广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(3)：194～195,202

普朗克公式中光波长的定义域方程*

An Equation on Definitive Range of the Light Wavelength in Planck Formula

陈广生[1]，卢文全[2]，蔡如华[3]，丁宣浩[3]

CHEN Guang-sheng[1], LU Wen-quan[2], CAI Ru-hua[3], DING Xuan-hao[3]

(1.河池职业学院计算机应用科学系，广西河池 547000；2.中国电子科技集团公司第三十四研究所，广西桂林 541004；3.桂林电子科技大学计算科学与数学系，广西桂林 541004)

(1. Department of Computer Applied Science, Hechi Professional College, Hechi, Guangxi, 547000, China; 2. No. 34 Research Institute, China Electronic Technology Group Corporation, Guilin, Guangxi, 541004, China; 3. Department of Computational Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要：引进一个计算精度因子 n，导出普朗克公式 $e_b(\lambda,T)=\frac{C_1}{\lambda^5}(e^{\frac{C_2}{\lambda T}}-1)^{-1}$ 中光波长 λ 的定义域方程为 $10^n x_j^5-21.2014e^{x_j}+21.2014=0$. 利用该光波长的定义域方程取计算精度因子 $n=6$，计算出温度为 200K 时的长波长界是 1050.986μm，温度为 6000K 时的短波长界为 87.855nm. 说明在大多数工程实践可能涉及的温度范围内，当计算精度为百万分之一时，普朗克公式中光波长的定义域即是 87.855nm 到 1050.986μm.

关键词：普朗克公式 光波长 定义域方程 计算精度因子

中图法分类号：O431.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2006)03-0194-02

Abstract: A concept of definitive range on the light wavelength in Planck formula: $e_b(\lambda,T)=\frac{C_1}{\lambda^5}(e^{\frac{C_2}{\lambda T}}-1)^{-1}$ and a method of computing the definitive range are presented in this paper. Give an accuracy factor n, using the planck formula, and deduce the equation of definitive range on the light wavelength $10^n x_j^5-21.2014e^{x_j}+21.2014=0$. Based on the developing equation of definitive range of light wavelength we have calculated with accuracy factor $n=6$ that the long wavelength point at temperature 200K and the short wavelength point at temperature 6000K are 1050.986nm to 87.855nm respectively. Therefore, the definitive range of the light wavelength in Planck formula at most of all the temperature in engineering practice will be defined within computing factor of millionth as 87.855nm to 1050.986μm.

Key words: planck formula, light wavelength, equation of definitive range, accuracy factor of computing

100 多年前，普朗克根据他提出的光量子假设，导出描述黑体热辐射规律的普朗克公式[1]

$$e_b(\lambda,T)=\frac{C_1}{\lambda^5}(e^{\frac{C_2}{\lambda T}}-1)^{-1}, \qquad (1)$$

式中黑体热辐射度 e_b 是以开尔文温度 T 和辐射光波长 λ 为自变量的二元函数；$C_1=3.7415\times10^{-4}\mathrm{W}\cdot\mu\mathrm{m}^2$，$C_2=1.4388\times10^4\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}$ 是两个普适常数. (1) 式中的 T 是由实际工程技术问题决定的，例如，对于太阳表面的热辐射，一般认为其值为 6000K[2]；而地球表面的辐射温度取 200K 到 350K 就足够了，也就是说，(1) 式中温度 T 的定义域(取值范围)可以是 200K 到 6000K. (1) 式中光波长的取值问题，早年有以下的讲述. 首先，根据维恩位移定律[1]

$$\lambda_m T=2897.8\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K} \qquad (2)$$

说明，温度越高，辐射峰值 e_{bm} 对应的光波长 λ_m 越短，并可以由给定的温度计算出这一峰值点波长的值. 其次，由斯蒂芬-玻耳兹曼定律[1]

收稿日期：2005-12-13

修回日期：2006-03-22

作者简介：陈广生(1979-)，男，广西北流人，助教，主要从事黑体热辐理论与小波分析应用研究。

*广西自然科学基金项目(桂科自 0542046)。

$$\int_0^\infty e_b(\lambda,T)\mathrm{d}\lambda = \sigma T^4 \tag{3}$$

表明，当时是把热辐射光波长的取值范围定为 0～∞ 这一极限情况来处理的. (3) 式中常数 $\sigma = 5.669 \times 10^{-20}\mathrm{W}/\mu\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4$. 然而作为热(温度)辐射的光波长，实际上绝对不可能含有 0 或 ∞ 的成份. 长期以来，光波作为电磁波的一部分，其波长范围的取值总不十分明确. 文献上见到的一些光波长取值范围情况是 1nm ～0.1mm[3] 或者 0.3～50μm[4] 等等. 由此看来，在温度 T 时，普朗克公式中 λ 的取值范围(定义域)还是一个有待研究的课题. 本文引进一个计算精度因子 n，导出了(1) 式中光波长 λ 的定义域方程，并根据此方程给出初步的计算结果.

1 黑体热辐射光波长的定义域方程

温度为 $T_j(j=1,2,3\cdots)$ 时，(1) 式的辐射度 e_{bj} 与光波长 λ 的关系曲线如图 1 所示. 图 1 中 e_{bj} 的峰值 e_{bmj} 是温度 T_j 和光波长为 λ_m 时的值. 把 e_{bmj} 降低到 10^{-n} 倍之后的值是 e_{bj}. 由图 1 可见，根据(1) 式让 e_{bj} 满足 $10^n e_{bj} = e_{bmj}$ 便可以建立起关系式：

$$\frac{10^n C_1}{\lambda^5}\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T_j}}-1\right)^{-1} = \frac{C_1}{\lambda_m^5}\left(e^{\frac{C_2}{\lambda_m T_j}}-1\right)^{-1}. \tag{4}$$

作变换

$$x_j = \frac{C_2}{\lambda T_j}, \tag{5}$$

并利用(2) 式和 C_2 的值，(4) 式即可简化成

$$10^n x_j^5 - 21.2014 e^{x_j} + 21.2014 = 0. \tag{6}$$

(6) 式即是我们要寻找的普朗克公式中光波长的定义域方程. 该方程的两个根 $x_{js}(n)$ 和 $x_{jl}(n) < x_{js}(n)$ 分别对应着图 1 中标明的“短波”长界 λ_{jsn} 和“长波”长界 λ_{jln}. 由(5) 式定义出以下 $C_{js}(n)$ 与 $C_{jl}(n)$ 之后，

$$C_{js}(n) = \frac{C_2}{x_{js}(n)}, \tag{7}$$

$$C_{jl}(n) = \frac{C_2}{x_{jl}(n)}, \tag{8}$$

就可以把给定温度 T_j 和计算精度因子 n 时的光波长定义域 λ_{jsn} 与 λ_{jln} 表达成

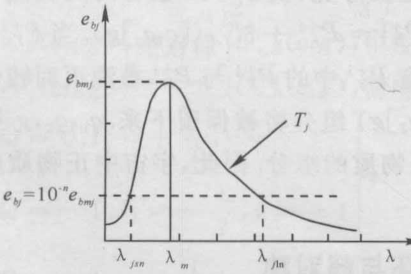

图 1 热辐射度 e_{bj} 与光波长 λ 的关系曲线

Fig. 1 Relation of radiant emittance e_{bj} on the wavelength λ

$$\lambda_{jsn} = \frac{C_{js}(n)}{T_j}; \tag{9}$$

$$\lambda_{jln} = \frac{C_{jl}(n)}{T_j}. \tag{10}$$

2 数值计算结果

(6) 式是一个超越方程，其解的可信度可以由在给定计算精度内满足(6) 式，或者满足由(4) 式导出的以下式子来检验.

$$\left(\frac{x_{jl}(n)}{x_{js}(n)}\right)^5\left(\frac{e^{x_{js}(n)}-1}{e^{x_{jl}(n)}-1}\right) = 1. \tag{11}$$

为了确定(1) 式中光波长的最大取值范围(定义域)，这里只针对实际上可能出现的最大温度范围 $T_1 = 200\mathrm{K}$ 和 $T_2 = 6000\mathrm{K}$，并取 $n=6$ 计算出 T_1 时的长波长界 λ_{1l6} 和 T_2 时的短波长界 λ_{2s6} 之值. 即在方程(6) 式中给定计算精度因子 $n=6$，解出 $x_{1l}(6) = 0.068450$ 和 $x_{2s}(6) = 27.294952$. 这样由(7) 式和(8) 式即得到 $C_{1l}(6) = 527.130438\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}$；$C_{2s}(6) = 210197.224251\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}$，将其代入(9) 式和(10) 式得到 $\lambda_{1l6} = 1050.986\mu\mathrm{m}$，$\lambda_{2s6} = 87.855\mathrm{nm}$. 该计算结果表明，普朗克公式中光波长的定义域(最大取值范围)在百万分之一计算精度内是 87.855nm ～ 1050.986μm. 当然，根据不同的温度范围和不同的计算精度要求，(1) 式中光波长的定义域肯定会有所不同，但是只要 n 和 T_j 给定之后，λ 的定义域便被唯一确定了.

为了评估以上计算结果在热辐射能量(功率)方面引起的误差，利用(3) 式这一极限结果，定义温度为 T_j 时与 n 相关的误差函数

$$\eta_j(n) = \left|1 - \frac{1}{\sigma T_j^4}\int_{\lambda_{jsn}}^{\lambda_{jln}} e_b(\lambda,T_j)\mathrm{d}\lambda\right|. \tag{12}$$

经计算 $T_1 = 200\mathrm{K}$ 时，$\eta_1(6) = 9\times10^{-6}$；$T_2 = 6000\mathrm{K}$ 时，$\eta_2(6) = 9\times10^{-6}$. 这样的误差在一般工程应用中已经是足够的了.

3 结束语

在某一温度点或一定温度范围内，如何确定普朗克公式中光波长的取值范围，过去一直都没有一个明确的理论表述，只是有一些带随意性的结果. 本文首次提出了(1)式中光波长的定义域概念和确定其定义域的方法. 由导出的普朗克公式中光波长的定义域方程(6)式，计算出了精度因子 $n=6$，200K 温度时的长波长界为 1050.986μm；350K 温度时的短波长界是 1.506μm. 也就是说，在地球表面可能的热辐射温度范围内，以百万分之一的精度计算，其光波长定义域

(下转第 202 页 Continue on page 202)

证明 “$\Rightarrow$”任意 $f(x) \in W_j$，由于 $\{\psi_{j,k}: k \in Z\}$ 是 W_j 的 Riesz 基，所以存在数列 $\{C_{j,k}\}$ 使得

$$f(x) = \sum_k C_{j,k}\psi_{j,k}(x) = \sum_k C_{j,k}2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

这样

$$f(2x) = \sum_k C_{j,k}2^{j/2}\psi(2^{j+1}x - k) = \sum_k C_{j,k}2^{-1/2}\psi_{j+1,k}(x) \in W_{j+1}.$$

“$\Rightarrow$”若 $f(2x) \in W_{j+1}$，则存在数列 $\{C_{j+1,k}\}$ 使得

$$f(2x) = \sum_k C_{j+1,k}\psi_{j+1,k}(x) = \sum_k C_{j+1,k}2^{\frac{j+1}{2}}\psi(2^{j+1}x - k),$$

从而

$$f(x) = \sum_k C_{j+1,k}2^{1/2}2^{j/2}\psi(2^j x - k) = \sum_k C_{j+1,k}2^{1/2}\psi_{j,k}(x) \in W_j.$$ 证毕.

定理 2.3 $V_j = W_{j-1} \dotplus V_{j-1} = W_{j-1} \dotplus W_{j-2} \dotplus \cdots \dotplus W_{j-M} \dotplus V_{j-M} = W_{j-1} \dotplus W_{j-2} \dotplus \cdots, L^2(R) = \cdots \dotplus W_{-1} \dotplus W_0 \dotplus W_1 \dotplus \cdots$.

证明 V_j 的第 2 个分解式是因为 $\bigcap_k V_j = \{0\}$，$L^2(R)$ 的分解式是因为 $\overline{\bigcup V_j} = L^2(R)$.

参考文献：

[1] 迈耶.小波与算子[M].尤众，译.北京：北京世界图书出版社，1992.

[2] 成礼智，王红霞，罗永.小波的理论与应用[M].北京：科学出版社，2004.

[3] 冯象初，甘小冰，宋国乡.数值泛函与小波理论[M].西安：西安电子科技大学出版社，2003.

[4] 程正兴.小波分析算法与应用[M].西安：西安交通大学出版社，2000.

[5] 崔锦泰.小波分析导论[M].程正兴，译.西安：西安交通大学出版社，1995.

[6] MALLAT S.信号处理的小波导引[M].杨力华，译.北京：机械工业出版社，2002.

[7] 李水根.分形与小波[M].北京：科学技术出版社，2002.

[8] DAUBECHIE I. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia：SIAM Publ，1992.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）

（上接第 195 页 Continue from page 195）

是从 1.506～1050.986μm.这一理论结果证明，文献[5]中用 $T = 300$K，$\lambda = 3$cm 或 $\lambda = 3.5$cm 来作“微波遥感”的理论分析是不适宜的.因为在 $T_3 = 300$K 温度时，$\lambda_{3/6}$ 仅为 700.657μm，热辐射波长根本不可能延伸到 3cm 或 3.5cm 这样波长的微波领域.这便是本文研究结果在应用上的重要价值之一.

参考文献：

[1] 李景镇.光学手册[M].西安：陕西科学出版社，1986.

[2] 程守洙，江之永.普通物理学[M].北京：高等教育出版社，2001.

[3] オプトㄈ ム.光通信用语 96[J].オプトコ ム，1996(7)：1.

[4] 斯帕罗 E M.辐射传热[M].北京：高等教育出版社，1982.

[5] 邓明德，尹京苑，刘西垣，等.黑体辐射公式的积分解及应用[J].遥感信息，2002(1)：2-10.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）