收缩临界 6 连通图中的 6 度顶点*

Vertices of Degree 6 in Contraction-Critical 6 Connected Graphs

齐恩凤,袁旭东

QI En-feng,YUAN Xu-dong

(广西师范大学数学学院,广西桂林 541004)

(College of Mathematics,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:证明对于收缩临界 6 连通图中的任一个 6 度点 x,或者它与一个 6 度点相邻,或者在它的邻域中存在一点 y,在 y 的邻域中一定有 2 个相邻的 6 度点.

关键词:连通图　断片　可收缩边

中图法分类号:O157.5　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2006)02-0085-05

Abstract: It is proved that for each vertex x of degree 6 in a contraction-critical connected graph either there is a neighbor of degree 6 of x, or there exists a vertex y in $N(x)$ such that there are two adjacent vertices of degree 6 in the neighborhood of y.

Key words: connected graph, fragment, contractible edge

在本文中我们考虑的都是无向的简单图,未经说明的术语与记号参看文献[1].设 G 是非完全图,$F \subset V(G)$,$N_G(F)$ 是 $V(G)$-F 中与 F 相邻的顶点集合,若 $F=\{x\}$,则记为 $N_G(x)$.$d_G(x)=|N_G(x)|$ 表示点 x 在 G 中的度.记 $\overline{F}=V(G)-(F \cup N_G(F))$.若 $|N_G(F)|=\kappa(G)$ 且 $\overline{F} \neq \phi$,则称 F 为 G 的断片,这里 $\kappa(G)$ 表示 G 的连通度.设 $T \subset V(G)$,若 G-T 不连通,则称 T 是 G 的点割集.当 $|T|=\kappa(G)$,则称 T 是 G 的最小点割集.设 F 是 G 的断片,记 $T=N_G(F)$,有时也称 F 是 G 中的 T-断片.易见 $N_G(F)=T=N_G(\overline{F})$,且 $\overline{F}$ 也是 G 的 T-断片,这时称 F 与 $\overline{F}$ 是最小点割 T 分离 G 所得的 2 个断片.若 F 是断片,但 F 的任意真子集都不是 G 的断片,则称 F 为 G 的端片.顶点数最少的断片叫原子.在不引起混淆时,我们省略 $N_G(A)$ 以及类似符号中的下标 G.

设 G 是 n 连通图非完全图,$e \in E(G)$.若收缩边 e 后得到的图仍然是 n 连通,则称 e 为 G 的 n 可收缩边,简称可收缩边,反之则称 e 为不可收缩边.易见,$e=xy$ 是 G 的不可收缩边当且仅当 G 中有包含 $\{x,y\}$ 的点割 T 且 $|T|=n$.若非完全图 G 的每条边都不可收缩,则称 G 为收缩临界 n 连通图.设 G 是收缩临界 n 连通图,Egawa[2] 证明了下面的定理 1.

定理 1　设 G 是收缩临界 n 连通图,则 G 中有断片 F,使得 $|F| \leqslant \frac{n}{4}$.

苏健基[3] 改进了这个结果,得到下面的定理 2.

定理 2　设 G 是收缩临界 n 连通图,则 G 中存在两个不相交的断片 A,B,使得 $|A|+|B| \leqslant \frac{n}{2}$.

由定理 1,收缩临界 6 连通图中有一个断片的阶是 1,这个断片中唯一的点的度为 6,即收缩临界 6 连通图中一定有 6 度点.袁旭东等[4] 得到更进一步的性质.

定理 3　收缩临界 6 连通图中一定存在两个相邻的 6 度顶点.

赵巧凤等[5] 最近得到收缩临界 6 连通图 G 中至少有 $\frac{1}{5}|V(G)|$ 个 6 度点.本文改进定理 3 的结果,得到下面的定理 4.

定理 4　设 x 是收缩临界 6 连通图 G 中的一个 6 度点.则或者 x 与一个 6 度点相邻,或者在 x 的邻域中存在一点 y,在 y 的邻域中一定有 2 个相邻的 6 度点.

收稿日期:2005-07-19

修回日期:2006-02-24

作者简介:齐恩凤(1980-),女,山东青岛人,硕士研究生,主要从事图论方面的研究。

*广西教育厅科研项目(合同号:桂教科研[2005]47 号)资助。

1 断片的一些性质

在定理 4 的证明中，我们用到下面一些关于断片的一些结论.

引理 1[6] 设 F 是 G 的 T- 断片，F' 是 G 的 T'- 断片，如果 $F\cap F'\neq\phi$，则 $|F\cap T'|\geqslant|\overline{F'}\cap T|$. 当等号成立时，则 $F\cap F'$ 是 G 的断片，此时 $N(F\cap F')=(F\cap T')\cup(T\cap T')\cup(F'\cap T)$. 特别的，如果 $F\cap F'\neq\phi\neq\overline{F}\cap\overline{F'}$ 时，则 $F\cap F'$，$\overline{F}\cap\overline{F'}$ 都是 G 的断片.

引理 2[7] 设 F 是 G 的 T- 断片，$X\subseteq T$，则 $|N(X)\cap F|\geqslant\min\{|X|,|F|\}$. 若等号成立，则 $F-N(X)=\phi$ 或者 $F-N(X)$ 是 $(F\cap N(X))\cup(T-X)$- 断片.

引理 3[6] 设 $x\in G$，A 是 $G-x$ 的原子，T 是 G 中包含 x 的最小点割，若 $A\cap T\neq\phi$，则 $A\subseteq T$，且 $|A|\leqslant\dfrac{\kappa(G)-1}{2}$. 特别的，对任意的 T- 断片 F，$|F\cap N(A)|\geqslant|A|$.

如果对一个图 G 的任意断片 F，都存在 G 的最小点割 T，使得 $F\cap T\neq\phi$，则 G 称为几乎临界的. 记 $Cr(G)$ 为 G 中包含在 G 的最小点割中的顶点的集合.

引理 4[6] 设 G 是几乎临界 k 连通图，则 G 中存在 4 个断片 F_1,F_2,F_3,F_4，使得 F_1,F_2,F_3 及 $F_4\cap Cr(G)$ 两两不相交.

引理 5[7] 设 G 是收缩临界 k 连通图，设 A 是 G 的原子，或 A 是单点集，或者 $A\subseteq V(G)$ 且 $|N(A)|\geqslant k$，并且存在 $(a',t')\in A\times N(A)$，使得当 $(a,t)\in A\times N(A)-\{(a',t')\}$ 时，a,t 都相邻. 则 $G-A$ 是几乎临界 $(k-|A|)$ 连通的，$N(A)\subseteq Cr(G-A)$，且 $G-A$ 的每个 T- 断片都是 G 的 $(A\cup T)$- 断片.

设 G 是收缩临界 k 连通图，在下面的证明中我们经常用到这一情形：当 $A=\{x\}$ 时，由引理 5，$G-x$ 是几乎临界 $k-1$ 连通的，$N(x)\subseteq Cr(G-x)$，且 $G-x$ 的每个 T- 断片都是 G 的 $(T\cup\{x\})$- 断片. 另一方面，对任意的 $x\in V(G)$，如果 F 是 G 的 T- 断片且 $x\in T$，则 F 也是 $G-x$ 的 $(T-\{x\})$- 断片.

2 定理 4 的证明

以下我们均设 G 是收缩临界 6 连通图，记 $W_0=\{x\in V(G)\,|\,d(x)=6\}$. 由定理 1 知，$W_0\neq\phi$. 用反证法证明定理 4. 设 $x\in W_0$ 是 G 中任意一个 6 度点且 $N(x)\cap W_0=\phi$，并假设 $N(x)$ 中没有顶点 y，使得 y 的邻域中有 2 个相邻的 6 度点. 下面导出矛盾.

任取 $G-x$ 的一个原子 A，因此，$N_G(A)=N_{G-\{x\}}(A)\cup\{x\}$. 由前述，$A$ 也是 G 的断片且 $N_G(A)$ 包含 x（在以下不引起混淆时，我们都省略 $N_G(A)$ 以及类似符号中的下标 G）.

设 $x'\in N(x)\cap A$. 由于 G 是收缩临界 6 连通图，G 有最小点割 T 包含 x,x'，因此 $T\cap A\neq\phi$. 由引理 3，$|A|\leqslant 2$. 又 $N(x)\cap W_0=\phi$，则 $|A|=2$. 我们首先推出一些关于 A 的性质.

断言 1 $A\cap W_0=\phi$，$A\subseteq N(x)$.

证明 由于 $|A|=2$，则 A 中至少有一个 7 度点（否则 A 中 2 个点都是 6 度点，而其中一个与 x 相邻，矛盾）. 因此，$A\times N(A)$ 至多有一个 (a,t) 使得 a,t 不相邻. 运用引理 5 得到 $G-A$ 是几乎临界图，且 $G-A$ 的每个断片 F 都是 G 的 T- 断片且 $T\supseteq A$. 由引理 4 知 $G-A$ 中存在 4 个断片 $F_i(i=1,2,3,4)$ 使得 $F_1\cap N(A)$，$F_2\cap N(A)$，$F_3\cap N(A)$，$F_4\cap N(A)$ 两两不相交（这里注意 $N(A)\subseteq Cr(G-A)$. 因为对 $i=1,2,3,4$，F_i 也是 G 的断片且 $N(F_i)\supseteq A$，$F_i\cap N(A)\neq\phi$，所以 $4\leqslant\sum\limits_{i=1}^{4}|F_i\cap N(A)|\leqslant|N(A)|=6$. 因此至少存在 2 个 F_i 使得 $|F_i\cap N(A)|=1$. 设为 $|F_1\cap N(A)|=1=|F_2\cap N(A)|$. 由引理 2，$F_i(i=1,2)$ 满足 $F_i\subseteq N(A)$ 且 $|F_i|=1$，因此 F_1,F_2 中的 2 个点是 G 中的 6 度点，即 $N(A)$ 中至少有 2 个 6 度点. 因而 $N(A)-\{x\}$ 中还有一个 6 度点 x_1. 如果 $A\cap W_0=\{a\}\neq\phi$，则 a 与 x 不相邻，因而 a 与 x_1 相邻. 设 $N(x)\cap A=\{y\}$，显然 y 与 x,a,x_1 都相邻，即 $N(x)$ 中有点 y，在 y 的邻域中有两个相邻的 6 度点 a,x_1，矛盾. 所以，$A\cap W_0=\phi$，由此也得到 $A\subseteq N(x)$.

取 $a\in A$，由断言 1，则 a 与 $N(A)$ 中所有的点相邻，因而存在 G 的最小点割 $T\supseteq\{a,x\}$. 由引理 3，$A\subseteq T$. 设 F 是 T- 断片. 记

$$F\cap N(A)=C,T\cap N(A)=R,\overline{F}\cap N(A)=D,$$

$$F\cap\overline{A}=S,T\cap\overline{A}=K,\overline{F}\cap\overline{A}=L.$$

注意到 $F,\overline{F}$ 都是 T- 断片且 $x\in N(A)\cap T$，所以，由引理 3 可推出 $|C|\geqslant 2$，$|D|\geqslant 2$. 因此，$2\leqslant|C|\leqslant 3$，$2\leqslant|D|\leqslant 3$，$1\leqslant|R|\leqslant 2$.

断言 2 设 $c\in C-N((C\cup R)\cap W_0)\neq\phi$（则 $c\in C\cap W_0$ 或 c 是 C 中与 $(C\cup R)\cap W_0$ 的点不相邻的非 6 度点）. 取 $a\in A$ 以及 G 的最小点割 $T'\supseteq\{a,c\}$. 设 F' 是 T'- 断片，则 $F\cap\overline{F'}$ 或者 $F\cap F'$ 是断片.

证明 首先我们证明 $F\cap F'$，$F\cap\overline{F'}$ 至少有一个是非空的. 若不然，设 $F\cap F'=\phi=F\cap\overline{F'}$，则 $F\subseteq T'$. 由 $2\leqslant|C|\leqslant 3$，$C\subseteq F$，则 $|F|\geqslant|C|\geqslant 2$. 如果 $|F|=2$，则 $C=F$，F 是 $G-x$ 的原子. 由断言 1 可知，

$F \subseteq N(x)$，则 x,c 相邻．若 $c \in C \cap W_0$，则 $c \in N(x) \cap W_0$，与 $N(x) \cap W_0 = \phi$ 矛盾；若 $c \notin C \cap W_0$，则 $c \in N(x) \cap C$，同样与 c 的假设矛盾．下面设 $|F| \geqslant 3$．先推出 $A \subseteq T'$，否则，因为 $a \in A \cap T'$ 且 $|A| = 2$，可以得到 $F \cap A = \phi$ 或 $\overline{F} \cap A = \phi$．不妨设 $F \cap A = \{a'\}$，$\overline{F} \cap A = \phi$．注意 a' 也与 $N(A)$ 中所有点相邻，因此 $N(A) \cap \overline{F} = \phi$，$\overline{F} = \overline{F} \cap \overline{A} \neq \phi$．由引理 1，$0 = |\overline{F} \cap N(A)| \geqslant |A \cap T'| = |\{a\}| = 1$，矛盾．因此 $A \subseteq T'$，从而 $A \subseteq T \cap T'$．现在考虑 F,F'．由于 $F \subseteq T'$ 且 $|F| \geqslant 3$，而 $|T \cap T'| \geqslant |A| = 2$，则 $|\overline{F} \cap T'| = |T'| - |F \cap T'| - |T \cap T'| \leqslant 1$．由于 $D \subseteq \overline{F}$，因此 $|\overline{F}| \geqslant 2$，即有 $F' \cap \overline{F}$，$\overline{F} \cap \overline{F'}$ 至少有一个非空．不妨设 $F' \cap \overline{F} \neq \phi$．由引理 1，则 $|T \cap F'| \geqslant |F \cap T'| = |F| \geqslant 3$，用前面同样推理可得到，$|T \cap \overline{F'}| \leqslant 1$，由此可得 $|T \cap \overline{F'}| < |F| = |F \cap T'|$，从而由引理 1 可推出 $\overline{F} \cap \overline{F'} = \phi$，因此 $|\overline{F'}| = |T \cap \overline{F'}| = 1$．设 $\overline{F'} = \{z\}$，则 $z \in W_0$．注意 z,c 相邻，因此 $z \in (C \cup R) \cap W_0$．若 $x = z$，则 x,c 相邻，同上可推出矛盾．所以 $z \neq x$．若 $c \in (C \cap W_0)$，则 $\{z,c\} \subseteq N(a)$ 是一对相邻的 6 度点，而 $a \in N(x)$，则与假设矛盾；否则 $c \notin C \cap W_0$，由于 $z \in (C \cup R) \cap W_0$，以及 z,c 相邻，同样与 c 的假设矛盾．所以 $F \cap F'$，$F \cap \overline{F'}$ 至少有一个非空．

不妨设 $F \cap F' \neq \phi$，且 $F \cap F'$ 不是断片，则由引理 1 知，$|F' \cap T| > |T' \cap \overline{F}|$，$|T' \cap F| > |\overline{F'} \cap T|$，$\overline{F} \cap \overline{F'} = \phi$．若 $|F' \cap T| \geqslant 2$，则 $|F \cap T'| \geqslant 3$，所以 $|\overline{F} \cap T'| \leqslant 1$．由引理 1 可推出 $\overline{F} \cap F' = \phi$．因此 $\overline{F} \subseteq T'$ 且 $|\overline{F}| = 1$．令 $\overline{F} = \{y\}$，则 $y \in W_0$ 且 x,y 相邻，与 $N(x) \cap W_0 = \phi$ 矛盾．所以 $|F' \cap T| \leqslant 1$．此时若 $F \cap \overline{F'} \neq \phi$，由引理 1 得，$1 \geqslant |F' \cap T| \geqslant |\overline{F} \cap T|$，注意 $|\overline{F}| \geqslant 2$ 且 $\overline{F} \cap \overline{F'} = \phi$，因此 $\overline{F} \cap F' \neq \phi$，由引理 1，则得到 $F \cap \overline{F'}$ 是断片．从而结论成立．若 $F \cap \overline{F'} = \phi$，则 $|F' \cap T| = 1$ 且 $\overline{F'} \subseteq T$．令 $\overline{F'} \cap T = \{y\}$，则 $y \in W_0$ 且 y,c 相邻．用类似于上一段讨论 $|F| \geqslant 3$ 的情况进行讨论可得到矛盾．所以 $F \cap F'$ 或 $F \cap \overline{F'}$ 是断片．

断言 3 (1) 若 $|C| = 2$，则 $C \cap W_0 = \phi$ 且 $C \subseteq N(R \cap W_0)$；

(2) 若 $|C| = 3$(此时 $|R| = 1$，即 $R = \{x\}$)，则 $|C \cap W_0| \leqslant 1$．而且，如果 $C \cap W_0 = \phi$，则 $|N(x) \cap C| \geqslant 2$；如果 $C \cap W_0 = \{c\}$，则 $C - \{c\} \subseteq N(\{x,c\})$．

证明 (1) 假设 $C \cap W_0 \neq \phi$，或当 $C \cap W_0 = \phi$ 且 $C - N(R \cap W_0) \neq \phi$，在前者，取 $c \in C \cap W_0$，在后者，取 $c \in C - N(R \cap W_0)$．设 $a \in A$，取最小点割 $T' \supseteq \{a,c\}$，设 F' 是 T'-断片．由断言 2，不妨设 $F \cap F'$ 是断片．则 $N(F \cap F') = (F \cap T') \cup (T \cap T') \cup (F' \cap T)$，因此 $A \subseteq T \cap T' \subseteq N(F \cap F')$．由引理 2，$\min\{|A|, |F \cap F'|\} \leqslant |N(A) \cap (F \cap F')| \leqslant |(N(A) \cap F) - \{c\}| = |C - \{c\}| = 1$，所以 $|F \cap F'| = 1 = |C - \{c\}|$．不妨设 $C - \{c\} = \{c'\}$，则 $c' \in W_0$ 且 $cc' \in E(G)$．若 $c \in C \cap W_0$，由于 $c,c' \in N(a) \cap W_0$ 且 $a \in N(x)$，注意 $cc' \in E(G)$，矛盾．如果 $c \notin C \cap W_0$，由于 $c' \in C \cap W_0$ 且 $cc' \in E(G)$，这与 c 的取法矛盾．(1) 得证．

(2) 设 $|C| = 3$，而结论不成立．(i) 若 $|C \cap W_0| \geqslant 2$，取 $c_1,c_2 \in C \cap W_0$；(ii) 若 $C \cap W_0 = \{c\}$ 而 $C - \{c\} \nsubseteq N(\{x,c\})$ 时，取 $c_1 = c$，$c_2 \in C - (N(\{x,c\}) \cup \{c\})$；(iii) 若 $C \cap W_0 = \phi$ 且 $|N(x) \cap C| \leqslant 1$，取 c_1，$c_2 \in C - N(x)$．

设 $a \in A$，对 $i = 1,2$ 取最小点割 $T'_i \supseteq \{a,c_i\}$．设 F'_i 是 T'_i-断片．根据断言 2，我们不妨设 $F \cap F'_1$，$F \cap F'_2$ 是 G 的断片．记 $F_1 = F \cap F'_1$，$F_2 = F \cap F'_2$．若 $|F_1| = 1$($|F_2| = 1$ 同理推导)，令 $F_1 = \{c'\}$，则 $c' \in W_0$．类似于(1)知道 $A \in N(F_1)$，而 $\{c'\} = F \cap F'_1 \subseteq F$，所以 $c' \in C$．因此 $C \cap W_0 \neq \phi$．由我们的取法这是 (i) 或 (ii) 的情形．所以 $|C \cap W_0| \geqslant 2$．由 $c',c_1 \in W_0$，$c_1c' \in E(G)$ 且 $c_1,c' \in N(a)$，类似于(1)可得到矛盾．

以下我们设 $|F_1| \geqslant 2$，$|F_2| \geqslant 2$，则 $|N(A) \cap F_i| \geqslant \min\{|A|, |F_i|\} = 2$，$i = 1,2$．设 $C = \{c_1,c_2,c_3\}$，因为 $N(A) \cap F_1 = N(A) \cap (F \cap F'_1) \subseteq (C - \{c_1\})$，$N(A) \cap F_2 = N(A) \cap (F \cap F'_2) \subseteq (C - \{c_2\})$，故 $N(A) \cap F_1 = \{c_2,c_3\}$，$N(A) \cap F_2 = \{c_1,c_3\}$，所以 $F_1 \cap F_2 \supseteq \{c_3\} \neq \phi$．又因为 $\overline{F_i} \supseteq \overline{F} \supseteq D$，所以 $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \supseteq D \neq \phi$，由引理 1，$F_1 \cap F_2$ 是断片．与前面同样的推理，我们可以得到 $A \cup \{c_1,c_2\} \subseteq N(F_1 \cap F_2)$．而 $(F_1 \cap F_2) \cap N(A) \subseteq F \cap N(A) - \{c_1,c_2\} = \{c_3\}$．由引理 2，$\min\{|A|, |F_1 \cap F_2|\} \leqslant |N(A) \cap (F_1 \cap F_2)| = 1$，所以 $F_1 \cap F_2 = \{c_3\}$，$c_3 \in W_0$，$C \cap W_0 \neq \phi$，同样是(i) 或(ii) 的情形．由 $c_3,c_1 \in W_0$，$c_1c_3 \in E(G)$ 且 $c_1,c_3 \in N(a)$，类似于(1)可得到矛盾．(2) 得证．

由 C 与 D 的对称性，断言 3 对 D 也成立．

断言 4 设 B 是 $G - x$ 的端片且 $|B| \geqslant 3$，则 $N(B)$ 中含有 $G - x$ 的一个原子．而且，对于每个 $b \in N(x) \cap B$，$N(B)$ 中含有 $G - x$ 的一个原子 A' 使得 $b \in N(A')$．

证明 设 $b \in N(x) \cap B$，取最小点割 $T' \supseteq \{b,x\}$．设 F' 是 T'-断片，注意 B 也是 G 的断片且 $x \in$

$N(B)$，因此 $x \in N(B) \cap T'$.

首先设 $F' \cap B \neq \phi$. 则 $\overline{F'} \cap \overline{B} = \phi$，$|B \cap T'| > |\overline{F'} \cap N(B)|$，$|F' \cap N(B)| > |\overline{B} \cap T'|$（如上述结论任何一个不成立，由引理1我们可推出 $F' \cap B$ 是 G 的断片；由于 $x \in N(F' \cap B)$，则 $F' \cap B$ 是 $G-x$ 的断片；又 $b \in T' \cap B$，则 $F' \cap B \subset B$，与 B 是 $G-x$ 的端片矛盾）. 若 $|\overline{F'} \cap N(B)| \geqslant 3$，则 $|B \cap T'| \geqslant 4$，所以 $|T' \cap \overline{B}| \leqslant 1$，故 $F' \cap \overline{B} = \phi$，则 $|\overline{B}| = 1$. 令 $\overline{B} = \{y\}$，则 $y \in W_0$，$xy \in E(G)$，与 $N(x) \cap W_0 = \phi$ 矛盾. 所以 $|\overline{F'} \cap N(B)| \leqslant 2$. 当 $|\overline{F'} \cap N(B)| = 1$ 时，如果 $\overline{F'} \cap B \neq \phi$，由于 B 是 $G-x$ 的端片，则类似上面的讨论可得到 $F' \cap \overline{B} = \phi$ 且 $|T' \cap \overline{B}| < 1$，即 $\overline{B} = \phi$，矛盾；如果 $\overline{F'} \cap B = \phi$，则 $\overline{F'} = \overline{F'} \cap N(B)$，因此 $\overline{F'}$ 仅有一个点 $z \in W_0$，注意 $x \in T'$，与 $N(x) \cap W_0 = \phi$ 矛盾. 所以 $|\overline{F'} \cap N(B)| = 2$. 此时如果 $\overline{F'} \cap B \neq \phi$，由 B 是 $G-x$ 的端片知，$|T' \cap \overline{B}| \leqslant 1$，$F' \cap \overline{B} = \phi$. 所以 $|\overline{B}| = 1$，同样与 $N(x) \cap W_0 = \phi$ 矛盾. 所以 $\overline{F'} \cap B = \phi$，则 $\overline{F'} = \overline{F} \cap N(B)$. 因此 $|\overline{F'}| = 2$. 注意 $x \in T'$，令 $A' = \overline{F'}$，所以 $A' \subseteq N(B)$ 是 $G-x$ 的断片，因此也是 $G-x$ 的原子. 又注意 $b \in T'$，因此 $b \in N(A')$，结论成立. 当 $\overline{F'} \cap B \neq \phi$ 时，我们类似可推出结论成立.

以下设 $F' \cap B = \phi = \overline{F'} \cap B$，即 $B \subseteq T'$. 由 $x \in T' \cap N(B) \neq \phi$，得 $|F' \cap N(B)| \leqslant 2$ 或 $|\overline{F'} \cap N(B)| \leqslant 2$ 成立. 不妨设 $|F' \cap N(B)| \leqslant 2$，由引理1可推出 $F' \cap \overline{B} = \phi$，所以 $F' \subseteq N(B)$. 由 $N(x) \cap W_0 = \phi$ 可得到 $|F'| = 2$. 也得到 F' 是 $G-x$ 的原子且有 $b \in N(F')$.

断言5 $|R| = 1$.

证明 假设 $R = \{x, x_1\}$，则 $|C| = |D| = 2$. 若 $R \cap W_0 = \{x\}$，由断言3知，$A \cup C \cup D \subseteq N(x)$，得 $N(x) \cap \overline{A} = \phi$ 矛盾，所以 $R \cap W_0 = \{x, x_1\}$. 若 $S = L = \phi$，则 A, C, D, K 是 $G-x$ 的4个原子，则有 $A \cup C \cup D \cup K \subseteq N(x)$，$d(x) \geqslant 8$，矛盾. 若 $S = \phi$，$L \neq \phi$，则 A, C 是 $G-x$ 的原子，L 是 G 的断片，且 $x, x_1 \in N(L)$，则 $A \cup C \subseteq N(x) \cap N(x_1)$. 由断言3(1)知 $K \cup D \subseteq N(\{x, x_1\})$，又 $N(x) \cap L \neq \phi \neq N(x_1) \cap L$，则 $12 = d(x) + d(x_1) \geqslant 2(|A| + |C|) + |K| + |D| + 2 = 14$，矛盾. 如果 $S \neq \phi$，$L = \phi$，我们类似可推出矛盾.

以下设 $S \neq \phi \neq L$. 因为 A 是 $G-x$ 的原子，由断言1，$A \subseteq N(x) \cap N(x_1)$；又因为 $|C| = |D| = 2$，由断言3(1)知 $(C \cup D) \subseteq N(\{x_1, x\})$. 注意 S, L 都是 G 的断片且 $x_1, x \in N(S)$，$x, x_1 \in N(L)$，因此 $N(x) \cap S \neq \phi \neq N(x_1) \cap S$，$N(x) \cap L \neq \phi \neq N(x_1) \cap L$. 由于 x, x_1 都是6度点，简单计算得到 $|N(x) \cap S| = |N(x_1) \cap S| = 1$，$|N(x) \cap L| = |N(x_1) \cap L| = 1$，且 $N(x) \cap K = \phi$. 由于 $x \in N(S)$，$x \in N(L)$，因此 S, L 都是 $G-x$ 的断片. 取 $B_1 \subseteq S$，$B_2 \subseteq L$ 是 $G-x$ 的端片. 则 B_1 不是 $G-x$ 的原子，否则 $B_1 \subseteq N(x)$，与 $|N(x) \cap S| = 1$ 矛盾. 同理 B_2 不是 $G-x$ 的原子. 所以 $|B_1| \geqslant 3$，$|B_2| \geqslant 3$. 由断言4知，$N(B_1)$ 与 $N(B_2)$ 中都有 $G-x$ 的原子. 因为 $N(B_1) \cap N(B_2) \subseteq K$，注意 $N(x) \cap K = \phi$，因此 $N(B_1)$ 与 $N(B_2)$ 所包含的原子是不相交的原子，从而 $G-x$ 中有3个两两不相交的原子. 加上 x 在 S, L 的邻域，我们得到 $d(x) > 6$ 矛盾，所以 $|R| = 1$.

有以上的准备，现在完成定理4的证明. 由 $|R| = 1$ 知，$|C|$，$|D|$ 中至少有一个是2. 不妨取 $|C| = 2$，$|D| = 3$. 则由断言3(1)知 $C \subseteq N(x)$，因此 $|N(x) \cap (A \cup C)| \geqslant 4$. 又 $N(x) \cap \overline{A} \neq \phi$，所以 $|N(x) \cap D| \leqslant 1$. 由 $|D| = 3$ 及断言3知，$|D \cap W_0| = 1$. 设 $D \cap W_0 = \{d\}$，取 $a \in A$ 和最小点割 $T' \supseteq \{a, d\}$. 设 F' 是 T'-断片，由断言2不妨设 $F' \cap \overline{F}$ 是断片，令 $F_1 = F' \cap \overline{F}$，则 $A \cup \{d\} \subseteq T_1$. 因此 $|F_1| \geqslant 2$（因为 $|F_1| = 1$，则 F_1 中唯一的点是6度点，设为 d'，显然 d, d' 相邻且都与 a 相邻，与假设矛盾）. 因为 $F_1 \cap N(A) \subseteq \overline{F} \cap N(A) - \{d\} = D - \{d\}$，且 $|F_1 \cap N(A)| \geqslant \min\{|A|, |F_1|\} = 2$，所以 $F_1 \cap N(A) = D - \{d\}$. 注意 $F' \cap N(A) \supseteq F_1 \cap N(A) = D - \{d\}$，所以 $|F' \cap N(A)| \geqslant 2$，$d \in T' \cap N(A)$. 若 $x \in F' \cap N(A)$，则 $C \subseteq F' \cup T'$，此时 $\overline{F'} \cap N(A) = \phi$ 矛盾. 若 $x \in T' \cap N(A)$，则 F' 是 G 的断片且 $N(F') \supseteq A \cup \{x\}$，由断言5的证明知 $|T' \cap N(A)| = 1$，这与 $d \in T' \cap N(A)$ 矛盾. 所以 $x \in \overline{F'} \cap N(A)$，$N(x) \cap D = \phi$.

由于 $\overline{F}$ 是 G 的断片且 $x \in T$，因此 $\overline{F}$ 是 $G-x$ 的断片. 令 $B \subseteq \overline{F}$ 是 $G-x$ 的端片，设 $b \in N(x) \cap B$. 若 $|B| = 2$，则 B 是 $G-x$ 的原子. 由断言1知，$B \subseteq N(x)$，$B \cup N(B) \subseteq D \cup R \cup K \cup L \cup \{x\}$，由断言1～5知，$|(B \cup N(B)) \cap N(x)| \geqslant 4$，因此 $d(x) \geqslant 8$ 矛盾. 若 $|B| \geqslant 3$，由断言4知，$N(B)$ 中有 $G-x$ 的原子 A' 使得 $b \in N(A')$，因此 $A' \subseteq D \cup K \cup L$. 由于 $|N(x) \cap A'| \geqslant 2$，所以 $|N(x) \cap (D \cup K \cup L)| \geqslant 3$，得到 $d(x) \geqslant 7$ 矛盾. 定理4得证.

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Application[M]. New York: Macmillan, 1976.

[2] EGAWA Y. Contractible edges in n- connected graphs

with degree greater than or eaqual to [5n/4][J]. Graphs and Combin, 1991, 7(1): 15-21.

[3] SU JIANJI. On some properties of contraction-critical graphs, Combinatorics graph theory algorithms and application [M]//Y Alavi, D R Lick, J Q Liu. Combinatorics, graph theory, algorithms and applications. Siingapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1994: 329-337.

[4] YUAN XUDONG, SU JIANJI. Contractible edges in 6 connected graphs[J]. Advances in Math, 2004, 33(4): 441-446.

[5] ZHAO QIAOFENG, QIN CHENGFU, YUAN XUDONG, et al. Vertices of degree 6 in a contraction-critical 6 connected graph[J]. J Guangxi Normal Univ, 2005, 23(2): 38-43.

[6] MADER W. Generalizations of critical connectivity of graphs[J]. Discrete Math, 1988, 72: 267-283.

[7] KRIESELL M. A new degree sum condition for the existence of a contractible edge in a κ- connected graph [J]. J Combin Theory, 2001, 82: 81-101.

（责任编辑：邓大玉）

《广西科学》投稿要求和注意事项

1 文稿务必论点明确，数据准确，文字精炼。每篇论文（含图、表、公式、参考文献等）一般不超过 5 000 字，研究简报不超过 2 000 字。

2 研究论文请按题目、作者姓名、作者单位、摘要（300 字以内）、关键词（3～8 个）、正文、致谢（必要时）、参考文献的顺序书写；后附与中文相应的英文题目、作者姓名、作者单位、英文摘要（一般不超过 1 500 字符）和英文关键词。

3 文稿请寄投打印稿 2 份，同时可来电子版文稿（接受方正小样、.TXT、.DOC、.WPS 文件），文稿务必做到清稿定稿；务必字迹清楚，用字规范，物理量和单位符合国家标准和国际标准；外文字母、符号用打印字体，必须分清大写、小写，正体、斜体（学名、量的符号等用斜体）；上标、下标的字母、数码和符号的位置高低区别应明显可辨；外文缩略词和容易混淆的外文字、符号，请在第一次出现时注明。

4 文稿中只需附必要的图、表、照片，图需用专业画图工具绘好；其标题、内容说明和图中注释文字、符号同时用中英文标明清楚，并与正文一致。照片请用光面相纸印出，图、照片大小以 80 mm×50 mm 或 160 mm ×100 mm 为宜，要求清晰、层次分明。

5 参考文献只需择主要者列入，未公开发表的资料请勿引用。文献请在正文中标注，文献序号请按文中出现先后为序编排。书写格式，期刊："序号 作者姓名（不超过 3 人者全部写出，超过者只写前 3 名，后加'等'或'et al.'。外文姓前名后，名缩写，不加缩写点，姓名用大写字母）. 文章题目 [J]. 期刊名（外文期刊可用标准缩写，不加缩写点），年，卷（期）：起止页码"；如果期刊无卷号，则为"年（期）：起止页码"。专著："序号 作者姓名（英文姓名用大写）. 书名 [文献类型标志]. 版次（第一版不写）. 出版地：出版单位（国外出版单位可用标准缩写，不加缩写点），出版年：起止页码."

6 文责自负。本刊编辑部可对采用稿作必要的删改，如作者不允许，务请在来稿中注明。

7 来稿请自留底稿，无论刊登与否恕不退稿，要求一式两份（并附一份不一稿多投的证明）。请勿一稿多投，收到本刊收稿回执后 3 个月未接到本刊采用通知时，可自行处理。双方另有约定者除外。

8 自治区、省（部）级以上重大科研项目及攻关项目，国家 863 计划项目，自然科学基金资助项目，开放实验室研究项目和拟到国际学术会议上宣读的论文优先发表，请作者注明（并请注明项目编号）。

9 来稿不得侵犯他人版权，如有侵权，由投稿者负完全责任。

10 来稿一经采用，酌收版面费；刊登后，付稿酬（含《中国学术期刊（光盘版）》、中国期刊网、万方数据网及台湾华艺 CEPS 中文电子期刊服务网的稿酬），并同时赠送给每位作者 1 本样刊。