广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(4)：245～246

整数矩阵方程 $A^m=dI+\lambda J$ 的通解

General Solution to the Integer Matrix Equation $A^m=dI+\lambda J$

吴树宏

WU Shu-hong

（武汉理工大学理学院数学系，湖北武汉 430070）

(Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei, 430070, China)

摘要：给出整数矩阵方程 $A^m=dI+\lambda J$ 的通解，即：当 $d\neq 0$ 时，必有 $(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}-d^{\frac{1}{m}}$ 为 n 的整数倍且 $A=d^{\frac{1}{m}}I+\frac{1}{n}[(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}-d^{\frac{1}{m}}]J$，当 $d=0$ 时，其通解为 $A=\frac{1}{n}(\lambda n)^{\frac{1}{m}}ee^T+\frac{1}{t}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant l,k_j\geqslant 2}\sum\limits_{m_j=1}^{k_j-1}\zeta_{j,m_j+1}\eta_{j,m_j}^T$.

关键词：矩阵方程　整数　通解

中图法分类号：O151.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2006)04-0245-02

Abstract: In this paper, we give general solution of integer matrix equation $A^m=dI+\lambda J$, i.e., in the case of $d\neq 0$, $(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}-d^{\frac{1}{m}}$ there must be integer multiple of n and $A=d^{\frac{1}{m}}I+\frac{1}{n}[(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}-d^{\frac{1}{m}}]J$; in the case of $d=0$, $A=\frac{1}{n}(\lambda n)^{\frac{1}{m}}ee^T+\frac{1}{t}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant l,k_j\geqslant 2}\sum\limits_{m_j=1}^{k_j-1}\zeta_{j,m_j+1}\eta_{j,m_j}^T$.

Key words: matrix equation, integer, general solution

设 A,J 为 $n\times n$ 整数矩阵，且 J 的每个元均为 1；m,d,λ 为整数. 矩阵方程 $A^m=dI+\lambda J$ 被许多人研究过[1~8]，一般只找到一些特殊解，并未找到通解，而且有时还要求 A 为循环整数矩阵. 本文在一般情况下给出这个矩阵方程的通解表达式.

定理　设 m,d,λ 为整数，整数 $n\times n$ 矩阵方程 $A^m=dI+\lambda J$ 仅当 $d^{\frac{1}{m}}$，$(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}$ 为整数时有解. 当 $d\neq 0$ 时，必有 $(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}-d^{\frac{1}{m}}$ 为 n 的整数倍且 $A=d^{\frac{1}{m}}I+\frac{1}{n}[(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}-d^{\frac{1}{m}}]J$. 当 $d=0$ 时，其通解为

$$A=\frac{1}{n}(\lambda n)^{\frac{1}{m}}ee^T+\frac{1}{t}\sum_{1\leqslant j\leqslant l,k_j\geqslant 2}\sum_{m_j=1}^{k_j-1}\zeta_{j,m_j+1}\eta_{j,m_j}^T.$$

其中 t 为 n 的整数倍，$\sum\limits_{j=1}^{l}k_j=n-1$，$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l}k_j\leqslant m$，$e_p$ 为第 p 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 维列向量，对 $1\leqslant p,q\leqslant n$，有 $\frac{1}{n}(\lambda n)^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{t}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant l,k_j\geqslant 2}\sum\limits_{m_j=1}^{k_j-1}\zeta_{j,m_j+1}^Te_p\eta_{j,m_j}^Te_q$ 为整数，且当 $k_j,k_s\geqslant 2$，$1\leqslant j,s\leqslant l$，$1\leqslant m_j\leqslant k_j-1$，$1\leqslant m_s\leqslant k_s-1$ 时，$\zeta_{j,m_j+1}^Te=0$，$\eta_{j,m_j}^Te=0$，$\eta_{j,m_j}^T\zeta_{s,m_s}=t\delta_{s,j}\delta_{m_j,m_s}$.

证明　因为 $A^{2m}=d^2I+\lambda(2d+\lambda n)J$，$A^{3m}=d^3I+\lambda(3d\lambda n+3d^2+\lambda^2n^2)J$，故

$A^{2m}-dA^m=\lambda(d+\lambda n)J$，$A^{3m}-dA^{2m}=\lambda(d+\lambda n)^2J$，

从而

$0=A^{3m}-dA^{2m}-(d+\lambda n)(A^{2m}-dA^m)=A^m(A^m-dI)[A^m-(d+\lambda n)I]$.

设 A 的特征根为 μ，则必有

$$\mu^m(\mu^m-d)(\mu^m-d-\lambda n)=0.$$

故

$$\mu\in\{0,d^{\frac{1}{m}}e^{i\frac{2k\pi}{m}},(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}e^{i\frac{2k\pi}{m}},(k=0,1,\cdots,m-1)\}.$$

记 $e=(1,1,\cdots,1)^T$，e_p 为第 p 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 维列向量，$E=\{x\in Z^n: e^Tx=0\}$，则 $J=ee^T$，$A^m=dI+\lambda J=dI+\lambda ee^T$. 但 $A^me=(d+\lambda n)e$；$\forall y\in E$，$A^my=dy$，故 $\{e\}\cup E$ 为 A^m 的特征向量. 又

收稿日期：2006-09-13

作者简介：吴树宏(1963-)，男，吉林长春人，副教授，主要从事泛函数分析方面的研究工作。

$\overline{span}(\{e\} \cup E) = R^n$. 故 $\{e\} \cup E$ 为 A 的特征向量，从而 $d^{\frac{1}{m}}$ 为整数且为 A 的 $n-1$ 重特征值，$(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}$ 为整数且为 A 的 1 重特征值.

设 F 为 A 的有理标准型，其主对角块为 $(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}, F_{k_1}, F_{k_2}, \cdots, F_{k_l}(\sum_{j=1}^{l} k_j = n-1)$，其中 $F_{k_j}(1 \leqslant j \leqslant l)$ 是主对角线元为 $d^{\frac{1}{m}}$，次对角线元为 1，其它元为 0 的 k_j 阶下三角阵. 由文献[9]的讨论可知，存在有理满秩阵 Q 满足 $QFQ^{-1} = A$. 只须对 Q 乘以一个适当的整数，Q 便成为整数矩阵. 故不妨设 $t \neq 0$ 为整数，Q，P 为整数满秩阵，其诸元的最大公约数为 1，$Q^{-1} = \frac{1}{t}P$.

（Ⅰ）若 $d \neq 0, \lambda = 0$，显然有 $A = d^{\frac{1}{m}}I$ 且 $d^{\frac{1}{m}}$ 为整数.

（Ⅱ）若 $d \neq 0, \lambda \neq 0$，则 $F = Q^{-1}AQ$，

$$F^m = Q^{-1}A^mQ = Q^{-1}(dI+\lambda J)Q = dI + \frac{\lambda}{t}PJQ$$

$$= dI + \frac{\lambda}{t}(Pe)(Q^Te)^T. \qquad (1)$$

因 $F^m - dI$ 是主对角线元为 $\lambda n, 0, \cdots, 0$ 的下三角阵，由式(1)知，Pe, Q^Te 的第一个分量非 0. 若 Q^Te 不是 e_1 的倍数，则 $(Pe)(Q^Te)^T$ 非下三角阵，矛盾. 故 Q^Te 为 e_1 的倍数. 又 $F^m - dI$ 的第一列向量为 λe. 由式(1)知，Pe 亦为 e_1 的倍数. 即有 $s, r \in Z$ 满足 $Q^Te = se_1, Pe = re_1$. 从而 $Qe_1 = \frac{1}{r}QPe = \frac{t}{r}e, P^Te_1 = \frac{1}{s}P^TQ^Te = \frac{t}{s}e$. 由式(1)易知 $l = n-1, k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 1$. 故

$$A = QFQ^{-1} = \frac{1}{t}QFP = d^{\frac{1}{m}}I + \frac{(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}} - d^{\frac{1}{m}}}{t}Qe_1(P^Te_1)^T = d^{\frac{1}{m}}I + [(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}} - d^{\frac{1}{m}}]\frac{t}{rs}J.$$

因为 A 对应于 $(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}$ 的特征向量为 e，故 $Ae = (d+\lambda n)^{\frac{1}{m}}e = \{d^{\frac{1}{m}} + \frac{nt}{rs}[(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}} - d^{\frac{1}{m}}]\}e$. 由此可得 $\frac{nt}{rs} = 1$，从而 $A = d^{\frac{1}{m}}I + \frac{1}{n}[(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}} - d^{\frac{1}{m}}]J$. 因为 A 为整数矩阵，此处要求 $(d+\lambda n)^{\frac{1}{m}} - d^{\frac{1}{m}}$ 为 n 的整数倍.

（Ⅲ）若 $d = 0$，则 $\max_{1 \leqslant j \leqslant l} k_j \leqslant m$. 由线性代数知识，我们可以选取整数矩阵 Q 使得 Q 的第一列为 e 的整数倍，其余各列与 e 正交；选取 Q^{-1} 使得 Q^{-1} 的第一行为 e 的倍数，其余各行与 e 正交. 即 $\exists\, s, r \in Z, Q = (se, \zeta_{1,1}, \cdots, \zeta_{1,k_1}, \cdots, \zeta_{l,1}, \cdots, \zeta_{l,k_l}), P^T = t(Q^{-1})^T = (re, \eta_{1,1}, \cdots, \eta_{1,k_1}, \cdots, \eta_{l,1}, \cdots, \eta_{l,k_l})$. 当 $k_j, k_s \geqslant 2, 1 \leqslant j, s \leqslant l, 1 \leqslant m_j \leqslant k_j - 1, 1 \leqslant m_s \leqslant k_s - 1$ 时，$\zeta_{j,m_j+1}^Te = 0, \eta_{j,m_j}^Te = 0, \eta_{j,m_j}^T\zeta_{s,m_s} = t\delta_{s,j}\delta_{m_j,m_s}$，且

$$A = QFQ^{-1} = \frac{1}{t}QFP = \frac{sr}{t}(\lambda n)^{\frac{1}{m}}ee^T + \frac{1}{t}\sum_{1 \leqslant j \leqslant l, k_j \geqslant 2}\sum_{m_j=1}^{k_j-1}\zeta_{j,m_j+1}\eta_{j,m_j}^T.$$

因为 $Ae = (\lambda n)^{\frac{1}{m}}e$，故 $\frac{sr}{t} = \frac{1}{n}$，$t$ 为 n 的整数倍且对 $1 \leqslant p, q \leqslant n$，有 $\frac{1}{n}(\lambda n)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{t}\sum_{1 \leqslant j \leqslant l, k_j \geqslant 2}\sum_{m_j=1}^{k_j-1}\zeta_{j,m_j+1}^Te_p\eta_{j,m_j}^Te_q$ 为整数，

$$A = \frac{1}{n}(\lambda n)^{\frac{1}{m}}ee^T + \frac{1}{t}\sum_{1 \leqslant j \leqslant l, k_j \geqslant 2}\sum_{m_j=1}^{k_j-1}\zeta_{j,m_j+1}\eta_{j,m_j}^T.$$

注　当 $d = 0$ 时，以上定理实际上给出了一个求出通解的方法，这样做虽然很繁杂，但至少可以求出一个特解来. 文献[8]的做法是已知一个特解，再来构造其它特解，但未说明这第一个通解如何生成. 本文方法则可以给出第一个特解来.

参考文献：

[1] HOFFMAN A J. Research problems[J]. J Comb Theory, 1976, 2: 393.

[2] RYSER H J. A generalization of the matrix equation $A^2 = J$ [J]. Linear Algebra and Appl, 1970, 3: 451-460.

[3] LAM C W H. On the some solution of $A^m = dI + \lambda J$ [J]. J Comb Theory(A), 1978, 23: 140-147.

[4] KAI WANG. On the matrix equation $A^m = \lambda J$ [J]. J Comb Theory(A), 1980, 29: 134-141.

[5] KAI WANG. On the g-circulant solutions to the matrix equation $A^m = \lambda J$ [J]. J Comb Theory(A), 1982, 33: 287-296.

[6] FENN KING, KAI WANG. On the g-circulant solutions to the matrix equation $A^m = \lambda J$ (Ⅱ)[J]. J Comb Theory (A), 1985, 38: 182-186.

[7] MA S L, WATERHOUSE W C. The g-circulant solutions of $A^m = \lambda J$ [J]. Linear Algebra and Appl, 1987, 85: 211-220.

[8] 王天明，王军. 关于矩阵方程 $A^m = \lambda J$ 的一些结果[J]. 数学研究与评论，1989，4: 601-603.

[9] 张远达. 线性代数原理[M]. 上海：上海教育出版社，1981.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）