统(2)有一个无捕食者周期解

$$(x^*(t),0)=(\frac{a(1-p_1-\exp(-aT))}{b(1-p_1-\exp(-aT+p_1\exp(-a(t-nT))))},0).$$

下面给出无捕食者周期解$(x^*(t),0)$的局部渐近稳定性的条件.

定理4.1 若$(x(t),y(t))$是系统(2)的任意解,且

$$\begin{cases}(1-p_1)\exp\int_{nT}^{(n+1)T}(a-2bx^*(t))\mathrm{d}t<1;\\ (1-p_2)\exp\int_{nT}^{(n+1)T}(\frac{k\alpha(x^*(t))^2}{(x^*(t))^2+\beta^2}-c)\mathrm{d}t<1.\end{cases}$$

成立,则$(x^*(t),0)$是局部渐近稳定的.

定理4.1的证明类似于定理2.1.

参考文献:

[1] SHUWEN ZHANG,DEJUN TAN,LANSUN CHEN. Chaotic behavior of a chemostat model with Beddington-DeAngelis functional response and periodically impulsive invasion[J]. Chaos,Solitons and Fractals,2006,29:474-482.

[2] SHUWEN ZHANG,LANSUN CHEN. A study of predator-prey models with the Beddington-DeAngelis functional response and impulsive effect [J]. Chaos, Solitons and Fractals,2006,27:237-248.

[3] FENGYAN WANG,SHUWEN ZHANG,LANSUN CHEN,et al. Bifurcation and complexity of Monod type pedator-prey system in a pulsed chemostat[J]. Chaos, Solitons and Fractals,2006,27:447-458.

[4] JING HUI,DEMING ZHU. Dynamic complexities for prey-dependent consumption intergrated pest management models with impulsive effects[J]. Chaos, Solitons and Fractals,2006,29:233-251.

[5] SHUWEN ZHANG,DEJUN TAN,LANSUN CHEN. Chaos in periodically forced Holling type Ⅳ predator-prey system with impulsive perturbations[J]. Chaos, Solitons and Fractals,2006,27:980-990.

[6] BING LIU,YUJUAN ZHANG,LANSUN CHEN. The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning integrated pest management [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2005, 6: 227-243.

[7] 陈均平,张洪德.具功能性反应的食饵—捕食者两种模型的定性分析[J].应用数学和力学,1986,7(1):73-80.

[8] LAKSMIKANTHAM V,BAINOV D D,SIMEONOV P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore:World Scientific,1989.

[9] LAKMECHE A,ARINO O. Bifurcation of nontrivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2000, 7: 265-287.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)