广西科学 Guangxi Sciences 2006,13(3):180~183

一类2n 次 Kolmogorov 系统的极限环*

The Limit Cycle of a Class of 2n-degree Kolmogorov's System

张 理,黄文韬

ZHANG Li,HUANG Wen-tao

(桂林电子工业学院计算科学与数学系,广西桂林 541004)

(Department of Computational Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:研究一类 $2n$ 次 Kolmogorov 系统 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a_0-a_1x+a_3x^3-a_4x^4+a_5xy^{2n-1}),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(b_1x^{2n}-b_2),\end{cases}$ 极限环的存在性问题.主要讨论 $a_5>0$ 和 $a_5<0$ 两种情形.当 $a_5>0$ 时,系统在第一象限内不存在极限环;当 $a_5<0$ 时,得到了平衡点的稳定性态,系统无闭轨的充分条件以及在第一象限内存在稳定极限环的条件.

关键词:Kolmogorov 系统 极限环 闭轨

中图法分类号:O175.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2006)03-0180-04

Abstract:The problem about the existence of a limit cycle of a class of $2n$-degree Kolmogorov's system $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a_0-a_1x+a_3x^3-a_4x^4+a_5xy^{2n-1}),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(b_1x^{2n}-b_2),\end{cases}$ is studied, and the system is discussed mainly when $a_5>0$ and $a_5<0$, respectively. A system has not limit cycles in the first quadrant when $a_5>0$. The stability of equilibrium,the sufficient conditions of nonexistence of closed orbits and the conditions of existence of a stable limit cycles of the system in the first quadrant are obtained when $a_5<0$.

Key words:Kolmogorov's system,limit cycle,closed orbit

关于两种群相互作用的一般模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=xF_1(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=yF_2(x,y),\end{cases}\tag{1}$$

称之为 Kolmogorov 生态系统模型,它描述的是两种群之间的捕食与被捕食作用、相互竞争作用以及互惠共存作用,其中 x,y 分别表示两种群的密度,根据生态学意义它们在区域 $G=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$ 中变动,对 $F_1(x,y)$,$F_2(x,y)$ 均为二次多项式的系统已有大量的研究[1~3].文献[4,5]分别讨论了一类 n 次和 $n+1$ 次 Kolmogorov 系统极限环的存在性问题,其中 $F_1(x,y)$ 是 n 次和 $n+1$ 次多项式,而 $F_2(x,y)$ 只是二次和三次多项式.考虑一类 $2n$ 次 Kolmogorov 系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a_0-a_1x+a_3x^3-a_4x^4+a_5xy^{2n-1}),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(b_1x^{2n}-b_2),\end{cases}\tag{2}$$

其中 $a_0,b_1,b_2>0$,a_1,a_3,a_4,a_5 不定号,且 $\dfrac{a_1}{a_0}=\dfrac{a_4}{a_3}$,$a_3a_5\neq 0$,$n\geqslant 3$,$n\in N$,它们各代表一定的生态学意义[1].本文主要在区域 G 上讨论系统(2)平衡点的性态以及在第一象限内极限环的存在性.

收稿日期:2005-11-15

修回日期:2006-03-16

作者简介:张理(1980-),男,安徽安庆人,桂林电子工业学院计算科学与数学系硕士研究生,主要从事微分方程定性理论方面的研究。

*广西科学基金(0575092)资助。

1 $a_5>0$的情形

作变换

$$x=(\frac{b_2}{b_1})^{\frac{1}{2n}}\bar{x},y=(\frac{a_0}{a_5})^{\frac{1}{2n-1}}(\frac{b_1}{b_2})^{\frac{1}{2n(2n-1)}}\bar{y},t=\frac{1}{a_0}\bar{t},$$

那么系统(2)的轨线走向不变,仍记 $\bar{x},\bar{y},\bar{t}$ 为 x,y,t,则系统(2)可化为等价系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(1-A_1x+A_3x^3-A_4x^4+xy^{2n-1})\triangleq \\ P_1(x,y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yA_0(x^{2n}-1)\triangleq Q_1(x,y),\end{cases}\qquad(3)$$

其中 $A_0=\frac{b_2}{a_0}>0,A_1=\frac{a_1}{a_0}\sqrt[2n]{\frac{b_2}{b_1}},A_3=\frac{a_3}{a_0}\sqrt[2n]{(\frac{b_2}{b_1})^3}$,$A_4=\frac{a_4}{a_0}\sqrt[2n]{(\frac{b_2}{b_1})^4}$,$A_1,A_3,A_4$ 不定号,易知 $A_1A_3=A_4$.

记 $\lambda=1-A_1+A_3-A_4,x_1=1/A_1,x_2=-\sqrt[3]{1/A_3}$,若 $\lambda\geqslant 0$ 时,系统(3)在 G 内除平衡点 $(0,0)$,$A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$ 外再无其它的平衡点,故在第一象限内不存在极限环. 若 $\lambda<0$,则系统(3)在 G 上有 4 个平衡点 $O(0,0)$,$A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,$C(1,y_1)$(其中 $y_1=\sqrt[2n-1]{-\lambda}>0$).

定理 1.1 (Ⅰ)平衡点 $O(0,0)$ 是系统(3)的鞍点;当 $\lambda<0$ 时,平衡点 $C(1,y_1)$ 是系统(3)的鞍点.

(Ⅱ)当 $(1+A_0)A_1^{2n}\neq A_0-A_3A_1^{2n-3}$ 时,若 $A_1>1$,则平衡点 $A(x_1,0)$ 是系统(4)的鞍点或稳定结点;若 $0<A_1<1$,则平衡点 $A(x_1,0)$ 是系统(4)的鞍点或不稳定结点.

(Ⅲ)当 $A_0-3A_1\sqrt[3]{A_3^{2n-1}}\neq(3+A_0)\sqrt[3]{A_3^{2n}}$ 时,若 $A_3<-1$,则平衡点 $B(x_2,0)$ 是系统(4)的鞍点或稳定结点;若 $-1<A_3<0$,则平衡点 $B(x_2,0)$ 是系统(4)的鞍点或不稳定结点.

证明 由系统(3)知

$$\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial x}=1-2A_1x+4A_3x^3-5A_4x^4+2xy^{2n-1},\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y}=(2n-1)x^2y^{2n-2},\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x}=2nA_0yx^{2n-1},\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial y}=A_0(x^{2n}-1).$$

令 $p_1(x,y)=\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial y}$,

$q_1(x,y)=\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y}$.

(Ⅰ)因为 $q_1(0,0)=-A_0<0$,所以平衡点 $O(0,0)$ 是鞍点. 又 $q_1(1,y_1)=2n(2n-1)A_0\lambda$,故 $\lambda<0$ 时,平衡点 $C(1,y_1)$ 是系统(3)的鞍点.

(Ⅱ) $q(x_1,0)=-A_0(1+A_3x_1^3)(x_1^{2n}-1)$,$p(x_1,0)=-(1+A_3x_1^3)+A_0(x_1^{2n}-1)$.

当 $A_1>1$ 时,①若 $A_3>-A_1^3$,即 $1+A_3x_1^3>0$,则 $q(x_1,0)<0$,故平衡点 A 为鞍点;②若 $A_3<-A_1^3$,又 $(1+A_0)A_1^{2n}\neq A_0-A_3A_1^{2n-3}$,则 $q(x_1,0)>0$,$P(x_1,0)<0$,$\Delta=p^2(x_1,0)-4q(x_1,0)>0$,故平衡点 A 为稳定的结点. 同理当 $0<A_1<1$ 时,则平衡点 A 为鞍点或不稳定结点. 即结论(Ⅱ)成立.

(Ⅲ)在平衡点 $B(x_2,0)$ 处有 $q_1(x_2,0)=3A_0(-1+A_1x_2)(x_2^{2n}-1)$,$p_1(x_2,0)=3(-1+A_1x_2)+A_0(x_2^{2n}-1)$,当 $A_3<-1$ 时,①若 $A_3+A_1^3>0$,则 $q(x_2,0)<0$,故平衡点 B 为鞍点;②若 $A_3+A_1^3>0$,则有 $q_1(x_2,0)>0$,$p_1(x_2,0)>0$,$\Delta=p_1^2(x_2,0)-4q_1(x_2,0)>0$,则平衡点 B 是稳定的结点;同理可以证明当 $-1<A_3<0$ 时,则平衡点 B 是鞍点或不稳定结点. 证毕.

由定理1.1知,系统(3)在第一象限内不存在极限环.

2 $a_5<0$的情形

作变换

$$x=(\frac{b_2}{b_1})^{\frac{1}{2n}}\bar{x},y=(-\frac{a_0}{a_5})^{\frac{1}{2n-1}}(\frac{b_1}{b_2})^{\frac{1}{2n(2n-1)}}\bar{y},t=\frac{1}{a_0}\bar{t},$$

仍记 $\bar{x},\bar{y},\bar{t}$ 为 x,y,t,则系统(2)化为等价系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(1-A_1x+A_3x^3-A_4x^4-xy^{2n-1})\triangleq \\ P(x,y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yA_0(x^{2n}-1)\quad\triangleq Q(x,y),\end{cases}\qquad(4)$$

其中 $A_0=\frac{b_2}{a_0}>0,A_1=\frac{a_1}{a_0}\sqrt[2n]{\frac{b_2}{b_1}},A_3=\frac{a_3}{a_0}\sqrt[2n]{(\frac{b_2}{b_1})^3}$,$A_4=\frac{a_4}{a_0}\sqrt[2n]{(\frac{b_2}{b_1})^4}$,$A_1,A_3,A_4$ 符号不定,容易看出 $A_1A_3=A_4$.

2.1 平衡点的性态

记 $\lambda=1-A_1+A_3-A_4,x_1=1/A_1,x_2=-\sqrt[3]{1/A_3},h=-1+2A_3-3A_4$,若 $\lambda\leqslant 0$ 时,系统(4)在 G 内只有平衡点 $(0,0)$,$A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,故在第一象限内系统(4)不存在极限环. 因而讨论系统(4)的极限环,只需考虑 $\lambda>0$ 的情形,当 $\lambda>0$ 时系统(4)在 G 上有 4 个平衡点 $O(0,0)$,$A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,$C(1,y_2)$(其中 $y_2=\sqrt[2n-1]{\lambda}>0$).

定理 2.1 (Ⅰ)平衡点 $O(0,0)$ 是系统(4)的鞍点.

(Ⅱ)当$\lambda > 0$时，若$h > 0$，则平衡点$C(1,y_2)$为系统(4)的不稳定的焦点或结点；若$h < 0$，则平衡点$C(1,y_2)$为系统(4)的稳定的焦点或结点.

(Ⅲ)当$(1+A_0)A_1^{2n} \neq A_0 - A_3A_1^{2n-3}$时，若$A_1 > 1$，则平衡点$A(x_1,0)$是系统(4)的鞍点或稳定结点；若$0 < A_1 < 1$，则平衡点$A(x_1,0)$是系统(4)的鞍点或不稳定结点.

(Ⅳ)当$A_0 - 3A_1\sqrt[3]{A_3^{2n-1}} \neq (3+A_0)\sqrt[3]{A_3^{2n}}$时，若$A_3 < -1$，则平衡点$B(x_2,0)$是系统(4)的鞍点或稳定结点；若$-1 < A_3 < 0$，则平衡点$B(x_2,0)$是系统(4)的鞍点或不稳定结点.

证明 令

$p(x,y) = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$，$q(x,y) = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$.

由系统(4)知

$q(0,0) = -A_0 < 0$，$q(1,y_2) = 2n(2n-1)A_0\lambda > 0$，$p(1,y_2) = -1 + 2A_3 - 3A_4 = h$，

因此平衡点$O(0,0)$是系统(4)的鞍点，即(Ⅰ)成立. 当$h < 0$时，正平衡点C为稳定的焦点或结点；当$h < 0$时，正平衡点C为不稳定的焦点或结点，这时(Ⅱ)成立.

由定理1.1可知(Ⅲ)和(Ⅳ)成立.

2.2 闭轨线的不存在性

定理2.2 如果$0 < A_1 < 1$，$0 < A_3 < 4A_1^3$且$h < 0$，那么系统(4)在G内无闭轨.

证明 假设系统(4)在G内存在闭轨L，则闭轨必存在于带状区域$E = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant x_1, y \geqslant 0\}$内. 不妨设$L$是距离平衡点$C(1,y_2)$最近的一条闭轨线，$T$是$L$的周期，则系统(4)沿$L$的发散量积分为

$$\oint_L \mathrm{div}(P,Q)\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}t = -\int_0^T x(4A_4x^3 - 3A_3x^2 + A_1)\mathrm{d}t - \int_0^T xy^{2n-1}\mathrm{d}t.$$

记$H(x) = 4A_4x^3 - 3A_3x^2 + A_1$，则$H'(x) = 12A_4x^2 - 6A_3x$，令$H'(x) = 0$，得$x = x^* = \dfrac{1}{2A_1}$，于是$\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant x'} H(x) = \min\{H(0), H(x_1), H(x^*)\}$，

$H(x^*) = -\dfrac{A_3 - 4A_1^3}{4A_1^2} > 0$，$H(0) = A_1 > 0$，

$H(x_1) = \dfrac{A_1^3 + A_3}{A_1^2} > 0$，故$H(x) > 0$，从而发散量积分$\oint_L \mathrm{div}(P,Q)\mathrm{d}t < 0$，由极限环指数理论[6]知$L$是稳定的极限环，于是平衡点$C(1,y_2)$是不稳定的，但若$0 < A_1 < 1$，$0 < A_3 < 4A_1^3$，则$\lambda > 0$，又$h < 0$，从定理2.1中可知平衡点$C(1,y_2)$是稳定的，矛盾，因此定理得证.

2.3 极限环的存在性

定理2.3 如果$0 < A_1 < 1$，$A_3 > 0$且$h > 0$，那么系统(4)在第一象限内围绕$C(1,y_2)$至少存在一个稳定的极限环.

证明 由定理2.1知，当$0 < A_1 < 1$，$A_3 > 0$且$h < 0$时，$\lambda > 0$，C是不稳定的指标为$+1$的非中心平衡点，这时$x_1 = \dfrac{1}{A_1} > 1$，平衡点C位于$x = x_1$左侧.

作直线$L_1: x - x_1 = 0$，因为

$$\frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4)} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{L_1=0} = -x_1^2y^{2n-1} < 0,$$

当$y > 0$时，系统(4)的轨线通过直线L_1时，在上半平面($y > 0$)是定号的(由外向内穿入)，即直线L_1在上半平面是系统(4)的无切直线.

作直线$L_2: x + \ln y - k = 0$，因为

$$\frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4)} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{L_2=0} = x - A_1x^2 + A_3x^4 - A_4x^5 - x^2e^{(2n-1)(k-x)} + A_0(x^{2n}-1),$$

令$\zeta(x) = x + \dfrac{1}{2n-1}\ln\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{A_0}{x^2} - A_1 + A_3x^2 - A_4x^3 + A_0x^{2(n-1)}\right]$，$M$表示$\zeta(x)$上确界，取$k > \max\{M, \lambda+1\}$，则$\dfrac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4)} < 0$，即系统(4)的轨线通过直线$L_2$时是定号的(由上而下穿入)，直线$L_2$是系统(4)的无切直线.

而直线$L_3: x = 0$与$L_4: y = 0$是系统(4)的积分直线，所以L_1, L_2, L_3和L_4所围成区域构成一个Poincare-Bendixson环域，在此环域内除了C点外再无其它的平衡点，且C点不稳定，根据环域理论[7]可知系统(4)在第一象限围绕点$C(1,y_2)$至少存在一个稳定的极限环.

定理2.4 如果$A_1 < 0$，$A_3 > 0$且$(3-2n)^4A_3 < 256n(n-2)^3A_1^3$，那么系统(4)在第一象限内围绕$C(1,y_2)$至多存在一个稳定的极限环.

证明 作变换

$$z = x - 1, \quad w = y - \sqrt[2n-1]{\lambda},$$

系统(4)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = (z+1)[1 - A_1(z+1) + A_3(z+1)^3 - \\ \qquad A_4(z+1)^4 - (z+1)(w + \sqrt[2n-1]{\lambda})^{2n-1}], \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = A_0(w + \sqrt[2n-1]{\lambda})[(z+1)^{2n} - 1]. \end{cases} \tag{5}$$

再作变换

$$z = u, \quad w = \sqrt[2n-1]{\lambda}(e^v - 1), \quad \tau = (u+1)^2t,$$

则系统(5)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=-F(u)-\varphi(v),\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=g(u),\end{cases}\tag{6}$$

这里 $\varphi(v)=\lambda(e^{(2n-1)v}-1)$，$F(u)=-1/(u+1)+A_1-A_3(u+1)^2+A_4(u+1)^3+\lambda$，

$$g(u)=\frac{A_0[(u+1)^{2n}-1]}{(u+1)^2},$$

令 $f(u)=F'(u)=(u+1)^{-2}-2A_3(u+1)+3A_4(u+1)^2$.

由所作的变换知 $u+1=0$ 是积分直线，因此系统(6)存在的极限环只能在区域 $u+1>0$，即 $u>-1$ 内. 当 $u>-1$ 时，

(i) 因 $g(u)=\dfrac{A_0[(u+1)^{2n}-1]}{(u+1)^2}$，故 $ug(u)=A_0u\dfrac{(u+1)^{2n}-1}{(u+1)^2}>0(u\neq 0)$.

设 $G(u)=\int_0^u g(u)\mathrm{d}u=A_0[\dfrac{(u+1)^{2n-1}}{2n-1}-\dfrac{n}{n+1}]$，则 $G(+\infty)=G(-1+0)=+\infty$.

(ii) $\varphi(+\infty)=+\infty$，$\varphi(-\infty)=-\lambda$，$v\varphi(v)=v\lambda(e^{(2n-1)v}-1)>0(v\neq 0)$.

又 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(v)=(2n-1)\lambda e^{(2n-1)v}>0$，则 $\varphi(v)$ 严格单调增加.

(iii) $F(0)=0$，$f(0)=1+2A_3+3A_4=h<0$，且当 $u\neq 0$ 时，有

$$\frac{f(u)}{g(u)}=\frac{1-2A_3(u+1)^3+3A_4(u+1)^4}{A_0[(u+1)^{2n}-1]},$$

故

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[\dfrac{f(u)}{g(u)}]=(2(u+1)^{2n-1}[(6-3n)A_4(u+1)^4+(2n-3)A_3(u+1)^3-n]+6(u+1)^2[-2A_4(u+1)+A_3])/A_0[(u+1)^{2n}-1]^2$.

令 $h(u)=(6-3n)A_4(u+1)^4+(2n-3)A_3(u+1)^3-n$ 与 $h'(u)=0$，则 $u=u^*=\dfrac{3(3-2n)A_3}{4(6-3n)A_4}-1$，

而 $h(u^*)=\dfrac{(3-2n)^4A_3-256n(n-2)^3A_1^3}{128(n-2)^3A_1^3}$，由于 $A<0$，$A_3>0$ 且 $(3-2n)^4A_3<256n(n-2)^3A_1^3$，故 $h(u^*)>0$，因此当 $u>-1$ 且 $u\neq 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[\dfrac{f(u)}{g(u)}]>0$. 从而得知系统(6)满足张芷芬唯一性定理[8]的一切条件，故系统(6)在 (u,v) 平面上围绕原点至多存在一个极限环，若存在，则是稳定的.

参考文献：

[1] 陈兰荪. 数学生态模型与研究方法[M]. 北京：科学出版社，1998.

[2] 陈兰荪，井竹君. 捕食者-食饵相互作用中微分方程的极限环存在性和唯一性[J]. 科学通报，1984，29(9)：521-523.

[3] 宋国华. 一类 Kolmogorov 系统的极限环[J]. 生物数学学报，1986，1(2)：101-108.

[4] 李万同. 一类 n 次 Kolmogorov 系统的极限环[J]. 应用数学，1992，5(2)：13-17.

[5] 颜向平，张存华，张飞羽，等. 一类 $n+1$ 次 Kolmogorov 系统的极限环[J]. 兰州大学学报，2004，40(2)：1-4.

[6] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海：上海科学技术出版社，1986.

[7] 张锦炎，冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京：北京大学出版社，2002.

[8] 张芷芬. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1997.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）

太阳系行星新定义

美国天文科学家提出新的行星定义。新的行星定义包括两点：一是行星必须是围绕恒星运转的天体；二是行星的质量必须足够大，它自身的重力必须和表面力平衡使其形状呈圆球。一般来说，行星的直径必须在800km以上，质量必须在50亿亿吨以上。按照这一定义，目前太阳系内有12颗行星，分别是：水星、金星、地球、火星、谷神星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星、原先被认为是冥王星卫星的“卡戎”和一颗暂时编号为“2003UB313”的天体。科学家们不排除将来太阳系中会有更多符合标准的天体被列为行星。目前在天文学家的观测名单上有可能符合行星定义的太阳系内天体就有10颗以上。在新的行星标准之下，科学家们还确定了一个新的次级定义——“类冥王星”。这是指轨道在海王星之外、围绕太阳运转周期在200年以上的行星。在符合新定义的12颗太阳系行星中，冥王星、“卡戎”和“2003UB313”都属于“类冥王星”。天文学家认为，“类冥王星”的轨道通常不是规则的圆形，而是偏心率较大的椭圆形。这类行星的来源，很可能与太阳系内其他行星不同。随着观测手段的进步，天文学家还有可能在太阳系边缘发现更多大天体。未来太阳系的行星名单如果继续扩大，新增的也将是“类冥王星”。

（据科学网）