4个经典 Ramsey 数 $R(3,q)$的新下界*

Four New Lower Bounds for Classical Ramsey Numbers $R(3,q)$

罗海鹏[1**]，苏文龙[2]，许晓东[1]，吴　康[3]

LUO Hai-peng[1**]，SU Wen-long[2]，XU Xiao-dong[1]，WU Kang[3]

(1. 广西科学院，广西南宁　530022；2. 广西大学梧州分校，广西梧州　543002；3. 华南师范大学数学系，广东广州　510631)

(1. Guangxi Academy of Sciences，Nanning，Guangxi，530022，China；2. Guangxi University Wuzhou Branch，Wuzhou，Guangxi，543002，China；3. Department of Mathematics of South China Normal University，Guangzhou，Guangdong，510631，China)

摘要：构造 4 个一般阶循环图，得到 4 个经典 Ramsey 数 $R(3,q)$ 的新下界：$R(3,24)\geqslant 141$，$R(3,25)\geqslant 146$，$R(3,26)\geqslant 151$，$R(3,27)\geqslant 159$.

关键词：Ramsey 数　下界　循环图

中图法分类号：O157.5；TP312　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2006)03-0161-03

Abstract：Four circulant graphs of general order are constructed，so four new lower bounds of classical Ramsey numbers $R(3,q)$ are obtained as $R(3,24)\geqslant 141$，$R(3,25)\geqslant 146$，$R(3,26)\geqslant 151$，$R(3,27)\geqslant 159$.

Key words：Ramsey number，lower bound，circulant graph

1　Ramsey 数 R（3，q）的已知结果和本文的新下界

经典 Ramsey 数的计算是组合数学中非常困难的问题．动态综述文献［1］记录迄今已知的二色 Ramsey 数 R（3，q）的准确值 R（3，3）＝6，R（3，4）＝9，R（3，5）＝14，R（3，6）＝18，R（3，7）＝23，R（3，8）＝28，R（3，9）＝36，以及当 $10\leqslant q\leqslant 23$ 时 R（3，q）的一些下界：

q：	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
下界：	40	46	52	59	66	73	79	92	98	106	109	122	125	136

我们在文献［2～11］中，得到了一些经典 Ramsey 数的下界．本文借鉴这些方法，构造 4 个一般阶的循环图并利用相应公式，得到一些新的结果：

定理 1　R（3，24）$\geqslant$141，R（3，25）$\geqslant$146，R（3，26）$\geqslant$151，R（3，27）$\geqslant$159.

由定理 1 与相应的公式，还可以得到

推论　R（3，93）$\geqslant$841，R（3，97）$\geqslant$871，R（3，101）$\geqslant$901，R（5，25）$\geqslant$561，R（5，26）$\geqslant$581，R（5，27）$\geqslant$601，R（5，28）$\geqslant$633，R（3，3，25）$\geqslant$561，R（3，3，26）$\geqslant$581，R（3，3，27）$\geqslant$601，R（3，3，28）$\geqslant$633.

在上述结果中，R（3，26）$\geqslant$151 与 R（3，27）$\geqslant$159 分别超过文献［1］中记录的 R（3，26）$\geqslant$150 与 R（3，27）$\geqslant$158，其他结果是本文首次报道的.

2　若干引理

给定整数 $n\geqslant 5$，记 Z_n 为模 n 的最小非负剩余系，即 $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$．以下除非特别声明，所有模 n 整数的运算结果都理解为模 n 后属于 Z_n，并用通常的等号“＝”表示“模 n 相等”.

约定，对于整数 $s<t$，记 $[s,t]=\{s,s+1,\cdots,t\}$.

收稿日期：2006-03-08

作者简介：罗海鹏(1947-)，男，广东东莞人，研究员，主要从事组合数学与算法研究。

*国家自然科学基金项目(批准号：60563008)、广西自然科学基金项目(桂科自 0640037)、梧州市科研基金项目(梧科字[2005]第 35 号)资助。

**联系人。

定义 1 令 $m=[\frac{n}{2}]$. 对于集合 $S=[1, m]$ 的一个 2 部分拆 $S=S_1\cup S_2$（S_1 与 S_2 均非空集），记 $A_i=\{x|x\in Z_n, x\in S_i$ 或 $n-x\in S_i\}$，设 n 阶完全图 K_n 的顶点集 $V=Z_n$，边集 E 是 Z_n 的所有 2 元子集的集且有分拆 $E=E_1\cup E_2$，其中

$E_i=\{\{x, y\}\mid\{x, y\}\in E$ 且 $x-y\in A_i\}$，$i=1, 2$.

把 E_i 中的边叫做 A_i 色的，记 K_n 中 A_i 色边所导出的子图为 $G_n(A_i)$，其团数记为 $[G_n(A_i)]$，这里 $i=1$, 2. 于是我们按照参数集合 S_1 与 S_2 把 K_n 的边 2-染色，得到 n 阶循环图 $G_n(A_i)$.

根据 Ramsey 定理，显然有

引理 1 设 $k_i=[G_n(A_i)]$，$i=1, 2$，则 $R(k_1+1, k_2+1)\geqslant n+1$. //

引理 2 设 $b\in Z_n$ 或 $b=n$，则 Z_n 到自身的变换 $f: x\mapsto -x+b$ 是 $G_n(A_i)$ 的同构变换.

证明 显然 f 是顶点集 V 的 1−1 变换. 对于任意 $x, y\in V=Z_n$，注意到

$f(y)-f(x)=x-y$,

即得 $\{x, y\}\in A_i\Leftrightarrow\{f(y), f(x)\}\in A_i$. 因此 f 把 S_i 色边变换成 S_i 色边. //

对于任意 $i\in\{1, 2\}$，考察 $G_n(A_i)$ 的团和团数. 由引理 2 易知，$G_n(A_i)$ 的团数等于其中含顶点 0 的团的最大阶，因此我们只须考察 $G_n(A_i)$ 中含顶点 0 的团. 根据定义 1 知这样的团的其他非零顶点是集合 A_i 的元. 故有

引理 3 在图 $G_n(A_i)$ 中顶点集为 A_i 的导出子图记为 $G_n[A_i]$，$G_n[A_i]$ 的团数为 $[A_i]$，则有

$[G_n(A_i)]=[A_i]+1$. //

于是求 $G_n(A_i)$ 的团数就转化为求 $G_n[A_i]$ 的团数. 我们有

引理 4 设 $x\in S_i$，记

$d_i(x)=|\{y\in A_i: x-y\in A_i\}|$.

如果对于任意 $x\in S_i$，恒有 $d_i(x)=0$，那么 $[A_i]=1$.

证明 设对于任意 $x\in S_i$，恒有 $d_i(x)=0$，且有 $[A_i]\geqslant 2$，则 $[G_n(A_i)]\geqslant 3$，在图 $G_n(A_i)$ 中有 3 阶团 $\{0, x, y\}$，其中 $x-y\in A_i$. 有如下情形.

如果 x 或 $y\in S_i$，就有 $d_i(x)\geqslant 1$ 或 $d_i(y)\geqslant 1$，与已知条件矛盾. 如果 $n-x$ 与 $n-y\in S_i$，则由引理 2 知 $\{0, n-x, n-y\}$ 也是图 $G_n(A_i)$ 的 3 阶团，就有 $d_i(n-x)\geqslant 1$，与已知条件 $d_i(x)=0$ 矛盾. //

当 $[A_i]\geqslant 2$ 时，可用回溯法计算 $[A_i]$. 把 A_i 的元按字典排列法排序，作成一个全序集 $(A_i, \prec)$. 设 $G_n[A_i]$ 的 k 阶团中最小的元为 x_j，称这个团为以 x_j 作起点长度为 $k-1$ 的 A_i 色的链，并记 $l_i(x_j)=k-1$.

设 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是 $G_n[A_i]$ 中的一个团，根据引理 2 知 $\{n-x_1, n-x_2, \cdots\}$ 也是 $G_n[A_i]$ 中的一个团. 注意到 $x_j\in S_i$ 与 $n-x_j\in S_i$ 至少有一个成立（当 n 是偶数且 $x_j=m$ 时两者同时成立），故有

引理 5 存在 $x_j\in S_i$，使 $l_i(x_j)=[A_i]-1$. //

这就是说，为了计算 $G_n[A_i]$.的最大团，只需计算以 $x_j\in S_i$ 作起点的最长的 A_i 色的链. 这样能够提高运算效率. 根据上述理论，我们有

算法 1（用一般阶循环图计算 Ramsey 数下界的计算方法）.

1° 给定整数 $n\geqslant 5$，记 $m=[\frac{n}{2}]$. 给定集合 $S=[1, m]$ 的一个 2 部分拆 $S=S_1\cup S_2$（S_1 与 S_2 均非空集）. 令 $i=1$.

2° 作集合 $A_i=\{x|x\in Z_n, x\in S_i$ 或 $n-x\in S_i\}$，并把 A_i 的元按字典排列法排序. 设 $A_i=\{x_1, x_2, \cdots\}$.

3° 设 $q_i=|S_i|$，$[A_i]=1$. 令 $j=1$.

4° 对于 $x_j\in S_i$，计算

$d_i(x_j)=|\{y: y\in A_i, y>x_j$ 且 $x_j-y\in A_i\}|$.

如果 $d_i(x_j)=0$，转到 7°.

5° 计算以 $x_j\in S_i$ 为起点的 A_i 色的链. 如果 $l_i(x_j)\geqslant[A_i]$，令 $[A_i]=l_i(x_j)+1$，并打印这条 A_i 色的链.

6° 令 $j=j+1$，如果 $j<q_i$，转到 5°.

7° 令 $k_i=[A_i]+1$，$i=i+1$. 如果 $i=2$，转到 2°.

8° 打印 $R(k_1+1, k_2+1)\geqslant n+1$，运算结束.

在算法 1 中，5°与 6°实际上是用回溯法计算最长的 A_i 色的链，最后打印出来的，就是按字典排列法排序在最前面的（第一条）长度为 $l_i(x_j)=[A_i]-1$ 的 A_i 色的链，相应于 $G_n[A_i]$ 中的一个阶数为 $[A_i]$ 的团.

3 定理 1 的证明

1）取整数 $n=140$，则 $m=70$. 设

$S_1=\{1, 3, 5, 9, 21, 28, 34, 41, 51, 59, 66, 70\}$.

根据算法 1，得到 $[A_1]=1$，$[A_2]=22$，$R(3, 24)\geqslant 141$. 其中第一条长度为 21 的 A_2 色的链是 $2\prec 4\prec 6\prec 8\prec 10\prec 12\prec 24\prec 35\prec 37\prec 48\prec 50\prec 54\prec 60\prec 62\prec 73\prec 77\prec 79\prec 92\prec 102\prec 104\prec 115\prec$

117.

2）取整数 $n=145$，则 $m=72$. 设

$S_1=\{1, 3, 5, 7, 9, 21, 25, 38, 48, 61, 65, 67\}$.

根据算法 1，得到 $[A_1]=1$，$[A_2]=23$，$R(3, 25)\geqslant 146$. 其中第一条长度为 22 的 A_2 色的链是 $2\prec 4\prec 6\prec 8\prec 10\prec 12\prec 14\prec 16\prec 18\prec 20\prec 22\prec 26\prec 32\prec 36\prec 49\prec 55\prec 59\prec 72\prec 95\prec 108\prec 118\prec 131\prec 141$.

3）取整数 $n=150$，则 $m=75$. 设

$S_1=\{1, 3, 5, 7, 9, 15, 28, 41, 52, 54, 58, 71, 75\}$.

根据算法 1，得到 $[A_1]=1$，$[A_2]=24$，$R(3, 26)\geqslant 151$. 其中第一条长度为 23 的 A_2 色的链是 $2\prec 4\prec 6\prec 8\prec 10\prec 12\prec 14\prec 16\prec 18\prec 24\prec 37\prec 50\prec 61\prec 63\prec 67\prec 80\prec 84\prec 88\prec 101\prec 105\prec 107\prec 118\prec 131\prec 144$.

4）取整数 $n=158$，则 $m=79$. 设

$S_1=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 17, 30, 43, 56, 58, 62, 77\}$.

根据算法 1，得到 $[A_1]=1$，$[A_2]=25$，$R(3, 27)\geqslant 159$. 其中第一条长度为 24 的 A_2 色的链是 $2\prec 4\prec 6\prec 8\prec 10\prec 12\prec 14\prec 16\prec 18\prec 20\prec 22\prec 28\prec 41\prec 54\prec 67\prec 69\prec 73\prec 88\prec 92\prec 107\prec 111\prec 113\prec 126\prec 139\prec 152$.

由 $R(3, 24)\geqslant 141$，$R(3, 25)\geqslant 146$，$R(3, 26)\geqslant 151$，引用公式

$R(3, 4k+1)\geqslant 6R(3, k+1)-5$[1]

即得 $R(3, 93)\geqslant 841$，$R(3, 97)\geqslant 871$，$R(3, 101)\geqslant 901$.

由 $R(3, 24)\geqslant 141$，$R(3, 25)\geqslant 146$，$R(3, 26)\geqslant 151$ 与 $R(3, 27)\geqslant 159$，引用公式

$R(5, k)\geqslant 4R(3, k-1)-3$[11]

得 $R(5, 25)\geqslant 561$，$R(5, 26)\geqslant 581$，$R(5, 27)\geqslant 601$，$R(5, 28)\geqslant 633$. 引用公式

$R(3, k, l+1)\geqslant 4R(k, l)-3$[11]

得 $R(3, 3, 25)\geqslant 561$，$R(3, 3, 26)\geqslant 581$，$R(3, 3, 27)\geqslant 601$，$R(3, 3, 28)\geqslant 633$.

上述 $R(3, 26)\geqslant 151$ 与 $R(3, 27)\geqslant 159$ 分别超过文献 [1] 记录的两个相应下界.

于是我们就证明了定理 1 及其推论的 15 个结果. //

我们在 CPU 为 AMD2400 的计算机上完成上述运算的时间约为 6h.

参考文献：

[1] RADZISZOWSKI S P. Small Ramsey numbers[EB/OL]. [2004-07-04]. http://www.combinatoriss.org/serveys/ds1.pdf.

[2] 苏文龙，罗海鹏，李乔. 多色经典 Ramsey 数 $R(q,q,\ldots,q)$ 的下界[J]. 中国科学：A 辑，1999，29(5)：408-413.

[3] 罗海鹏，苏文龙，李乔. 经典 Ramsey 数 $R(6,12)$，$R(6,14)$ 和 $R(6,15)$ 的新下界[J]. 科学通报，1998，43(12)：1336-1337.

[4] SU WENLONG，LUO HAIPENG，ZHANG ZHENGYOU，et al. New lower bounds of fifteen classical Ramsey numbers [J]. Australasian Journal of Combinatorics，1999(19)：91-99.

[5] SU WENLONG，LUO HAIPENG，SHEN YANQIU. New lower bounds for classical Ramsey numbers $R(5,13)$ and $R(5,14)$ [J]. Applied Mathematics Letters，1999 (12)：121-122.

[6] LUO HAIPENG，SU WENLONG，SHEN YUNQIU. New lower bounds of ten classical Ramsey numbers[J]. Australasian Journal of Combinatorics，2001(24)：81-90.

[7] LUO HAIPENG，SU WENLONG，LI ZHENCHONG. The properties of self-complementary graphs and new lower bounds for diagonal Ramsey numbers [J]. Australasian Journal of Combinatorics，2002 (25)：103-116.

[8] SU WENLONG，LI QIAO，LUO HAIPENG，et al. Lower bounds of Ramsey numbers based on cubic residues[J]. Discrete Mathematics，2002(250)：197-209.

[9] LI GUIQING，SU WENLONG，LUO HAIPENG. Edge colorings of the complete graph K149 and the lower bounds of three Ramsey numbers[J]. Discrete Applied Mathematics，2003(126)：167-179.

[10] LUO HAIPENG，SU WENLONG，SHEN YUNQIU. New lower bounds for two multicolor classical Ramsey numbers[J]. RADOVI MATEMATIČKI，2004 (13)：15-21.

[11] XU XIAODONG，XIE ZHENG，EXOO G，RADZISZOWSKI S P. Constructive lower bounds on classical multicolor Ramsey numbers[EB/OL]. [2004-06-04]. http://www.combinatorics.org/volume-11/PDF/vllilr35.pdf.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）