$[a,b]$-消去图的一个充分条件

A Sufficient Condition of $[a,b]$-Delete Graph

黄　娟，李乃医

HUANG Juan，LI Nai-yi

（广东海洋大学理学院数学系，广东湛江　524088）

（Department of Mathematics，Guangdong Ocean University，Zhanjiang，Guangdong，524088，China）

摘要：在研究 $K_{1,3}$-*free* 图与图的最小度之间的关系基础上，给出 $K_{1,3}$-*free* 图是$[a,b]$-消去图的一个充分条件.

关键词：$K_{1,3}$-*free* 图　$[a,b]$-消去图　最小度

中图法分类号：O157.5　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)04-0253-02

Abstract：Based on the studying of the relations between $K_{1,3}$-*free* graph and the minimum degree，we give a sufficient condition of $[a,b]$- delete graph.

Key words：$K_{1,3}$-*free* graph，$[a,b]$- delete graph，minimum degree

本文所考虑的图均为简单图，未加说明的术语和符号均与文献[1]一致.

设图 G 是具有顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 的图，A 和 B 是 $V(G)$ 的两个不相交子集，用 $e(A,B)$ 表示端点分别在 A 和 B 中边的数目. 对任意的 $v\in V(G)$，用 $d_G(v)$ 表示顶点 v 的度，$N_G(v)$ 表示 v 的邻域集. 如果 $S\subset V(G)$，$G-S$ 表示由 $V(G)-S$ 导出的图 G 的子图.

如果对图 G 的每条边 $e\in V(G)$，都存在 G 的一个$[a,b]$-因子不包含它，则称图 G 是$[a,b]$-消去图. 设 S,T 是 $V(G)$ 的不交子集，记 $U=G-S\cup T$，对于 $G-S\cup T$ 的一个分支 C 称为 G 的一个奇分支，若 $b|C|+e(C,T)\equiv 1 \pmod 2$，用 $h(S,T)$ 表示图 G 的奇分支的数目，记

$$\delta(S,T)=b|S|-a|T|+d_{G-S}(T)-h(S,T).$$

引理 1[2]　设 G 是一个图，a 和 b 是正整数，满足 $a\leqslant b$，则 G 是$[a,b]$-消去图，当且仅当对一切 $S,T\subset V(G)$，$S\cap T=\varnothing$ 有 $\delta(S,T)\geqslant\varepsilon(S,T)$. 其中 $\varepsilon(S,T)$ 定义如下.

假设条件：

(1) T 不是独立集.

(2) 存在 $G-S\cup T$ 的偶分支 C，满足 $e(T,V(C))\geqslant 1$，或者满足 C 中有一条割边 e 使 $C-\{e\}$ 的分支 C_1 和 C_2 是 $G-\{e\}-S\cup T$ 的奇分支.

$\varepsilon(S,T)=2$，如果条件(1)和(2)中有一个成立.

$\varepsilon(S,T)=1$，如果(1)和(2)都不成立，并且存在 $G-S\cup T$ 的中分支，满足 $e(T,C)\geqslant 1$，或者满足 C 有一条割边 e，使 $C-\{e\}$ 有一个分支是 $G-\{e\}-S\cup T$ 的奇分支.

否则 $\varepsilon(S,T)=0$.

引理 2[3]　若图 G 是连通 $K_{1,3}$-*free* 图，则 $\omega(G-S)\leqslant|S|+1$(对于 $\forall\, S\subset V(G)$).

本文给出了 $K_{1,3}$-*free* 图是$[a,b]$-消去图的一个充分条件.

定理　设 a,b 是正整数，满足 $3\leqslant a\leqslant b$，G 是一个连通 $K_{1,3}$-*free* 图，满足 $b|V(G)|$ 是偶数，若 G 的最小度 $\delta(G)\geqslant a+b$，则 G 是$[a,b]$-消去图.

证明　对于满足 $S,T\subset V(G)$，$S\cap T=\varnothing$ 的 S,T，若 $S\cup T=\varnothing$ 即 $S=T=\varnothing$，则 $\delta(S,T)=-h(S,T)=0$. 由 $\varepsilon(S,T)$ 的定义知，$\varepsilon(S,T)=0$，再由引理 1 即得 G 是$[a,b]$-消去图.

以下设 $S\cup T\neq\varnothing$，(反证)假设定理不成立. 由引理 1 知 $\delta(S,T)<\varepsilon(S,T)$，则存在 $S_0,T_0\subset V(G)$，$S_0\cap T_0=\varnothing$，使 $\delta(S_0,T_0)<\varepsilon(S_0,T_0)$. 令 S,T 是 $V(G)$ 的两个不交子集且满足 $\delta(S,T)<\varepsilon(S,T)$，从中选取这样的 S,T 使 $|S\cup T|$ 最小. 由引理 1 知 $\delta(S,T)<\varepsilon(S,T)\leqslant 2$.

先证明几个断言.

收稿日期：2006-06-05

修回日期：2006-09-10

作者简介：黄　娟(1978-)，女，江西高安人，硕士，主要从事图论及概率统计研究工作.

断言 1 $|S \cup T| \geqslant 2$.

证明 (反证)若 $|S \cup T| = 1$.

(1) 设 $S = \{v\}, T = \varnothing, \delta(S,T) = b - h(S,T)$,若 $h(S,T) \geqslant 3$,则存在 $K_{1,3}$;若 $h(S,T) \leqslant 1$,则 $\delta(S,T) = b - h(S,T) \geqslant 2$,即证;若 $h(S,T) = 2$,则不存在偶分支(否则存在 $K_{1,3}$),不妨设奇分支为 C_1, C_2,使得 $b|C|$ 为奇数,这要求 b 和 $|C_1|, |C_2|$ 同为奇数,得 $b|V(G)|$ 为奇数.与已知矛盾.

(2) 设 $S = \varnothing, T = \{v\}$,若 $h(S,T) \geqslant 3$ 或 $h(S,T) \leqslant 1$,同上可证;若 $h(S,T) = 2$,则不存在偶分支(否则存在 $K_{1,3}$),且由 T 独立及 $\varepsilon(S,T)$ 的定义知 $\varepsilon(S,T) \leqslant 1$,而 $\delta(S,T) = b - h(S,T) \geqslant 1$ 与 $\delta(S_0,T_0) < \varepsilon(S_0,T_0) \leqslant 1$ 矛盾.

断言 2 $\forall v \in T, e(v,T) \leqslant a - 2$.

证明 (反证)若 $\exists v \in T$ 使 $e(v,T) \geqslant a - 1$,设 $S^1 = S, T^1 = T - \{v\}, U^1 = U + \{v\}$,则 $h(S^1,T^1) \geqslant h(S,T) - t$,由断言 1,$S^1 \cup T^1 \neq \varnothing$,(令 t 表示与 v 关联的分支数)则 $t \leqslant 2$(由图 G 是 $K_{1,3}$-*free* 图),得

$\delta(S^1,T^1) = b|S^1| - a|T^1| + d_{G-S^1}(T^1) - h(S^1,T^1) \leqslant b|S| - (a|T| - 1) + d_{G-S}(T) - h(S,T) + t \leqslant \delta(S,T) + a - e(v,T) \leqslant \delta(S,T) + 1$,与 $|S \cup T|$ 的最小性矛盾.

断言 3 $\forall v \in T, e(v,T) + e(v,U) \leqslant a$.

断言 4 $\forall v \in S, e(v,T) \geqslant b$.

断言 3,断言 4 的证明同断言 2 的证明类似.

断言 5 $e(v,T) \geqslant 1$,进而 $h(S,T) \leqslant \omega(G - S \cup T) \leqslant e(T,U)$.

证明 设存在某个分支 C 使得 $e(C,T) = 0$.由 G 连通,则 $\exists v \in S$,使得 v 与 C 相关联,记 z 为 C 中与 v 关联的一点.由断言 2 和断言 4,知 $\exists x, y \in N(v) \cap T$ 且 x, y 在 G 中独立,从而 $G[x,y,z,v]$ 存在 $K_{1,3}$ 矛盾.

断言 6 $\forall v \in S, e(v,T) \leqslant 2(a-1)$.

证明 任取 $v \in S$ 令 $H = G[N(v) \cap T]x \in H, y \in H - x - N(x), K = H - N[x] - N[y]$.显然 $K = \varnothing$,否则存在 $z \in K$,从而 $G[v,x,y,z]$ 存在 $K_{1,3}$ 矛盾.

断言 7 $\omega([T]) \leqslant |S|$.

证明 设 $\omega([T]) \geqslant |S| + 1$,由断言 3,对 $\forall v \in T, e(v,T) + e(v,U) \leqslant a$,知

$a + e(v,S) \geqslant e(v,S) + e(v,T) + e(v,U) = d_G(v) \geqslant a + b$,

得 $e(v,S) \geqslant b (\forall v \in T)$,得 $[T]$ 的每个分支与 S 中至少有 2 个点相邻.设 C 为 $[T]$ 的一个分支,对于 $v \in S$,令 $F = \{e_{v,C}\}$,则 $|F| \geqslant 2\omega[T] \geqslant 2|S| + 2$,即存在 $v \in S$ 与 T 的 3 个分支相邻与 G 是 $K_{1,3}$-*free* 图矛盾.

断言 8 $\omega(G - S \cup T) \leqslant [T] + \omega[T]$.

证明 记 $H = [T + U], \omega(G - (S \cup T)) = \omega([H - T]), \omega[T] = n$,设 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 为 T 的 n 个分支,对于 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$ 令 H_i 为 U 中 T_i 相关联的导出子图,则由引理 2,得

$$\omega([H-T]) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega([H_i - T_i]) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|T_i| + 1) = |T| + n.$$

然后分 2 种情况证明定理.

情况 1: $|S| < |T|$.

由断言 6,断言 7,断言 8,得 $e(S,T) \leqslant 2(a-1)|S|, h(S,T) \leqslant |S| + |T|$,则

$\delta(S,T) = b|S| - a|T| + d_{G-S}(T) - h(S,T) = b|S| - a|T| + d_G(T) - e(S,T) - h(S,T) \geqslant b|S| - a|T| + (a+b)|T| - 2(a-1)|S| - (|S| + |T|) = (|T| - |S|)(a-1) \geqslant 2$.

情况 2: $|S| \geqslant |T|$.

由断言 5,$h(S,T) \leqslant e(T,U)$,得

$\delta(S,T) = b|S| - a|T| + d_{G-S}(T) - h(S,T) \geqslant b|S| - a|T| + e(T,U) + e(T,S) + 2e(T,T) - e(S,T) - e(T,U) = b|S| - a|T| + 2e(T,T) \geqslant 2e(T,T)$,而且 T 不独立(若 T 独立由断言 4 $\forall v \in S, e(v,T) \geqslant b$,知 $|T| \geqslant b \geqslant 3$,由断言 4,$G$ 存在 $K_{1,3}$ 矛盾),则 $\delta(S,T) \geqslant 2e(T,T) \geqslant 2$.定理证毕.

参考文献:

[1] LOVASZ. Subgraph with prescribed valencies[J]. Combinatorial Theory, 1970, 8: 391-416.

[2] LIU GUIZHEN. Factors and factorizations of graphs[J]. Acta Math Sciatica, 1994, 37(2): 230-237.

[3] TUTTE W T. Graph factors[J]. Combinatorial, 1981, 1: 79-97.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)