广西科学 Guangxi Sciences 2006, 13(4):241~244

超可解群的若干充分条件*

Some Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups

李世荣,卢家宽,孟 伟

LI Shi-rong, LU Jia-kuan, MENG Wei

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:把子群的S-拟正规和C-正规结合起来,证明:若群G的每个*Sylow*子群的极大子群均在G中S-拟正规或C-正规,则G超可解.并结合S-拟正规和C-正规的概念得到有限群超可解的若干充分条件,其中一些充分条件推广了相关文献报道的结果.

关键词:有限群 超可解 S-拟正规 C-正规

中图法分类号:O152.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2006)04-0241-04

Abstract: In combination of the concepts of S-quasinormal subgroup and C-normal subgroup, it is showed that G is Supersolvable if the maximal subgroup of each *Sylow* subgroup of G is S-quasinormal or C-normal in G. Some sufficient conditions are obtained for finite groups to be Supersolvable. Some previously known results are generalized.

Key words: finite groups, supersolvable, S-quasinormal, C-normal

利用子群的性质研究原群具有的性质是群论研究的一个重要方面.其中利用子群的S-拟正规性和C-正规性来研究有限群的超可解性已有相当多的结果.例如,文献[1]证明了若群G的每个*Sylow*子群的极大子群均在G中S-拟正规,则G超可解.王燕鸣在文献[2]中证明了若G的每个*Sylow*子群的极大子群均在G中C-正规,则G超可解.本文把S-拟正规和C-正规结合起来,证明若G的每个*Sylow*子群的极大子群均在G中S-拟正规或C-正规,则G超可解.从而使上述两个结果得到了推广.此外,结合S-拟正规和C-正规的概念得到有限群超可解的若干充分条件,其中有的推广了文献[3,4]中的某些结果.

本文考虑的群均为有限群,所用符号和术语均符合标准,参见文献[5].

收稿日期:2006-05-26

作者简介:李世荣(1940-),男,湖南人,教授,主要从事有限群研究工作。

*广西自然科学基金项目(编号:0249001)资助。

1 定义及主要引理

定义 1.1 设G是有限群,$H \leqslant G$,如果H与G的每一个*Sylow*子群可交换,即对G的任意*Sylow*子群P,有$HP = PH$成立,则称H为G的S-拟正规子群.

引理 1.1[6] 设H在G中S-拟正规,$H \leqslant K \leqslant G$,则$H$在$K$中S-拟正规.设$N \trianglelefteq G$,$H$在$G$中S-拟正规,则$HN/N$在$G/N$中S-拟正规.

定义 1.2[2] 设G是有限群,$H \leqslant G$,如果存在$K \trianglelefteq G$使得$G = HK$,$H \cap K \leqslant Core_G(H)$,则称$H$为$G$的C-正规子群.

引理 1.2[2] 设H在G中C-正规,$H \leqslant K \leqslant G$,则$H$在$K$中C-正规.设$N \trianglelefteq G$,$N \leqslant H \leqslant G$,则$H$在$G$中C-正规当且仅当$H/N$在$G/N$中C-正规.

引理 1.3[7] 设$N \trianglelefteq G$,$N \leqslant H \leqslant G$,且$(|H|, |N|) = 1$,如果$H$在$G$中C-正规,则$HN/N$在$G/N$中C-正规.

定义 1.3 若G可解,且G的所有*Sylow*子群是G的交换子群,则称群G为A-群.

引理 1.4[5] 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子，P 是 G 的 *Sylow* p- 子群且 P 循环，则 G 有正规 p- 补.

引理 1.5[5] 群 G 超可解当且仅当 $G/\Phi(G)$ 超可解.

引理 1.6[5] 设 G 是有限群，N 是 G 的极小正规子群，则 $F(G) \leqslant C_G(N)$. 特别地，若 N 交换，则有 $N \leqslant Z(F(G))$.

引理 1.7[5] (Frobenius) 设 G 是有限群，则下列陈述等价：

(1)G 是 p- 幂零的；

(2) 对 G 的任一不为 1 的 p- 子群 U，$N_G(U)/C_G(U)$ 是 p- 群；

(3) 对 G 的任一不为 1 的 p- 子群 U，$N_G(U)$ 为 p-幂零.

引理 1.8[5] 设 G 是有限群，p 为 G 的阶的一个素因子，P 为 G 的 *Sylow* p- 子群. 若 $N_G(P) = C_G(P)$，则 G 为 p- 幂零的.

引理 1.9[1] 设 G 是内超可解群，则 G 有如下结构：

(1)$G = P \rtimes M$，其中 P 为 G 的 *Sylow* p- 子群，M 超可解；

(2)$P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群；

(3) 若 $p = 2$，则 $\exp P \leqslant 4$；若 $P > 2$，则 $\exp P = p$；

(4) 当 P 交换时，$\Phi(P) = 1$；当 P 非交换时，$\Phi(P) = Z(P) = P'$；

(5)$P/\Phi(P)$ 非循环.

引理 1.10[8] 设 G 是内超可解群，P 为 G 的 *Sylow* p- 子群. 若有 $N \trianglelefteq G$ 使得 G/N 超可解，则 $P \leqslant N$.

2 主要结果

定理 2.1 若 G 的每个 *Sylow* 子群的极大子群均在 G 中 S- 拟正规或 C- 正规，则 G 超可解.

证明 设 G 非超可解，且 G 是一个极小反例.

(1) 设 $G \neq 1$，则 G 可解.

假设结论不真. 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子，P 是 G 的 *Sylow* p- 子群. 若 P 循环，则由引理 1.4，知 G 有正规 p- 补 H. 因 H 是 Hall 子群，易知定理条件对 H 保持，由归纳有 H 超可解，从而 G 可解，矛盾.

设 P 非循环，则 P 至少有两个极大子群 S_1 和 S_2，且 $P = S_1S_2$，若 S_1 和 S_2 至少有一个在 G 中 C- 正规. 不妨设 S_1 在 G 中 C- 正规，则有 $K \trianglelefteq G$ 使得 $G = S_1K$，$S_1 \cap K \leqslant Core_G(S_1)$，记 $C = Core_G(S_1)$. 若 $C = 1$，则有 $S_1 \cap K = 1$，推出 $p \mid |K|$ 但 $p^2 \nmid |K|$. 于是定理条件对 K 也保持. 由 $K < G$，再由归纳有 K 超可解，从而 G 可解，矛盾. 故 $C \neq 1$. 考虑 G/C，设 $Q \in Syl_q(G)$，则 $QC/C \in Syl_q(G/C)$. 设 $Q_1 \lessdot Q$，则 $Q_1C/C \lessdot QC/C$. 因 Q_1 在 G 中 S- 拟正规或 C- 正规，若 $p = q$，由引理 1.1 和引理 1.2，知 Q_1C/C 在 G/C 中 S- 拟正规或 C- 正规，若 $p \neq q$，由引理 1.1 和引理 1.3，知 Q_1C/C 在 G/C 中也 S- 拟正规或 C- 正规. 于是 G/C 满足定理条件，由归纳有 G/C 超可解，从而 G 可解，矛盾. 故可设 S_1 和 S_2 在 G 中都 S- 拟正规.

令 U 为 P 的任意不为 1 的子群. 考察 $N_G(U)$. 设 P_1 为 $N_G(U)$ 的 *Sylow* p- 子群，Q_1 为 $N_G(U)$ 的 *Sylow* q- 子群，$p \neq q$. 令 Q 为包含 Q_1 的 G 的 *Sylow* q- 子群. 于是 $PQ = S_1S_2Q = S_1QS_2 = QS_1S_2 = QP$，即 PQ 为 G 的子群. 记 $T = PQ$. 若 $G = T$，则 G 已可解，矛盾. 故可设 $T < G$. 由于 T 是 Hall 子群，易知 T 满足定理条件. 由归纳知 T 超可解，于是 $Q \lhd T$. 故有 $Q_1 = Q \cap N_T(U) \lhd N_T(U)$，推出 $UQ_1 = U \times Q_1$，$Q_1 \leqslant C_G(U)$. 由 q 的任意性，知 $N_G(U)/C_G(U)$ 是 p- 群. 由引理 1.7，知 G 也有正规 p- 补 H，矛盾.

(2)G 有唯一极小正规子群 N 使得 $G = N \rtimes M$，N 为初等交换 p- 群，$M \lessdot G$，M 为超可解且 $C_G(N) = N = F(G)$.

由(1) 知 G 可解，取 G 的极小正规子群 N，则有 $|N| = p^{\alpha}$. 由引理 1.1，1.2，1.3 和 G/N 满足定理条件，再由归纳 G/N 超可解，从而推出 N 的唯一性. 由于超可解群系是饱和群系，立得结论.

(3) $|N| = p$，完成证明.

令 q 是 $|G|$ 的最大素因子. 假设 $p < q$. 令 Q 是 G 的 *Sylow* q- 子群，则 QN/N 是 G/N 的 *Sylow* q- 子群. 因 G/N 超可解，故有 $QN/N \lhd G/N$，得 $QN \trianglelefteq G$. 再令 P 是 G 的 *Sylow* p- 子群，则 $N \leqslant P$，从而 $QNP = QP$ 为 G 的子群. 因 QP 为 Hall 子群，易知 QP 满足定理假设. 若 $QP < G$，由归纳 QP 超可解，于是 $Q \lhd QP$. 但是 $QN = Q \times N$，与(2) 中结论 $C_G(N) = N$ 矛盾. 故可设 $G = QP$. 若 $N \leqslant \Phi(P)$，由(2)，有 $P = P \cap NM = N(P \cap M) = P \cap M$，于是 $P \leqslant M$. 从而 $NM = M < G$，矛盾. 于是可设 P 有极大子群 P_1 不包含 N，显然 $|N : P_1 \cap N| = |NP_1 : P_1| = p$. 若 P_1 在 G 中 S- 拟正规，则 $P_1Q = QP_1$ 为 G 的子群. 令 $D = P_1Q \cap N = P_1 \cap N$，则 $D \lhd \langle P_1Q, N \rangle = G$. 由 N 的极小性，得 $D = 1$，于是 $|N| = p$. 因 G/N 超可解，得 G 超可解，矛盾. 故可设 P_1 在 G 中 C- 正规，于是有 $K \trianglelefteq G$ 使得 $G = P_1K$，$P_1 \cap K \leqslant Core_G(P_1)$. 但 $Core_G(P_1) \leqslant F(G) = N$，由 N 的极小性，得 $P_1 \cap K = 1$. 这里 $p \mid |K|$ 但 $p^2 \nmid |K|$，且 $p < q$，于是 K 有正规 p- 补 Q，又与(2) 矛

盾. 于是可设 $p=q$.

现在G/N超可解,p是$|G|$的最大素因子,于是$P/N \lhd G/N$,得$P \lhd G$. 由(2),得$N=F(G)=P$. 设N_1是N的任意极大子群. 若N_1在G中C-正规,则有$K \lhd G$使得$G=N_1K$,$N_1 \cap K \leqslant Core_G(N_1)$. 由$N$的极小性,得$Core_G(N_1)=1$,即$N_1 \cap K=1$. 因$N \leqslant K$,有$N_1=N_1 \cap K=1$,从而$|N|=p$. 故可设$N_1$在$G$中S-拟正规. 由(2),$G=N \rtimes M$. 因$M$可解,$M$有Sylow基$Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$. 故对每个$i$有$N_1Q_i=Q_iN_1$,从而$N_1M=MN_1$为$G$的子群,于是$N_1=N_1 \cap N=MN_1 \cap N \trianglelefteq \langle MN_1,N\rangle=G$. 由$N$的极小性,得$N_1=1$. 因此$|N|=p$. 完成证明.

推论 2.1 若G的每个Sylow子群的极大子群均在G中S-拟正规,则G超可解.

推论 2.2 若G的每个Sylow子群的极大子群均在G中C-正规,则G超可解.

定理 2.2 设$M \trianglelefteq G$,且G/M为超可解. 若M的每个Sylow子群的极大子群均在G中S-拟正规或C-正规,则G超可解.

证明 设G非超可解,且G是一个极小反例.

由定理2.1,知M超可解. 令p是$|M|$的最大素因子,M_p为M的Sylow p-子群,则$M_p \trianglelefteq M$,于是$M_p \trianglelefteq G$. 在M_p中取G的极小子群N,则M/N为G/N的正规子群,且$(G/N)/(M/N)=G/M$为超可解. 由引理1.1,1.2和1.3,知G/N也满足定理条件,由归纳G/N超可解,从而推出N的唯一性. 若$N \leqslant \Phi(G)$,由引理1.5,知G超可解. 故可设G有极大子群H使得$N \not\subseteq H$. 显然,$G=NH$. 因$N \cap H \trianglelefteq H$,且$N$交换,有$N \cap H \trianglelefteq NH=G$. 由$N$的极小性,有$N \cap H=1$. 故有$G=N \rtimes H$,$H$超可解. 由引理1.6,知$N \leqslant F(G) \leqslant C_G(N)$. 由$C_G(N) \trianglelefteq N_G(N)=G$,有$C_G(N) \cap H \trianglelefteq H$,于是$C_G(N) \cap H \trianglelefteq NH=G$. 由$N \not\subseteq C_G(N) \cap H$,有$C_G(N) \cap H=1$. 于是$C_G(N)=C_G(N) \cap NH=N(C_G(N) \cap H)=N$,$C_G(N)=N=F(G)$. 由$M_p \trianglelefteq G$,$M_p \leqslant F(G)$,有$M_p=N$.

设N_1是N的任意极大子群. 由假设,N_1在G中S-拟正规或C-正规. 若N_1在G中C-正规,则有$K \trianglelefteq G$使得$G=N_1K$,$N_1 \cap K \leqslant Core_G(N_1)$. 由$N$的极小性,得$Core_G(N_1)=1$,即$N_1 \cap K=1$. 因$N \leqslant K$,故$N_1=N_1 \cap K=1$,从而$|N|=p$. 设$N_1$在$G$中S-拟正规. 因$H$可解,$H$有Sylow基$Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$. 于是对每个$i$有$N_1Q_i=Q_iN_1$,从而$N_1H=HN_1$为$G$的子群. 于是$N_1=N_1 \cap N=HN_1 \cap N \trianglelefteq \langle HN_1,N\rangle=G$. 由$N$的极小性,得$N_1=1$. 这样$G/N$超可解,$N$是$p$阶循环子群,因此$G$超可解,矛盾. 所以极小阶反例不存在. 完成证明.

推论 2.3 设$M \trianglelefteq G$,且G/M为超可解. 若M的每个Sylow子群的极大子群均在G中S-拟正规,则G超可解.

推论 2.4 设$M \trianglelefteq G$,且G/M为超可解. 若M的每个Sylow子群的极大子群均在G中C-正规,则G超可解.

定理 2.3 设G有正规的A-子群H使得G/H超可解. 若对H的每个Sylow子群P,都有P的极大子群均在$N_G(P)$中S-拟正规或C-正规,则G超可解.

证明 假设结论不真,且G为极小反例.

设p是$|H|$的最小素因子,我们证明H为p-幂零的. 设P是H的Sylow p-子群,由引理1.8只须证$N_H(P)=C_H(P)$,设$Q \in Syl_q(N_H(P))$,$q \neq p$,则$PQ=P \rtimes Q$为$N_H(P)$的子群. 由引理1.1和1.2,知PQ的Sylow子群的极大子群均在PQ中S-拟正规或C-正规. 由定理2.1,知PQ超可解,故$Q \lhd PQ$,于是$PQ=P \times Q$. 又因P是交换群,故有$N_H(P)=C_H(P)$.

设U为H的正规p-补. 则$U \lhd G$. 考虑G/U和H/U. 由于$G/H=(G/U)/(H/U)$,G/H超可解,得$(G/U)/(H/U)$超可解. 设$P_1U/U \lessdot H/U$,其中$P_1 \lessdot P$,P_1在$N_G(P)$中S-拟正规或C-正规,再由引理1.1和引理1.2,知P_1U/U在$N_G(P)U/U=N_{G/U}(PU/U)$中S-拟正规或C-正规. 因此G/U和H/U满足定理条件. 由G的极小性,不失一般性可设H是p-群. 于是H的Sylow子群的极大子群在$N_G(H)=G$中S-拟正规或C-正规. 由定理2.2,知G超可解.

推论 2.5 设G有正规的A-子群H使得G/H超可解. 若对H的每个Sylow子群P,都有P的极大子群均在$N_G(P)$中S-拟正规,则G超可解.

推论 2.6 设G有正规的A-子群H使得G/H超可解. 若对H的每个Sylow子群P,都有P的极大子群均在$N_G(P)$中C-正规,则G超可解.

推论 2.7 设G是A-群. 若对G的每个Sylow子群P,都有P的极大子群均在$N_G(P)$中S-拟正规或C-正规,则G超可解.

定理 2.4 设$N \trianglelefteq G$,且G/N为超可解. 若N的每个素数阶和4阶循环子群均在G中S-拟正规或C-正规,则G超可解.

证明 假设结论不真,G是一个极小反例.

任取G的真子群H. 因$HN/N=H/H \cap N$,故由G/N超可解,知$H/H \cap N$超可解. 由引理1.1和引理1.2,知$H \cap N$之素数阶和4阶循环子群均在H

中S-拟正规或C-正规. 于是H和$H\cap N$满足定理条件,由归纳知H超可解. 故G为内超可解群. 由引理1.9,G有正规的$Sylow$ p-子群P使得$G=P\rtimes M$,M超可解. $P/\Phi(P)$是$G/\Phi(P)$的极小正规子群,$P/\Phi(P)$非循环. 若$p=2$,则$\exp P\leqslant 4$;若$P>2$,则$\exp P=p$. 再由引理1.10,$P\leqslant N$,设x为P的一个生成元,由定理假设,有$\langle x\rangle$在G中S-拟正规或C-正规.

若$\langle x\rangle$在G中S-拟正规. 因M可解,故M有$Sylow$基$Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$. 于是对每个i有$\langle x\rangle Q_i=Q_i\langle x\rangle$,从而$\langle x\rangle M=M\langle x\rangle$为$G$的子群. 于是有$M\langle x\rangle\Phi(P)\cap P=\langle x\rangle\Phi(P)(M\cap P)=\langle x\rangle\Phi(P)$,也得$\langle x\rangle\Phi(P)\trianglelefteq M\langle x\rangle\Phi(P)$. 又因$\langle x\rangle\Phi(G)/\Phi(P)\trianglelefteq P/\Phi(P)$,故推出$\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq\langle M\langle x\rangle\Phi(P),P\rangle/\Phi(P)=G/\Phi(P)$. 所以$\langle x\rangle\Phi(P)=P$,即$\langle x\rangle=P$. 与$P/\Phi(P)$非循环矛盾. 于是$\langle x\rangle$在$G$中C-正规,即有$K\trianglelefteq G$使得$G=\langle x\rangle K$,且$\langle x\rangle\cap K\leqslant Core_G(\langle x\rangle)$. 令$P_1=P\cap K$,则$P_1\trianglelefteq G$. 若$P_1\leqslant\Phi(P)$,则$P=P\cap\langle x\rangle K=\langle x\rangle(P\cap K)=\langle x\rangle$. 与$P/\Phi(P)$非循环矛盾. 故$P_1\not\subseteq\Phi(P)$. 于是$1\neq P_1\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$,所以$P_1\Phi(P)=P$,即$P_1=P$. 推出$P\leqslant K$,$\langle x\rangle=\langle x\rangle\cap K=Core_G(\langle x\rangle)$. 故有$\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$,所以$\langle x\rangle\Phi(P)=P$,即$\langle x\rangle=P$. 与$P/\Phi(P)$非循环矛盾. 因此极小阶反例不存在,$G$超可解.

推论 2.8 设$N\trianglelefteq G$,且G/N为超可解. 若N的每个素数阶和4阶循环子群均在G中S-拟正规,则G超可解.

推论 2.9 设$N\trianglelefteq G$,且G/N为超可解. 若N的每个素数阶和4阶循环子群均在G中C-正规,则G超可解.

推论 2.10 若群G每个素数阶和4阶循环子群均在G中S-拟正规或C-正规,则G超可解.

定理 2.5 设G有正规A-子群H使得G/H为超可解. 若H的任意素数阶或4阶循环子群$\langle x\rangle$在$N_G(P)$中S-拟正规或C-正规,其中P是包含$\langle x\rangle$的H的$Sylow$子群,则G超可解.

证明 假设结论不真,G是一个极小反例.

设p是$|H|$的最小素因子,我们证明H为p-幂零. 设P是H的$Sylow$ p-子群. 由引理1.8,只须证明$N_H(P)=C_H(P)$. 设$Q\in Syl_q(N_H(P))$,$q\neq p$. 则$PQ=P\rtimes Q$为$N_H(P)$的子群. 由引理1.1和1.2,知P的素数阶和4阶循环子群在PQ中S-拟正规或C-正规. 又因PQ/P超可解,由定理2.4,知PQ超可解. 故有$Q\triangleleft PQ$. 于是$Q\leqslant C_H(P)$. 由q的任意性,及P交换,推出$N_H(P)=C_H(P)$.

设U为H的正规p-补. 则$U\triangleleft G$. 考虑G/U和H/U. 由于$G/H=(G/U)/(H/U)$,G/H超可解,得$(G/U)/(H/U)$超可解. 设X/U为H/U的素数阶或4阶循环子群,则X/U写成形如$\langle x\rangle U/U$,其中$\langle x\rangle$是H的素数阶或4阶循环子群. 不妨设$\langle x\rangle\leqslant P$. 则$\langle x\rangle$在$N_H(P)$中S-拟正规或C-正规. 由引理1.1和1.2,知X/U在$N_{G/U}(PU/U)$中S-拟正规或C-正规. 因此G/U和H/U满足定理条件. 由G的极小性,不妨设H为p群. 于是H的素数阶和4阶循环子群在$N_G(H)=G$中S-拟正规或C-正规. 由定理2.4,知G超可解.

推论 2.11 设G有正规A-子群H使得G/H为超可解. 若H的任意素数阶或4阶循环子群$\langle x\rangle$在$N_G(P)$中S-拟正规,其中P是H的包含$\langle x\rangle$的$Sylow$子群,则G超可解.

推论 2.12 设G有正规A-子群H使得G/H为超可解. 若H的任意素数阶或4阶循环子群$\langle x\rangle$在$N_G(P)$中C-正规,其中P是H的包含$\langle x\rangle$的$Sylow$子群,则G超可解.

推论 2.13 设G为A-群. 若G的任意素数阶或4阶循环子群$\langle x\rangle$在$N_G(P)$中S-拟正规或C-正规,其中P是G的包含$\langle x\rangle$的$Sylow$子群,则G超可解.

参考文献:

[1] 陈重穆. 内外-$\sum$群与极小非-$\sum$群[M]. 重庆:西南师范大学出版社,1988.

[2] WANG Y M. C-Normality of groups ang its properties[J]. Journal of Algebra,1996,180(3):954-956.

[3] 张来武. *Sylow*子群的极大子群次正规的有限群[J]. 数学学报,1986,29(2):519-522.

[4] ZHANG JIPING. Influence of S-quasinormality cindition on almost minimal subgroups of a finite group[J]. Acta Math Sin New Ser,1987,3(2):125-132.

[5] 徐明曜,黄建华,李慧陵,等. 有限群导引(上,下)[M]. 第2版. 北京:科学出版社,2001.

[6] MICHACL,WEINSTEIN. 幂零与可解之间[M]. 张远达,樊恽,胡承义,等译. 武汉:武汉大学出版社,1988.

[7] 王燕鸣. 极小子群对有限群结构的影响[J]. 数学学报,2001,44(2):197-200.

[8] 王品超,温风桐,李文祥. 有限群的C-正规子群[J]. 曲阜师范大学学报,1997,23(4):5-7.

(责任编辑:邓大玉)