广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(3)：199～202

关于多分辨分析的定义
On the Definition of Multiresolution Analysis

杨美香，丁宣浩
YANG Mei-xiang DING Xuan-hao

（桂林电子工业学院计算科学与数学系，广西桂林 541004）
（Department of Computational Science and Mathematics，Guilin University of Electronic Technology，Guilin，Guangxi，541004，China）

摘要：总结多分辨分析的性质和多分辨分析的最本质特征，然后给出多分辨分析的最简洁的定义. 即若 $\{V_j\}_{j\in z}$ 是 $L^2(R)$ 的一串闭子空间序列，满足条件：(1) 单调性：$\cdots V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2\cdots$；(2) 稠密性：$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}V_j}=L^2(R)$；(3) 伸缩性：若 $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}, j\in Z$；(4) Riesz 基的存在性：存在 $\phi(x)\in V_0$ 使 $\{\phi(x-k):k\in Z\}$ 是 V_0 的 Riesz 基. 则称 $\{V_j\}_{j\in z}$ 为 $L^2(R)$ 的一个多分辨分析.

关键词：多分辨分析　Riesz 基　尺度函数　小波
中图法分类号：TN911　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)03-0199-04

Abstract：In this paper，we summarize the properties of multiresolution analysis and analyse the essential properties of multiresolution analysis，and then we give the simplest definition of multiresolution analysis. Namely，let $\{V_j\}_{j\in z}$ be a sequence of closed subspace in $L^2(R)$，if it satisfies the following conditions：(1) monotonicity：$\cdots V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2\cdots$；(2) density：$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}V_j}=L^2(R)$；(3) scalability：$f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}, j\in Z$；(4) existence of Riesz basis：$\exists\ \phi(x)\in V_0$，such that $\{\phi(x-k);k\in Z\}$ is a Riesz basis of V_0，then we call $\{V_j\}_{j\in z}$ a mulitiresolution analysis in $L^2(R)$.

Key words：multiresolution analysis，Riesz basis，scaling function，wavelet

多分辨分析又称为多尺度分析，是小波分析理论的核心部分，也是小波分析应用的基本工具. 虽然小波分析已经发展 20 多年了，然而关于多分辨分析的定义却没有一个统一的说法. 本文总结现行的多分辨分析定义，子空间序列采用单调递增体系，取各种定义的并集，得到下面的一些性质.

设 $\{V_j\}_{j\in z}$ 是 $L^2(R)$ 的一串闭子空间序列，如果 $\{V_j\}_{j\in z}$ 为 $L^2(R)$ 的一个多分辨分析，则它满足下面的条件：

(1) 单调性. $\cdots V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2\cdots$；

(2) 稠密性. $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}V_j}=L^2(R)$；

(3) $\bigcap_{j=1}^{\infty}V_j=\{0\}$；

(4) 伸缩性. 若 $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}, j\in Z$；

(5) Riesz 基的存在性. 存在 $\phi(x)\in V_0$ 使 $\{\phi(x-k):k\in Z\}$ 是 V_0 的 Riesz 基，称 $\phi(x)$ 是尺度函数. 这里的 Z 表示全体整数；

(5′) 正交基的存在性. 存在 $\phi(x)\in V_0$ 使 $\{\phi(x-k):k\in Z\}$ 是 V_0 的标准正交基；

(6) 平移不变性. $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(x-k)\in V_j$，$\forall k\in Z$；

(7) $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(x+\frac{1}{2^j})\in V_j, j\in Z$；

(8) $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(x-2^{-j}k)\in V_j$.

通常条件(1)～(5)是共同的. 条件(6)引自文献[1～3]等；条件(7)引自文献[4,5]等；条件(8)引自文献[6]. 在文献[6]中，闭子空间序列是单调递减的，因此那里的条件是 $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(x-2^jk)\in V_j$. 条件(5′)引自文献[7,8]等.

作为多分辨分析的定义，应该体现该对象的本质特征，应该尽可能简洁. 只要在定义中给出多分辨分析的本质特征，那么其余性质就可以作为推论了.

收稿日期：2005-10-17
修回日期：2005-11-30
作者简介：杨美香(1973-)，女，广西桂林人，硕士研究生，主要从事小波分析理论及其应用方面的研究工作。

1 多分辨分析的本质特征

为了讨论问题的完整性与方便阅读，以下以定理的形式给出多分辨分析的本质特征，并对定理进行证明.

定理1.1[5] 条件(3)可以由条件(1)、(2)、(4)、(5)推出.

证明[5] 设 C_0^∞ 表示在 R 上具有紧支且无穷可导的函数全体，任取 $f\in C_0^\infty$，$\mathrm{supp} f\subset[-M,M]$，则

$$|<f,\phi_{L,k}>|^2 = |2^{-\frac{L}{2}}\int_{-M}^{M}\phi(2^{-L}x-k)\overline{f(x)}\mathrm{d}x|^2 \leqslant \{2^{-L}\int_{-M}^{M}|\phi(2^{-L}x-k)|^2\mathrm{d}x\}\|f\|_2^2=\{\int_{-\frac{M}{2^L}}^{\frac{M}{2^L}}|\phi(y-k)|^2\mathrm{d}y\}\|f\|_2^2 = \{\int_{-k-\frac{M}{2^L}}^{-k+\frac{M}{2^L}}|\phi(x)|^2\mathrm{d}x\}\|f\|_2^2,$$

即 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|<f,\phi_{L,k}>|^2\leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{\int_{-k-\frac{M}{2^L}}^{-k+\frac{M}{2^L}}|\phi(x)|^2\mathrm{d}x\}\|f\|_2^2 = (\int_{B_L}|\phi(x)|^2)\|f\|_2^2$；其中 $B_L=\bigcup_{k\in Z}[k-\frac{M}{2^L},k+\frac{M}{2^L}]$.

因为 $\int_R|\phi(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，使 $\int_{|x|>N}|\phi(x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|<f,\phi_{L,k}>|^2\leqslant\varepsilon\|f\|^2+(\int_{B_L\cap[-N,N]}|\phi(x)|^2\mathrm{d}x)\|f\|^2.$$

由于 $\lim_{L\to\infty} m\{B_L\cap[-N,N]\}\leqslant\lim_{L\to\infty}\frac{4(N+1)M}{2^L}=0$，故 $\lim_{L\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|<f,\phi_{L,k}>|^2=0$.

设 $h(x)\in\bigcap V_j$，则 $\exists\{C_{jm}\}\in l^2$，使得 $h(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}C_{jm}\phi_{jm}(x)$，则 $A\sum_m|C_{jm}|^2\leqslant\|h\|^2=\|\sum_m C_{jm}\phi_{jm}(x)\|^2\leqslant B\sum_m|C_{jm}|^2$，从而 $\sum_m|C_{jm}|^2\leqslant\frac{1}{A}\|h\|^2$.

这样对 $\forall f\in C_0^\infty$ 有

$$<f,h>=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_{jm}<f,\phi_{jm}>;$$

$$|<f,h>|\leqslant\sum_{m=-\infty}^{\infty}|C_{jm}||<f,\phi_{jm}>|\leqslant(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|C_{jm}|^2)^{\frac12}(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|<f,\phi_{jm}>|^2)^{\frac12}\leqslant\frac{1}{\sqrt A}\|h\|(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|<f,\phi_{jm}>|^2)^{\frac12}\to0,(j\to\infty).$$

故 $<f,h>=0$.

由于 C_0^∞ 在 $L^2(R)$ 中稠密，因此 $h\perp L^2(R)$，从而 $h=0$. 证毕.

定理1.2 条件(5)与条件(5′)等价.

显然条件(5′)推出条件(5). 下面证明条件(5)推出条件(5′). 假定 $g\in V_0$ 使得 $\{g(x-k):k\in z\}$ 为 V_0 中的Riesz基. 引用文献[3]中的定理4.1中的方法，令 $\hat\phi(\omega)=\frac{\hat g(\omega)}{[\sum_m|\hat g(\omega+2m\pi)|^2]^{1/2}}$. 容易验证 $\sum_{m\in z}|\hat\phi(\omega+2m\pi)|^2=1$. 根据文献[4]中的定理2.34，$\{\phi(x-n):n\in z\}$ 构成 V_0 的规范正交系. 又 $\hat g(\omega)=[\sum_n|\hat g(\omega+2n\pi)|^2]^{1/2}\hat\phi(\omega)$，因此 $\{g(x-k):k\in Z\}$ 可由 $\{\phi(x-n):n\in z\}$ 表示，这样 $\{\phi(x-n):n\in z\}$ 是 V_0 的规范正交基. 证毕.

定理1.3 条件(6)可以由条件(4)和(5)推出.

证明 只需证明若 $f(x)\in V_j$，则对任意 $k\in Z$ 有 $f(x-k)\in V_j$. 事实上，由条件(4)推出，$h(x)=f(2^{-j}x)\in V_0$. 再根据条件(5)推出 $h(x-k)=f(2^{-j}(x-k))\in V_0$. 再利用条件(4)便得到 $f(x-k)\in V_j$. 证毕.

定理1.4 如果条件(4)和(5)成立，令 $\phi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jx-k)$，则 $\{\phi_{j,k}(x):k\in Z\}$ 是 V_j 的Riesz基，而且Riesz界与 $\{\phi(x-k):k\in Z\}$ 的Riesz界相同.

证明 由条件(4)知 $\phi(2^jx)\in V_j$. 再由定理1.3知，对任意整数 k，$\phi(2^jx-k)\in V_j$，这里将 2^jx 看作定理1.3中的 x. 对任意 $f(x)\in V_j$，由条件(4)知 $f(2^{-j}x)\in V_0$. 再根据条件(5)知存在序列 $\{C_{j,k}\}\in l^2$ 使得

$$f(2^{-j}x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{j,k}\phi(x-k).$$

令 $t=2^{-j}x$ 代入上式，得

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{j,k}\phi(2^jt-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{j,k}2^{-\frac{j}{2}}\phi_{j,k}(t).$$

又容易计算得出

$$\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{j,k}\phi_{j,k}(x)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{j,k}\phi_{j,k}(x)|^2\cdot\mathrm{d}x=\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{j,k}\phi(x-k)\|^2,$$

因此，$\{\phi_{j,k}(x):k\in Z\}$ 是 V_j 的Riesz基，而且Riesz界与 $\{\phi(x-k):k\in Z\}$ 的Riesz界相同. 证毕.

定理1.5 条件(7)可以由条件(1)、(2)、(4)、(5)推出.

证明 如果 $f(x)\in V_j$，由定理1.4知

$\{\phi_{j,k}(x): k \in Z\}$ 是 V_j 的 Riesz 基，故存在序列 $\{C_{j,k}\} \in l^2$，使得 $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk}\phi_{jk}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk}2^{j/2}\phi(2^j x - k)$，

从而 $f(x+1/2^j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k}2^{j/2}\phi(2^j(x+1/2^j)-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k}\phi_{j,k-1}(x) \in V_j$.

反过来，如果 $f(x+1/2^j) \in V_j$，则存在序列 $\{C_{jk}\} \in l^2$，使得

$f(x+1/2^j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k}2^{j/2}\phi(2^j x - k)$，令 $t = x + \frac{1}{2^j}$，则 $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k}\phi_{j,k+1}(t) \in V_j$. 证毕.

定理 1.6 条件(8)可以由条件(1)、(2)、(4)、(5)推出.

证明 若对 $f(x) \in V_j$，由定理 1.4 知 $\{\phi_{j,k}(x): k \in Z\}$ 是 V_j 的 Riesz 基，故存在序列 $\{C_{jk}\} \in l^2$，使得 $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk}\phi_{jk}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk}2^{j/2}\phi\cdot(2^j x - k)$. 从而

$f(x - 2^{-j}k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{j,n}2^{j/2}\phi(2^j(x-2^{-j}k) - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{j,n}\phi_{j,k+n}(x) \in V_j$.

反过来，若 $f(x-2^{-j}k) \in V_j$，则存在序列 $\{C_{jk}\} \in l^2$，使得

$f(x-2^{-j}k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{j,n}2^{j/2}\phi(2^j x - n)$，令 $t = x - 2^{-j}k$，则

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{j,n}2^{j/2}\phi(2^j(t + 2^{-j}k) - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{j,n}\phi_{j,n-k}(t) \in V_j$. 证毕.

由此可见条件(1)、(2)、(4)、(5)是多分辨分析的最本质特征，从而我们得出体现多分辨分析的最本质特征的简洁定义为：

定义 设 $\{V_j\}_{j\in z}$ 是 $L^2(R)$ 的一串闭子空间序列，如果满足以下四条，则称 $\{V_j\}_{j\in z}$ 为 $L^2(R)$ 的一个多分辨分析(简称 MRA)：

(1) 单调性. $\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots$；

(2) 稠密性. $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j} = L^2(R)$；

(3) 伸缩性. 若 $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, j \in Z$；

(4) Riesz 基的存在性. 存在 $\phi(x) \in V_0$ 使 $\{\phi(x-k): k \in Z\}$ 是 V_0 的 Riesz 基，称 $\phi(x)$ 是尺度函数.

2 小波空间与 $L^2(R)$ 的分解

设 $\{V_j\}_{j\in z}$ 为 $L^2(R)$ 的一个 MRA，为了构造小波，通常的做法是设 W_0 是 V_0 关于 V_1 的补子空间，即 $W_0 \cap V_0 = \{0\}, V_1 = W_0 + V_0$，即 $V_1 = W_0 \dotplus V_0$. 但要注意，一个 Hilbert 空间的闭子空间的补子空间是不唯一的. 例如令 $V_1 = R^2, V_0 = \{\lambda(1,0): \lambda \in R\}$，$W_{0,l} = \{\lambda(1, l^2+1): \lambda \in R\}$，则对任意的 $l \in Z$ 有 $V_1 = V_0 \dotplus W_{0,l}$，且任意 $l \neq k$ 有 $W_{0,l} \cap W_{0,k} = \{0\}$. 因此，对于一个给定的 W_0，我们不能像定义 W_0 一样去定义 W_j. 而应该要求 W_j 满足：如果小波 $\psi \in W_0$ 使得 $\{\psi(x-k): k \in Z\}$ 是 W_0 的 Riesz 基，令 $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$，$W_j = \overline{span\{\psi_{j,k}: k \in Z\}}$，那么既要求 $\{\psi_{j,k}: k \in Z\}$ 是 W_j 的 Riesz 基，也要满足 $V_{j+1} = W_j \dotplus V_j$. 这两个条件一般认为都能同时满足. 以下用定理的形式给出，并给出证明.

定理 2.1 设小波 $\psi \in W_0$ 使得 $\{\psi(x-k): k \in Z\}$ 是 W_0 的 Riesz 基，令 $W_j = \overline{span\{\psi_{j,k}: k \in Z\}}$，则 $\{\psi_{j,k}: k \in Z\}$ 是 W_j 的 Riesz 基且与 $\{\psi(x-k): k \in Z\}$ 的 Riesz 界相同，同时还有 $V_{j+1} = W_j \dotplus V_j$.

证明 容易计算

$$\| \sum_k C_{j,k}\psi_{j,k} \|^2 = \| \sum_k C_{j,k}\psi(x-k) \|^2,$$

所以 $\{\psi_{j,k}: k \in Z\}$ 是 $W_j = \overline{span\{\psi_{j,k}: k \in Z\}}$ 的 Riesz 基且 Riesz 界与 $\{\psi(x-k): k \in Z\}$ 的 Riesz 界相同.

对任意 $f(x) \in V_{j+1}$，由 MRA 的定义，$f(2^{-j}x) \in V_1 = W_0 \dotplus V_0$，而 $\{\phi(x-k), \psi(x-k): k \in Z\}$ 是 V_1 的 Riesz 基，因此存在序列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 使得

$$f(2^{-j}x) = \sum_k a_k\phi(x-k) + \sum_k b_k\psi(x-k),$$

于是

$$f(t) = \sum_k a_k\phi(2^j t - k) + \sum_k b_k\psi(2^j t - k).$$

这说明 $V_{j+1} = V_j + W_j$.

又如果 $g(x) \in V_j \cap W_j$，于是存在序列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 使得

$$g(x) = \sum_k a_k\phi(2^j x - k) = \sum_k b_k\psi(2^j x - k).$$

这样 $g(2^{-j}t) = \sum_k a_k\phi(t-k) = \sum_k b_k\psi(t-k) \in V_0 \cap W_0 = \{0\}$，即 $g = 0$. 所以 $V_j \cap W_j = \{0\}$，$V_{j+1} = V_j + W_j$ 是直和分解. 证毕.

由定理 2.1，由小波 $\psi \in W_0$ 得到 $L^2(R)$ 的闭子空间序列 $\{W_j\}$，称作小波空间序列，它满足下面的熟知结果：

定理 2.2 $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}$.

证明　“⇒”任意 $f(x) \in W_j$，由于 $\{\psi_{j,k}: k \in Z\}$ 是 W_j 的 Riesz 基，所以存在数列 $\{C_{j,k}\}$ 使得

$$f(x) = \sum_k C_{j,k}\psi_{j,k}(x) = \sum_k C_{j,k}2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

这样

$$f(2x) = \sum_k C_{j,k}2^{j/2}\psi(2^{j+1}x - k) =$$

$$\sum_k C_{j,k}2^{-1/2}\psi_{j+1,k}(x) \in W_{j+1}.$$

“⇒”若 $f(2x) \in W_{j+1}$，则存在数列 $\{C_{j+1,k}\}$ 使得

$$f(2x) = \sum_k C_{j+1,k}\psi_{j+1,k}(x) =$$

$$\sum_k C_{j+1,k}2^{\frac{j+1}{2}}\psi(2^{j+1}x - k),$$

从而

$$f(x) = \sum_k C_{j+1,k}2^{1/2}2^{j/2}\psi(2^j x - k) =$$

$$\sum_k C_{j+1,k}2^{1/2}\psi_{j,k}(x) \in W_j.$$ 证毕.

定理 2.3　$V_j = W_{j-1} \dotplus V_{j-1} = W_{j-1} \dotplus W_{j-2} \dotplus \cdots \dotplus W_{j-M} \dotplus V_{j-M} = W_{j-1} \dotplus W_{j-2} \dotplus \cdots, L^2(R) = \cdots \dotplus W_{-1} \dotplus W_0 \dotplus W_1 \dotplus \cdots$.

证明　V_j 的第 2 个分解式是因为 $\bigcap_k V_j = \{0\}$，$L^2(R)$ 的分解式是因为 $\overline{\bigcup V_j} = L^2(R)$.

参考文献：

[1] 迈耶. 小波与算子[M]. 尤众，译. 北京：北京世界图书出版社，1992.

[2] 成礼智，王红霞，罗永. 小波的理论与应用[M]. 北京：科学出版社，2004.

[3] 冯象初，甘小冰，宋国乡. 数值泛函与小波理论[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2003.

[4] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安：西安交通大学出版社，2000.

[5] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 程正兴，译. 西安：西安交通大学出版社，1995.

[6] MALLAT S. 信号处理的小波导引[M]. 杨力华，译. 北京：机械工业出版社，2002.

[7] 李水根. 分形与小波[M]. 北京：科学技术出版社，2002.

[8] DAUBECHIE I. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia：SIAM Publ，1992.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）

（上接第 195 页 Continue from page 195）

是从 1.506～1050.986μm. 这一理论结果证明，文献[5]中用 $T = 300$K，$\lambda = 3$cm 或 $\lambda = 3.5$cm 来作“微波遥感”的理论分析是不适宜的. 因为在 $T_3 = 300$K 温度时，$\lambda_{3/6}$ 仅为 700.657μm，热辐射波长根本不可能延伸到 3cm 或 3.5cm 这样波长的微波领域. 这便是本文研究结果在应用上的重要价值之一.

参考文献：

[1] 李景镇. 光学手册[M]. 西安：陕西科学出版社，1986.

[2] 程守洙，江之永. 普通物理学[M]. 北京：高等教育出版社，2001.

[3] オプトロニクス. 光通信用语 96[J]. オプトロニクス，1996(7)：1.

[4] 斯帕罗 E M. 辐射传热[M]. 北京：高等教育出版社，1982.

[5] 邓明德，尹京苑，刘西垣，等. 黑体辐射公式的积分解及应用[J]. 遥感信息，2002(1)：2-10.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）