基于模糊理想点的模糊多属性决策方法

Fuzzy Multi-Attribute Decision Making Method Based on Fuzzy Ideal Points

龙 君

LONG Jun

(桂林电子工业学院计算科学与数学系,广西桂林 541004)

(Department of Computing Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:针对属性权重信息完全未知或只有部分权重信息且属性值为三角模糊数的模糊多属性决策问题,提出 3 种基于模糊理想点的最优化决策模型.通过对这 3 种模型的求解,获得属性的权重,给出相应的对方案进行排序和择优的决策方法,从而为解决权重信息不完全的模糊多属性决策问题提供新的途径.

关键词:多属性决策 模糊理想点 三角模糊数

中图法分类号:C934, O159 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2006)02-0105-04

Abstract: This paper establishes three optimization models based on fuzzy ideal points for multi-attribute decision making problems in which the information on attribute weights is completely or partly unknow and the attribute values are given in the forms of triangular fuzzy numbers. By solving these three models, the attribute weights can be got. Some methods are proposed for selecting the most desirable alternatives. Finally, a numerical example is used to illustrate the proposed methods.

Key words: multi-attribute decision making, fuzzy ideal point, triangular fuzzy number

多属性决策(Multiple Attribute Decision Making,简称 MADM),也称有限方案多目标决策,是在考虑多个属性的情况下,选择最佳备选方案或进行方案排序的决策问题,它在经济管理及工程等领域有着广泛的应用.如今,关于实数型多属性决策问题的理论与方法已较为完善.由于客观事物的复杂性和不确定性以及人类认识的模糊性,使得属性值及偏好信息为模糊数(如区间数、三角模糊数等)的模糊多属性决策问题普遍存在.对于属性值为三角模糊数的模糊 MADM 问题的研究已引起人们的重视[1~6].然而,在实际决策过程中,人们往往很难给出明确的权重信息.文献[7,8]针对属性权重信息完全未知或只有部分权重信息的、属性值以及决策者的主观偏好值均为三角模糊数的模糊多属性决策问题,分别给出了基于相似度的决策方案排序法和基于期望值的模糊多属性决策方法.本文则针对属性权重信息完全未知或只有部分权重信息、属性值为三角模糊数的多属性决策问题,建立了 3 种基于模糊理想点的最优化决策模型,通过对模型的求解来确定属性的权重,给出了相应的对方案进行择优的决策方法.该方法为解决权重信息不完全的模糊多属性决策问题提供了新途径.该方法的实例分析充分说明其具有可行性和有效性.

1 预备知识

有关三角模糊数的一些概念和结论.

定义 1 若 $\tilde{a}=(a^L,a^M,a^U)$,其中 $0<a^L<a^M<a^U$,则称 $\tilde{a}$ 为一个三角模糊数,其特征函数(隶属函数)可表示为[9]

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}(x-a^L)/(a^M-a^L), & a^L<x<a^M\\ (x-a^U)/(a^M-a^U), & a^M<x<a^U\\ 0 & ,\text{其它}.\end{cases}$$

设 $\tilde{a}=(a^L,a^M,a^U)$, $\tilde{b}=(b^L,b^M,b^U)$ 为两个三角模糊数,则其线性运算法则如下[9]:

$$\tilde{a}+\tilde{b}=(a^L+b^L,a^M+b^M,a^U+b^U),$$

收稿日期:2005-09-15

修回日期:2005-12-12

作者简介:龙 君(1973),男,湖南吉首人,硕士研究生,主要从事模糊决策及最优化方法研究。

$\frac{1}{\tilde{a}} = (\frac{1}{a^U}, \frac{1}{a^M}, \frac{1}{a^L})$,

$\lambda \cdot \tilde{a} = (\lambda a^L, \lambda a^M, \lambda a^U)$，其中 $\lambda \geqslant 0$.

定义 2 设 $\tilde{a} = (a^L, a^M, a^U)$，$\tilde{b} = (b^L, b^M, B^U)$ 为两个三角模糊数，则称

$$\| \tilde{a} - \tilde{b} \| = \sqrt{\frac{1}{3}[(a^L - b^L)^2 + (a^M - b^M)^2 + (a^U - b^U)^2]}$$

为 $\tilde{a}$，$\tilde{b}$ 之间的距离.

2 决策方法

对于模糊多属性决策问题，设 $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ 是待选方案集（$m \geqslant 2$），$S = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 是属性集（$n \geqslant 2$），假设这些属性是加性独立的，记 $M = \{1,2,\cdots,m\}$，$N = \{1,2,\cdots,n\}$，$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 是属性的权重向量，H 为已知的部分权重信息确定的属性可能权重集合，$\omega \in H$. $\widetilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m \times n}$ 是决策矩阵，其中 $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^L, a_{ij}^M, a_{ij}^U)$ 为三角模糊数，表示方案 X_i 在属性 S_j 下的属性值. 为了根据已知的决策信息（$\widetilde{A}$ 和 ω），对待选方案进行排序并从中找出最优方案，我们用 $I_i(i=1,2)$ 分别表示效益型、成本型属性的下标集，则将决策矩阵 $\widetilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m \times n}$ 转化为规范化矩阵 $\widetilde{B} = [\tilde{b}_{ij}]_{m \times n}$ 的计算公式如下：

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij}}{\max\limits_{i \in M} a_{ij}^U}, i \in M, j \in I_1; \tag{1}$$

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{\min\limits_{i \in M} a_{ij}^L}{\tilde{a}_{ij}}, i \in M, j \in I_2. \tag{2}$$

由三角模糊数的运算法则知，$\tilde{b}_{ij}$ 为三角模糊数，记 $\tilde{b}_{ij} = (b_{ij}^L, b_{ij}^M, b_{ij}^U)$.

根据规范化矩阵 $\widetilde{B}$，可令模糊理想点 $\widetilde{X}^+ = (\widetilde{X}_1^+, \widetilde{X}_2^+, \cdots, \widetilde{X}_n^+)$，模糊负理想点 $\widetilde{X}^- = (\widetilde{X}_1^-, \widetilde{X}_2^-, \cdots, \widetilde{X}_n^-)$，其中

$$\widetilde{X}_j^+ = (X_j^{+L}, X_j^{+M}, X_j^{+U}) = (\max_{1 \leqslant i \leqslant m} b_{ij}^L, \max_{1 \leqslant i \leqslant m} b_{ij}^M, \max_{1 \leqslant i \leqslant m} b_{ij}^U) j \in N; \tag{3}$$

$$\widetilde{X}_j^- = (X_j^{-L}, X_j^{-M}, X_j^{-U}) = (\min_{1 \leqslant i \leqslant m} b_{ij}^L, \min_{1 \leqslant i \leqslant m} b_{ij}^M, \min_{1 \leqslant i \leqslant m} b_{ij}^U), j \in N. \tag{4}$$

显然，方案越接近模糊正理想点就越优，或越远离模糊负理想点也越优. 因此，可用下面的方法来判别各方案的优劣.

(i) 由于决策方案 X_i 越接近模糊理想点 $\widetilde{X}^+$ 越优，因此可定义方案 X_i 与模糊理想点 $\widetilde{X}^+$ 之间的加权距离之和为

$$d_i^+(\omega) = \sum_{j=1}^n \| \tilde{b}_{ij} - \widetilde{X}_j^+ \| \omega_j, i \in M. \tag{5}$$

对于给定的权重向量 ω，$d_i^+(\omega)$ 越小则方案 X_i 越优. 于是可建立如下多目标决策模型

$$\min d^+(\omega) = (d_1^+(\omega), d_2^+(\omega), \cdots, d_m^+(\omega)),$$
$$s.t. \quad \omega \in H. \tag{M1}$$

由于每个方案是公平竞争的，不存在任何偏好关系，因此，可将模型(M1)等权集结为如下单目标最优化模型

$$\min d^+(\omega) = \sum_{i=1}^m d_i^+(\omega),$$
$$s.t. \omega \in H. \tag{M2}$$

即

$$\min d^+(\omega) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \| \tilde{b}_{ij} - X_j^+ \| \omega_j,$$
$$s.t. \omega \in H. \tag{M3}$$

求解该模型，得到最优解 $\omega^+ = (\omega_1^+, \omega_2^+, \cdots, \omega_n^+)^T$，把它代入式(5)，计算 $d_i^+(\omega)$，$i \in M$，再按其值由小到大的顺序对方案 $X_i(i \in M)$ 进行排序，值最小者所对应的方案为最优方案.

若决策者不能提供任何权重信息，则可建立下列单目标最优化模型：

$$\min \sum_{i=1}^m f_i(\omega),$$
$$s.t. \sum_{j=1}^n \omega_j = 1, \omega_j \geqslant 0. \tag{M4}$$

其中，$f_i(\omega) = \sum_{j=1}^n \| \tilde{b}_{ij} - X_j^+ \| \omega_j^2, i \in M$，是决策方案 X_i 与模糊理想点 $\widetilde{X}^+$ 之间的加权距离.

解此模型，作拉格朗日函数

$$L(\omega, \lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \| \tilde{b}_{ij} - X_j^+ \| \omega_j^2 + 2\lambda(\sum_{j=1}^n \omega_j - 1),$$

求其偏导数，并令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \omega_j} = 2\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \| \tilde{b}_{ij} - X_j^+ \| \omega_j + 2\lambda = 0, j \in N, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^n \omega_j - 1 = 0. \end{cases}$$

求得最优化解

$$\omega_j^+ = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^n \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m \| \tilde{b}_{ij} - \widetilde{X}_j^+ \|}} \Big/ \sum_{i=1}^m \| \tilde{b}_{ij} - \widetilde{X}_j^+ \|, j \in N. \tag{6}$$

把 $\omega^+ = (\omega_1^+, \omega_2^+, \cdots, \omega_n^+)^T$ 代入 $f_i(\omega)$，$i \in M$，再按其值由小到大的顺序对方案 $X_i(i \in M)$ 进行排序，值最小者所对应的方案为最优方案.

(ii) 由于决策方案 X_i 越远离模糊负理想点 $\widetilde{X}^-$ 越优，因此可定义方案 X_i 与模糊负理想点 $\widetilde{X}^-$ 之间的加权距离为

$$d_i^-(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\|\tilde{b}_{ij}-X_j^-\|\omega_j, i\in M. \qquad (7)$$

对于给定的权重向量 ω,$d_i^-(\omega)$ 越大则方案 X_i 越优. 于是根据类似(i)中的讨论,可建立如下单目标最优化模型:

$$\max d^-(\omega)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\|\tilde{b}_{ij}-X_j^-\|\omega_j,$$

$$s.t.\ \omega\in H. \qquad (M5)$$

求解该模型,得到最优解 $\omega^-=(\omega_1^-,\omega_2^-,\cdots,\omega_n^-)^T$,把它代入式(7),计算 $d_i^-(\omega)$,$i\in M$,再按其值由大到小的顺序对方案 $X_i(i\in M)$ 进行排序,值最大者所对应的方案为最优方案.

3 实例分析

一个家庭欲购买1台冰箱,现有5种品牌冰箱 $X_i(i=1,2,\cdots,5)$ 可供选择,主要的评价属性有6项,即:安全性 S_1,制冷性能 S_2,结构性 S_3,可靠性 S_4,经济性 S_5,美观性 S_6. 上述6项属性均为效益型,且每个方案在各项属性下的属性值以三角模糊数形式给出,具体如表1所示.

采用本文方法来对表1中的5个方案进行排序及择优.

1)由于各项属性均为效益型属性,故可由式(1)将模糊决策矩阵 $\tilde{A}$ 转化为规范化决策矩阵 $\tilde{B}$(表2).

2)根据式(3)与式(4)确定模糊理想点 $\tilde{X}^+$ 和模糊负理想点 $\tilde{X}^-$,

$\tilde{X}^+=[(0.90,0.95,1.00),(0.96,0.98,1.00),(0.94,0.98,1.00),(0.94,0.97,1.00),(0.96,0.99,1.00),(0.96,0.98,1.00)]$,

$\tilde{X}^-=[(0.80,0.85,0.90),(0.88,0.91,0.95),(0.88,0.91,0.93),(0.87,0.90,0.94),(0.88,0.91,0.94),(0.86,0.88,0.91)]$.

3)考虑两种情况:(i)若属性权重完全未知,则由式(6)求得属性的权重向量

$\omega^+=(0.1117,0.2591,0.2591,0.1857,0.1278,0.0564)^T$,

并求得 $f_i(\omega)(i=1,2,\cdots,5)$ 的值分别为:

$f_1(\omega)=0.0037$,$f_2(\omega)=0.0047$,$f_3(\omega)=0.0077$,$f_4(\omega)=0.0092$,$f_5(\omega)=0.0038$.

这种方法所得的方案排序为:$X_1>X_5>X_2>X_3>X_4$.

(ii)若已知各属性的权重信息为

$H=[0.15\leqslant\omega_1\leqslant0.25,0.10\leqslant\omega_2\leqslant0.20,0.16\leqslant\omega_3\leqslant0.22,0.05\leqslant\omega_4\leqslant0.15,0.18\leqslant\omega_5\leqslant0.25,0.19\leqslant\omega_6\leqslant0.30,\sum_{j=1}^{6}\omega_j=1]$,

则求解模型(M3)和(M4)可得属性的权重向量为

$\omega^+=\omega^-=(0.16,0.10,0.22,0.15,0.18,0.19)^T$

代入式(5)和式(7)计算 $d_i^+(\omega)$ 和 $d_i^-(\omega)(i=1,2,\cdots,5)$ 的值分别为:

$d_1^+(\omega)=0.0301$,$d_2^+(\omega)=0.0218$,$d_3^+(\omega)=0.0408$,$d_4^+(\omega)=0.0562$,$d_5^+(\omega)=0.0412$;

$d_1^-(\omega)=0.0419$,$d_2^-(\omega)=0.0581$,$d_3^-(\omega)=0.0409$,$d_4^-(\omega)=0.0267$,$d_5^-(\omega)=0.0403$.

这两种方法所得的方案排序均为:$X_2>X_1>X_3>X_5>X_4$. 故最优方案为 X_2.

表1 模糊决策矩阵 $\tilde{A}$

Table 1 Fuzzy decision making matrix $\tilde{A}$

方案	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
X_1	[0.80,0.85,0.90]	[0.90,0.92,0.95]	[0.91,0.94,0.95]	[0.93,0.96,0.99]	[0.90,0.91,0.92]	[0.95,0.97,0.99]
X_2	[0.90,0.95,1.0]	[0.89,0.90,0.93]	[0.90,0.92,0.95]	[0.90,0.92,0.95]	[0.94,0.97,0.98]	[0.90,0.93,0.95]
X_3	[0.88,0.91,0.95]	[0.84,0.86,0.90]	[0.91,0.94,0.97]	[0.91,0.94,0.96]	[0.86,0.89,0.92]	[0.91,0.92,0.94]
X_4	[0.85,0.87,0.90]	[0.91,0.93,0.95]	[0.85,0.88,0.90]	[0.86,0.89,0.93]	[0.87,0.90,0.94]	[0.92,0.93,0.96]
X_5	[0.86,0.89,0.95]	[0.90,0.92,0.95]	[0.90,0.95,0.97]	[0.91,0.93,0.95]	[0.90,0.92,0.96]	[0.85,0.87,0.90]

表2 规范化决策矩阵 $\tilde{B}$

Table 2 Normalized decision making matrix $\tilde{B}$

方案	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
X_1	(0.80,0.85,0.90)	(0.95,0.97,1.00)	(0.94,0.97,0.98)	(0.94,0.97,1.00)	(0.92,0.93,0.94)	(0.96,0.98,1.00)
X_2	(0.90,0.95,1.00)	(0.94,0.95,0.98)	(0.93,0.95,0.98)	(0.91,0.93,0.96)	(0.96,0.99,1.00)	(0.91,0.94,0.96)
X_3	(0.88,0.91,0.95)	(0.88,0.91,0.95)	(0.94,0.97,1.00)	(0.92,0.95,0.97)	(0.88,0.91,0.94)	(0.92,0.93,0.95)
X_4	(0.85,0.87,0.90)	(0.96,0.98,1.00)	(0.88,0.91,0.93)	(0.87,0.90,0.94)	(0.89,0.92,0.96)	(0.93,0.94,0.97)
X_5	(0.86,0.89,0.95)	(0.95,0.97,1.00)	(0.93,0.98,1.00)	(0.92,0.94,0.96)	(0.92,0.94,0.98)	(0.86,0.88,0.91)

4 结束语

模糊多属性决策是一个有前途的研究方向，它在决策科学中的研究相当活跃.本文针对属性权重信息完全未知或只有部分权重信息且属性值为三角模糊数的模糊多属性决策问题，提出了3种基于模糊理想点的最优化决策模型.通过对这3种模型的求解，可获得属性的权重，给出相应的对方案进行排序和择优的决策方法，从而为解决权重信息不完全的模糊多属性决策问题提供了新途径.实例分析的结果表明，该方法具有可行性和有效性.

参考文献：

[1] DONG W M,WONG F S. Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle[J]. Fuzzy Sets and Systems,1987,21:183-199.

[2] LIOU T S,WANG M J. Fuzzy weighted average:an improved algorithm[J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,49:307-315.

[3] LIOU T S,WANG M J. Ranking fuzzy numbers with integral value[J]. Fuzzy Sets and Systems,1992,50:247-255.

[4] GUH Y Y,HONG C C,WANG K M,et al. Fuzzy weighted average:a max-min paired elimination method [J]. Comput Math App,1996,32:115-123.

[5] LEE D H,PARK D. An efficient algorithm for fuzzy weighted average[J]. Fuzzy Sets and Systems,1997,87:39-45.

[6] KAO C,LIU S T. Fractional programming approach to fuzzy weighted average [J]. Fuzzy Sets and Systems,2001,120:435-444.

[7] 徐泽水.对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法研究[J].系统工程与电子技术,2002,24(8):9-12.

[8] 徐泽水.基于期望值的模糊多属性决策法及其应用[J].系统工程理论与实践,2004(1):109-113.

[9] 汪培庄.模糊集合理论及其应用[M].上海:科学技术出版社,1983.

（责任编辑：邓大玉）

（上接第101页 Continue from page 101）

[5] DENG N Y,XIAO Y,ZHOU F J. Nonmonotonic trust region algorithm[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1993,76(2):259-285.

[6] FU J H,SUN W Y. Nonmonotone adaptive trust-region method for unconstrained optimization problems [J]. Applied Mathematics and Computation,2005,163:489-504.

[7] SUN W,SAMPAIO R J B,YUAN J Y. Trust region methods with quasi-Newton update for nonsmooth least-square problems [J]. Applied Mathematics and Computation,1999,105:183-194.

[8] NOCEDAL J,YUAN Y. Combining trust region and linear search techniques [M]//Yuan Y. Advances in nonlinear programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,1998:153-175.

[9] ZHANG H C,HAGER W W. A nonmonotone line search technique and its application to unconstrained optimization[J]. SIAM J Optim,2004,14(4):1043-1056.

[10] 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论和方法[M].北京:科学出版社,1997.

[11] 飞思科技产品研发中心.MATLAB 6.1 辅助优化计算与设计[M].北京:电子工业出版社,2003.

[12] MORé J J,GARBOW B S,HILLSTROM K E. Testing unconstrained optimization [J]. ACM Trans Math Software,1981,7:17-41.

（责任编辑：邓大玉）