广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(3):172～174

关于具有泛分解态射 $f=pgq$ 的加权$(i,\cdots,j)$逆*

On Weighted $(i,\cdots,j)$ Inverses of Morphisms $f=pgq$ with Universal-Factorization

张仕光，刘晓冀

ZHANG Shi-guang，LIU Xiao-ji

（广西民族大学计算机与信息科学学院，广西南宁　530006）

(College of Computer and Information, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要：研究预加法范畴中具有泛分解态射 $f=pgq$ 关于 h,k 的加权$(i,\cdots,j)$逆，给出其存在的新的充要条件及其新的表达式，推广了具有泛分解态射的广义$(i,\cdots,j)$逆的相应结果.

关键词：预加法范畴　态射　加权$(i,\cdots,j)$逆

中图法分类号：O153.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2006)03-0172-03

Abstract: In this paper, the weighted $(i,\cdots,j)$ inverses of morphisms with universal-factorization in the preadditive category are studied, and some new necessary and sufficient conditions for existences and expressions of it are given. Some previous results on the generalized $(i,\cdots,j)$ inverses of morphisms with universal-factorization are extended.

Key words: preadditive category, morphism, weighted $(i,\cdots,j)$ inverse

1972年Davis在范畴中引进了态射的广义逆[1]，引起了国内外众多学者的兴趣，他们对此做了大量的工作，已经取得了一系列研究成果. 文献[2～5]主要研究了具有广义分解的态射广义逆，得到了许多重要结果. 本文在文献[2]的基础上考虑预加法范畴中具有泛分解的态射 $f=pgq$ 关于 h,k 的加权$(i,\cdots,j)$逆，给出其存在的新的充要条件及其新的表达式，推广了具有泛分解态射的广义$(i,\cdots,j)$逆的相应结果.

1　预备知识

定义1　设 $\phi: X\to Y$ 是带有对合 $*$ 的范畴 $\mathfrak{L}$ 中的态射，$h: X\to X$，$k: Y\to Y$ 是范畴 $\mathfrak{L}$ 中的可逆态射，如果对于任意的态射 $m,n: Y\to X$，当 $\phi^* h\phi m=\phi^* h\phi n$ 成立时有：$\phi m=\phi n$，称 ϕ 是广义 h^*-左可消；当 $m\phi k\phi^*=n\phi k\phi^*$ 成立时有：$m\phi=n\phi$，称 ϕ 是广义 k^*-右可消. 当两者都满足时，则称 ϕ 是广义 h^*-左可消，广义 k^*-右可消. 当 h,k 为单位态射时，即为通常的 $*$-可消.

定义2[2]　设 $\mathfrak{L}$ 是一范畴，对象 $X,Y,Z\in\mathfrak{L}$，态射 $f\in M(X,Y)$. 设 f 可分解成态射的合成：$f=pgq$，其中 $p\in M(X,Z)$，$g\in M(Z,Z)$，$q\in M(Z,Y)$，若存在态射 $p'\in M(Z,X)$，$q'\in M(Y,Z)$，使得 $p'pg=g=gqq'$ 成立，则 $f=pgq$ 为 f 的一个泛分解.

以下定义态射的加权 *Moore-Penrose* 逆.

定义3　设 $\mathfrak{L}$ 是带有对合 $*$ 的预加法范畴，对象 $X,Y\in\mathfrak{L}$，$f\in M(X,Y)$ 是 $\mathfrak{L}$ 的态射，$h\in M(X,X)$ 与 $k\in M(Y,Y)$ 是 $\mathfrak{L}$ 的可逆态射，若 $\varphi\in M(Y,X)$ 满足：

(1) $f\varphi f=f$；(2) $\varphi f\varphi=\varphi$；(3) $(hf\varphi)^*=hf\varphi$；(4) $(\varphi fk)^*=\varphi fk$.

则称 φ 为 f 关于 h,k 的加权 *Moore-Penrose* 逆，记为 $f^+_{h,k}$. 当 φ 满足方程(1)时，称 φ 为 f 的 g 逆，此时称 f 为正则态射，记 $\varphi=f^-$. 若 φ 满足上述等式中的$(i,\cdots,j)$，则称 φ 为 f 关于 h,k 的加权$(i,\cdots,j)$逆，记为 $f^{(i,\cdots,j)}_{h,k}$，所有加权$(i,\cdots,j)$逆的集合记为 $f_{h,k}\{i,\cdots,$

收稿日期：2005-09-06

修回日期：2005-12-26

作者简介：张仕光(1975-)，男，山东青岛人，硕士研究生，主要从事广义逆研究。

*广西科学基金(桂科基 0575032，桂科青 0640016)，广西高校百名中青年学科带头人和广西教育厅(桂教科研 200507126)科研项目和广西民族大学重大科研项目联合资助。

$j\}$.

引理 1[2] 设态射 $f=pgq$ 为泛分解，则以下命题等价.

(1)$f\{1\}\neq\varnothing$,$(f\{1,2\}\neq\varnothing)$;

(2)$(gq)\{1\}\neq\varnothing$,$(pg)\{1\}\neq\varnothing$;

此时有：

$g=gq(gq)^{-}g=g(pg)^{-}pg$;

$f\{1,2\}=\{mgn:m\in(gq)^{-},n\in(pg)^{-}\}$.

2 主要结果

定理 1 设 $\mathfrak{L}$ 是具有对合 $*$ 的预加法范畴，对象 $X,Y,Z\in\mathfrak{L}$，$f\in M(X,Y)$ 具有泛分解 $f=pgq$，h,k 为可逆态射，若 $gq\{1\}\neq\varnothing$，则下列命题等价：

(1)$f_{h,k}\{1,3\}\neq\varnothing$;

(2)$(pg)_{h,k}\{1,3\}\neq\varnothing$;

(3) 存在态射 α，使得 $\alpha f^{*}h^{*}pg=g$;

(4)f 为 h^{*}-左可消，且 $f^{*}h^{*}pg$ 是正则的；

(5)pg 关于 h^{*}-左可消，且 $f^{*}h^{*}pg$ 是正则的；

(6)pg 关于 h^{*}-左可消，且 $(pg)^{*}h^{*}pg$ 是正则的.

证明 (1)⇒(2) 设 $\varphi\in f_{h,k}\{1,3\}$，则 $gq\varphi pg=g$，因此 $pgq\varphi pg=pg$，$(hpgq\varphi)^{*}=hf\varphi=hpgq\varphi$，故 $q\varphi\in(pg)_{h,k}\{1,3\}$.

(2)⇒(3) 设 $(gq)^{-}\in(gq)\{1\}$，由引理 1[2] 知 $gq(gq)^{-}g=g$，设 $x\in(pg)_{h,k}\{1,3\}$ 则 $(hpgx)^{*}=hpgx$，$pgxpg=pg$，由 $f=pgq$ 为泛分解知：$gxpg=g$. 令 $\alpha=gxh^{-1}x^{*}[(gq)^{-}g]^{*}$，则

$\alpha f^{*}h^{*}pg=gxh^{-1}x^{*}[(gq)^{-}g]^{*}f^{*}h^{*}pg=$

$gxh^{-1}x^{*}[pgq(gq)^{-}g]^{*}h^{*}pg=$

$gxh^{-1}x^{*}(pg)^{*}h^{*}pg=gxh^{-1}(hpgx)^{*}pg=$

$gxh^{-1}hpgxpg=g$.

(3)⇒(4) 若存在态射 α，使得 $g=\alpha f^{*}h^{*}pg$，则有 $f^{*}h^{*}pg=f^{*}h^{*}pgq(gq)^{-}\alpha f^{*}h^{*}pg$. 即 $f^{*}h^{*}pg$ 是正则的. 设有态射 m,n 使得 $f^{*}h^{*}fm=f^{*}h^{*}fn$，则 $\alpha f^{*}h^{*}pgqm=\alpha f^{*}h^{*}pgqn$，由(3)知 $gqm=gqn$，左乘 p 即得 $fm=fn$ 从而得 f 为 h^{*}-左可消.

(4)⇒(5) 若 $(pg)^{*}hpgm=(pg)^{*}hpgn$，则 $f^{*}hpgm=f^{*}hpgn$，因为 $gq\{1\}\neq\varnothing$，所以由引理 1[2] $g=gq(gq)^{-}g$，得

$f^{*}hp[gq(gq)^{-}g]m=f^{*}hp[gq(gq)^{-}g]n$,

则 $f^{*}hf(gq)^{-}gm=f^{*}hf(gq)^{-}gn$，又因 f 为 h^{*}-左可消，故 $f(gq)^{-}gm=f(gq)^{-}gn$,

即 $p[gq(gq)^{-}g]m=p[gq(gq)^{-}g]n$.

所以 $pgm=pgn$，从而得 pg 关于 h^{*}-左可消.

(5)⇒(6) 令 $\alpha\in(f^{*}h^{*}pg)\{1\}$，则 $f^{*}h^{*}pg\alpha f^{*}h^{*}pg=f^{*}h^{*}pg$，左乘 $[(gq)^{-}g]^{*}$ 得：

$[f(gq)^{-}g]^{*}h^{*}pg\alpha f^{*}h^{*}pg=$

$[f(gq)^{-}g]^{*}h^{*}pg$,

又因 $f(gq)^{-}g=pgq(gq)^{-}g=pg$，得：

$(pg)^{*}h^{*}pg\alpha q^{*}(pg)^{*}h^{*}pg=(pg)^{*}h^{*}pg$.

故 $\alpha q^{*}\in[(pg)^{*}h^{*}pg]\{1\}$，即 $(pg)^{*}h^{*}pg$ 是正则的.

(6)⇒(1) 令 $x\in[(pg)^{*}h^{*}pg]\{1\}$，

则 $(pg)^{*}h^{*}pgx(pg)^{*}h^{*}pg=(pg)^{*}h^{*}pg$，因为 pg 关于 h^{*}-左可消，所以 $pgx(pg)^{*}h^{*}pg=pg$，令 $\varphi=(gq)^{-}gx(pg)^{*}h^{*}$，则

$f\varphi f=pgq(gq)^{-}gx(pg)^{*}h^{*}pgq=$

$pgx(pg)^{*}h^{*}pgq=pgq=f$;

$hf\varphi=hpgq(gq)^{-}gx(pg)^{*}h^{*}=$

$hpgx(pg)^{*}h^{*}$;

$(hf\varphi)^{*}=hpgx^{*}(pg)^{*}h^{*}=$

$h[pgx(pg)^{*}h^{*}pg]x^{*}(pg)^{*}h^{*}=$

$hpgx[pgx(pg)^{*}h^{*}pg]^{*}h^{*}=hpgx(pg)^{*}h^{*}=hf\varphi$

故 $\varphi\in f_{h,k}\{1,3\}$.

当 h,k 为恒等态射 i 时，可以得到文献[2]的定理 2.3.

定理 2 设 $\mathfrak{L}$ 是具有对合 $*$ 的预加法范畴，对象 $X,Y,Z\in\mathfrak{L}$，$f\in M(X,Y)$ 具有泛分解 $f=pgq$，h,k 为可逆态射，若 $pg\{1\}\neq\varnothing$，则下列命题等价：

(1)$f_{h,k}\{1,4\}\neq\varnothing$;

(2)$(gq)_{h,k}\{1,4\}\neq\varnothing$;

(3) 存在态射 α，使得 $gqk^{*}f^{*}\alpha=g$;

(4)f 关于 k^{*}-右可消，且 $gqk^{*}f^{*}$ 是正则的；

(5)gq 关于 k^{*}-右可消，且 $gqk^{*}f^{*}$ 是正则的；

(6)gq 关于 k^{*}-右可消，且 $gqk^{*}(gq)^{*}$ 是正则的.

定理 2 的证明与定理 1 的证明类似，故从略.

当 h,k 为恒等态射 i 时，可得文献[2]定理 2.5.

定理 3 设 $\mathfrak{L}$ 是具有对合 $*$ 的预加法范畴，对象 $X,Y,Z\in\mathfrak{L}$，$f\in M(X,Y)$ 具有泛分解 $f=pgq$，若 g 的 *Moore-Penrose* 逆存在，$h\in M(X,X)$ 与 $k\in M(Y,Y)$ 是 $\mathfrak{L}$ 的可逆态射，则以下条件等价：

(1)f 关于 h,k 的加权 *Moore-Penrose* 逆存在；

(2)$(pg)^{*}h^{*}pg+i-g^{+}g$ 和 $gqk^{*}(gq)^{*}+i-gg^{+}$，均为对称可逆态射.

在此情况下，

$f^{+}_{h,k}=k^{*}(gq)^{*}[gqk^{*}(gq)^{*}+i-gg^{+}]^{-1}g[(pg)^{*}h^{*}pg+i-g^{+}g]^{-1}(pg)^{*}h^{*}$.

证明 (1)⇒(2) 设 $f^{+}_{h,k}=\varphi$，下证 $gqk^{*}(gq)^{*}+i-gg^{+}$ 为对称态射. 由于 $f\varphi f=f$，f

具有泛分解 $f = pgq$,因此 $pgq\varphi pgq = pgq$,从而得 $gq\varphi pg = g$,令 $m = \varphi pgg^+$,$n = gq\varphi$,则 $mn = \varphi pgg^+ gq\varphi = \varphi pgq\varphi = \varphi$,于是 $gqm = gg^+$,$npg = g$. 又因为 $(\varphi fk)^* = \varphi fk$,故 $\varphi fk = mnpgqk = mgqk = k^* q^* g^* m^*$. 将 $mgqk = k^* q^* g^* m^*$ 两端左乘 gq 右乘 $(gq)^*$ 得

$gqmgqk(gq)^* = gqk^* q^* g^* m^* (gq)^*$,即

$gg^+ gqk(gq)^* = gqk^* q^* (gg^+ g)^*$. 故 $gqk(gq)^* = gqk^* (gq)^*$. 又因 $i^* = i$,$(gg^+)^* = gg^+$,得

$[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^* = gqk^*(gq)^* + i - gg^+$,故 $gqk^*(gq)^* + i - gg^+$ 为对称态射. 同理可以证明 $(pg)^* h^* pg + i - g^+ g$ 为对称态射. 再证 $gqk^*(gq)^* + i - gg^+$ 为可逆态射. 由于 $f(\varphi fk)^* k^{-1}\varphi f = f$,$f$ 具有泛分解 $f = pgq$,因此

$$pgqk^*(pgq)^*\varphi^* k^{-1}\varphi pgq = pgq,$$

从而有

$$gqk^*(gq)^* p^* \varphi^* k^{-1}\varphi pg = g,$$

由此可得

$$gqk^*(gq)^* p^* \varphi^* k^{-1}\varphi pgg^+ = gg^+.$$

从而得

$$[gqk^*(gq)^* + i - gg^+][gg^+ p^* \varphi^* k^{-1}\varphi pgg^+ + i - gg^+] = i = i^*,$$

即

$$[gg^+ p^* \varphi^* k^{-1}\varphi pgg^+ + i - gg^+]^* [gqk^* \cdot (gq)^* + i - gg^+]^* = i,$$

故

$$[gg^+ p^* \varphi^* (k^{-1})^* \varphi pgg^+ + i - gg^+][gqk^* \cdot (gq)^* + i - gg^+] = i,$$

从而得 $gqk^*(gq)^* + i - gg^+$ 为可逆态射,于是:

$$gg^+ p^* \varphi^* (k^{-1})^* \varphi pgg^+ + i - gg^+ = gg^+ p^* \varphi^* k^{-1}\varphi pgg^+ + i - gg^+,$$

故

$$[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} = gg^+ p^* \varphi^* k^{-1}\varphi pgg^+ + i - gg^+,$$

同理可证 $(pg)^* h^* pg + i - g^+ g$ 为可逆态射,且

$$[(pg)^* h^* pg + i - g^+ g]^{-1} = g^+ gq\varphi h^{-1}\varphi^* q^* g^+ g + i - g^+ g,$$

(2)⇒(1) 令 $\varphi = k^*(gq)^*[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} g[(pg)^* h^* pg + i - g^+ g]^{-1}(pg)^* h^*$,

注意:$gqk^*(gq)^* = gg^+[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]$ (Ⅰ)

$(pg)^* h^* pg = [(pg)^* h^* pg + i - g^+ g] g^+ g$ (Ⅱ)

$f\varphi = pg[(pg)^* h^* pg + i - g^+ g]^{-1}(pg)^* h^*$ (Ⅲ)

$\varphi f = k^*(gq)^*[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} gq$ (Ⅳ)

则

$f\varphi f = pgqk^*(gq)^*[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} g[(pg)^* h^* pg + i - g^+ g]^{-1}(pg)^* h^* pgq = pgg^+ gg^+ gq$(由(Ⅰ),(Ⅱ)式得)$= pgq = f$;

$\varphi f\varphi = k^*(gq)^*[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} gqk^*(gq)^*[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} g[(pg)^* h^* pg + i - g^+ g]^{-1}(pg)^* h^*$ (由(Ⅲ)式得)$= k^*(gq)^*[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} gg^+ g[(pg)^* h^* pg + i - g^+ g]^{-1}(pg)^* h^*$(由(Ⅰ)式得)$= \varphi$;

$hf\varphi = hpg[(pg)^* h^* pg + i - g^+ g]^{-1}(pg)^* h^*$(由(Ⅲ)得).

因为 $(pg)^* h^* pg + i - g^+ g$ 为对称态射,所以 $(hf\varphi)^* = hf\varphi$.

$\varphi fk = k^*(gq)^*[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} gqk$(由(Ⅳ)式得).

因为 $gqk^*(gq)^* + i - gg^+$ 为对称态射,所以 $(\varphi fk)^* = \varphi fk$. 综上知,$f$ 关于 h,k 的广义 *Moore-Penrose* 逆存在,并且

$$f^+_{h,k} = k^*(gq)^*[gqk^*(gq)^* + i - gg^+]^{-1} g[(pg)^* h^* pg + i - g^+ g]^{-1}(pg)^* h^*.$$

当 h,k 为恒等态射 i 时,得文献[3]的定理 2.1.

参考文献:

[1] DAVIS D L,ROBINSON D W. Generalized inverse of morphisms[J]. Linear Algebra Application,1972,5:319-328.

[2] 陈军,陈建龙. 具有广义分解的态射的广义逆[J]. 数学学报,2001,44(5):909-916.

[3] 江声远,刘晓冀. 具有泛分解的态射的广义逆[J]. 数学学报,1999,42(2):233~240.

[4] 刘晓冀,刘三阳. 具有广义分解态射的广义逆[J]. 数学杂志,2004,24(4):453-456.

[5] 曹永知,朱萍. 关于具有泛分解的态射的广义逆[J]. 数学学报,2001,44(3):559-566.

(责任编辑:邓大玉 凌汉恩)