广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(3)：175～176

多连通区域上一类带开方的 Riemann 边值问题*

On Solution of a Kind of Riemann Boundary Value Problem With Squal Roots Under Jumping Curve

刘志伟
LIU Zhi-wei

(广西梧州师范高等专科学校，广西贺州 542800)
(Guangxi Wuzhou Normal College, Hezhou, Guangxi, 542800, China)

摘要：在由 L 分割的复平面是 L 围成的区域 S^+ 和由 $l+1$ 个连通分支 S_i^- $(i=0,1,2,\cdots,l)$ 组成的开集 S^- 情形下，求出边值问题 $\sqrt{\psi^+(t)}=G(t)\sqrt{\psi^-(t)}+g(t)$ 的一般解为 $\psi(z)=\prod(z)X(z)^2(\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)dt}{X^+(t)\sqrt{\prod(t)}(t-z)}+P_\lambda(z))^2$.

关键词：Riemann 边值问题　指标　多连通区域

中图法分类号：O175.5　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)03-0175-02

Abstract: In this paper, The general solution of analytic functions boundary value problem $\sqrt{\psi^+(t)}=G(t)\sqrt{\psi^-(t)}+g(t)$ is discussed when the complex plane is divided into a region S^+ and an open set S^- by many smooth closed contours and $\varphi^-(z)$ has a finite order a $z=\infty$, the general solution: $\psi(z)=\prod(z)X(z)^2(\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)dt}{X^+(t)\sqrt{\prod(t)}(t-z)}+P_\lambda(z))^2$ of analytic functions boundary value problem $\sqrt{\psi^+(t)}=G(t)\sqrt{\psi^-(t)}+g(t)$ is given.

Key words: Riemann boundary value problem, index order at infinity, multiply connected region

文献[1,2]中已经讨论了边值问题

$$\sqrt{\psi^+(t)}=G(t)\sqrt{\psi^-(t)}+g(t) \tag{1}$$

的解.给出的边值问题的解中 L 只是一条光滑的简单闭曲线，将全复平面分割成两个在扩充的复平面上单连通的区域 S^+ 与 S^-.本文在由 L 分割的复平面是 L 围成的区域 S^+ 和由 $l+1$ 个连通分支 S_i^- $(i=0,1,2,\cdots,l)$ 组成的开集 S^- 情形下，求出边值问题(1)的一般解.其中 $\psi(z)$ 是以 L 为跳跃曲线的分区解析函数，并且在 $z=\infty$ 处有 k 阶极点(当 $k<0$ 时是 $-k$ 阶零点).函数 $\psi(z)$ 在 L 上具有可积奇性有限个点，且是 $H\ddot{o}lder$ 连续的.

以 $a_i(i=1,2,\cdots,m_1)$ 记 $\psi^+(z)$ 在 S^+ 中的奇数阶的零点，下面按所述的方法从边界 $L_1,\cdots,L_l$ 取点 c_i：如果 γ_i 是 S^+ 中一条充分接近 L_i 的简单闭围线，当 $\Delta_{\gamma_i}\arg\psi^+(t)$ 为 2π 的奇数倍时在 L_i 上取一个点 c_i(如果 $\Delta_{\gamma_i}\arg\psi^+(t)$ 为 2π 的偶数倍则不取).如果 m_1+m_2 为奇数，则在 L_0 上补充一个点 c_i 使上面方法所取到的点的个数 m_1+m_2 为偶数.设这样取到的点有 $m_1+m_2=2N$ 个.令

$$\prod_a(z)=\prod_{i=1}^{m_1}(z-a_i),\prod_c(z)=\prod_{i=1}^{m_2}(z-c_i),$$

$$\phi_1^+(z)=\frac{\psi^+(z)}{\prod_a(z)\prod_c(z)},\phi_0^+(z)=\sqrt{\phi_1^+(z)}.$$

以下证明用 $\phi_0^+(z)$ 在区域 S^+ 中单值解析.由于所有零点为偶数阶的多项式开方后仍然是单值的，因此不妨设 $\phi_1^+(z)\neq 0|_{z\in S^+}$.

设曲线 γ_i 是 S^+ 中一条充分接近 L_i 的任意简单闭围线，由零点 c_i 的选取可知有

$$\Delta_{\gamma_i}\arg\psi^+(t)-\Delta_{\gamma_i}\arg\prod_c(t)$$

是 2π 的偶数倍而 a_i 在 L_i 的外部，因此

$$\Delta_{\gamma_i}\arg\vartheta_1^+(t)$$

是 2π 的偶数倍，故 $\phi_0^+(z)$ 沿 $\gamma_i(i=1,\cdots,l)$ 一周时值

收稿日期：2005-10-12
作者简介：刘志伟(1963-)，男，广西贺州人，副教授，主要从事函数论研究。
* 广西自然科学基金(0249001)资助项目。

不变. 由于 m_1+m_2 是偶数,因此可以在 S^+ 中定义 $\sqrt{\prod_a(z)\prod_c(z)}$ 的单值解析分支.

因为

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{L_0}\arg\phi^+(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\phi_1^{+'}(t)}{\phi_1^+(t)}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{l}\int_{\gamma_i}\frac{\phi_1^{+'}(t)}{\phi_1^+(t)}\mathrm{d}t$$

应该是偶数,所以证明了 $\phi_0^+(z)$ 在区域 S^+ 中单值解析.

再以 $b_j^{(i)}$ 记 $\psi^-(t)$ 在 S_i^- 中的奇数阶的零点,并且设其个数为 $2l_i$ 个,如果 $\psi^-(z)$ 在 S_i^- 中只有奇数个奇数阶的零点,则由 $\psi^-(t)$ 在 L_i 上的单值性类似可取 $b_{2l_i}^{(i)}\in L_i$ 作为补充,这里 $i=1,\cdots,l,j=1,\cdots,2l_i$. 设 $\psi^-(z)$ 在区域 S_0^- 中有 l_0 个奇数阶的零点 $b_1,\cdots,b_{l_0}$(如果 $\psi^-(z)$ 在无穷远处的阶 k 使得 $k+l_0$ 不是偶数,则可以取一个点 $b_{l_0}\in L_0$ 使得 $k+l_0$ 是偶数). 令

$$\prod_b(z)=\prod_{j=1}^{l_0}(z-b_j^{(0)})\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{2l_i}(z-b_j^{(i)}),$$

$$\psi^-(z)=\prod_b(z)\phi_1^-(z)^2,$$

即 $\phi_0^-(z)=\sqrt{\dfrac{\psi^-(z)}{\prod_b(z)}}$.

记 $k^*=\dfrac{1}{2}(k-l_0)-\sum_{i=1}^{l}l_i$,

则 $\phi_0^-(z)$ 也在各个区域 S^- 中分区单值解析,并且在 $z=\infty$ 中取为 k^* 阶极点(当 $k^*<0$ 时是 $-k^*$ 阶零点),再令

$$\phi(z)=\begin{cases}\dfrac{\phi_0^+(z)}{\sqrt{\prod_b(z)}},z\in S^+,\\ \dfrac{\phi_0^-(z)}{\sqrt{\prod_a(z)\prod_c(z)}},z\in S^-.\end{cases}$$

用与上面相似的方法可以证明 $\phi(z)$ 也是分区解析函数,并且在跳跃曲线 L 上满足

$$\phi^+(t)|_{t\in L}=C(t)\phi^-(t)+\frac{g(t)}{\sqrt{\prod(t)}}.$$

这里

$$\prod(t)=\prod_a(t)\prod_b(t)\prod_c(t),$$

并且 $\phi^-(z)$ 在 $z=\infty$ 处的阶为 k^*-N. 根据文献[3]可以设 $\mu=\mathrm{ind}G(t)$,取 $z_0\in S^+$.

令

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{ln[(t-z_0)^{-\mu}G(t)]}{t-z}\mathrm{d}t,z\notin L,$$

$$X(z)=\begin{cases}X^+(z)=e^{\Gamma(z)},z\in S^+,\\ X^-(z)=(z-z_0)^{-\mu}e^{\Gamma(z)},z\in S^-.\end{cases}$$

再记 $\lambda=k^*-N-\mu$(如果 $l=0$,点集为文献[2]所讨论的情形,则有 $\prod_c(z)=1$, $\prod_b(z)=\prod_{j=1}^{l_0}(z-b_j^{(0)})$.),则可以得出当 $\lambda\geqslant-1$ 时解为

$$\phi(z)=X(z)(\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)\sqrt{\prod(t)}(t-z)}\cdot$$
$$\mathrm{d}t+P_\lambda(z)),$$

这里 $P_\lambda(z)$ 是一个阶为 λ 的任意多项式(当 $\lambda=-1$ 时 $P_\lambda(z)\equiv0$). 此时

$$\psi(z)=\prod(z)X(z)^2(\frac{1}{2\pi i}\cdot$$
$$\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)\sqrt{\prod(t)}(t-z)}\mathrm{d}t+P_\lambda(z))^2.$$

如果 $\lambda<-1$,则可解条件为

$$\int_L\frac{g(t)t^i}{X^+(t)\sqrt{\prod(t)}(t-z)}\mathrm{d}t=0,\qquad i=0,1,\cdots,-\lambda-2.$$

可解时的解为

$$\psi(z)=\prod(z)X(z)^2(\frac{1}{2\pi i}\cdot$$
$$\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)\sqrt{\prod(t)}(t-z)}\mathrm{d}t+P_\lambda(z))^2.$$

参考文献:

[1] LIU HUA,LU JIANKE. A generalized riemann boundary value problem[J]. Wuhan Univ J of Natural Sci,2005 (2):147-149.

[2] LU JIANKE. On Solution of a kind of riemann boundary value problem with squal roots[J]. Acta Mathematica Scientia,2002,22(B):145-149.

[3] 路可见. 解析函数边值问题[M]. 上海:上海科学技术出版社,1987:83-87.

(责任编辑:邓大玉 凌汉恩)