广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(2)：81～84

有限群的极小子群与超可解性*

Minimal Subgroups and Supersolvability of Finite Groups

李世荣，何宣丽，史江涛
LI Shi-rong，HE Xuan-li，SHI Jiang-tao

(广西大学数学与信息科学学院，广西南宁　530004)
(College of Mathematics and Information Science，Guangxi University，Nanning，Guangxi，530004，China)

摘要：利用群 G 的 *Fitting* 子群、广义 *Fitting* 子群的极小子群 *F-s-* 补条件刻划群 G 的结构，得到新的结果，即：设 F 是含 U 的饱和群系，G 是一有限群，则 $G\in F$ 的充分必要条件是存在 G 的可解正规子群 N(或正规子群 N) 使得 $G/N\in F$ 且 $F(N)$(或 $F^*(G)$) 的所有素数阶子群在 G 中均有超可解 *-s-* 补.

关键词：群系　*Fitting* 子群　*F-s-* 补　超可解群
中图法分类号：O152.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)02-0081-04

Abstract：We characterize the structure of finite group G under the assumpations that minimal subgroups of *Fitting* subgroup and generalized *Fitting* subgroup of G are *F-s-* supplemented，and have the following new results：Let F be a saturated formation containing U and let G be a finite group. Then $G\in F$ if and only if there exists a solvable normal subgroup N (respectively a normal subgroup N) of G such that $G/N\in F$ and all prime order subgroups of $F(G)$ (respectively $F^*(G)$) are supersolvable- *s* -supplemented in G.

Key words：formation，*Fitting* subgroup，*F-s* -supplement，supersolvable group

借助极小子群(即素数阶子群)研究有限群的结构是人们感兴趣的一个课题. Itô[1]证明了，如果群 G 是奇数阶群且 G 的所有极小子群都在 G 的中心里，则 G 是幂零群. 这是关于极小子群最经典的定理之一. 人们针对这一结果进行了一系列推广及研究. 比较有影响的主要有以下两个方面. 一方面是利用极小子群的正规性条件刻划有限群，如文献[2～5]；另一方面是探求上述结果局部化，如李世荣[6,7]系统研究了有限群 G 的 *Sylow* p- 子群 S 的极小子群与 S 的正规化子 $N_G(S)$ 之间的关系，获得了关于 Itô 定理的一系列推广，是极小子群理论的重要创新. 近年来，极小子群的研究又有新的进展. Wang[8] 引出 C- 正规概念并证明：如果有限群 G 的极小子群及 4 阶循环子群 $\langle x\rangle$ 在 G 中 C- 正规，则 G 超可解. Ballester-Bolinches 和 Xiuyun Guo[9] 证明了 G 的所有素数阶子群在 G 中都有补的有限群恰好是 *Sylow* 子群是初等交换群的超可解群. 最近，郭文彬和缪龙[10] 从另一个角度定义了 *F-s-* 补概念，并利用极大子群的 *F-s-* 补性给出了群的一些新的性质和结构.

作为以上研究的继续，本文主要利用群 G 的 *Fitting* 子群、广义 *Fitting* 子群的极小子群 *F-s-* 补条件刻划群 G 的结构，并推广了一些已知的结果.

群类 F 称为群系，如果(i)$G\in F$ 及 $N\lhd G$ 蕴含 $G/N\in F$；(ii) 若 $N_1,N_2\lhd G$，使得 $G/N_1,G/N_2\in F$，则 $G/(N_1\cap N_2)\in F$. 一个群系 F 称为饱和的. 如果 $G/\Phi(G)\in F$ 蕴含 $G\in F$. 众所周知，超可解群类是饱和群系[11]，记为 U.

本文所使用的符号 $G=[H]K$ 表示 G 是 H 与 K 的半直积，其中 $H\lhd G$. 其他符号都是标准的，参见文献[12].

1　预备知识及引理

定义 1.1[10]　设 F 是一个群类，群 G 的子群 H 在 G 中称为 *F-s-* 可补的. 如果存在 G 的子群 K，使得

收稿日期：2005-08-04
修回日期：2005-09-23
作者简介：李世荣(1940-)，男，湖南人，教授，主要从事群论研究。
*广西自然科学基金(0249001)资助项目。

$G=HK$ 且 $K/(K\cap \dot{H}_G)\in F$,其中 $H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$ 是包含在 H 中的群 G 的最大正规子群. 此时 K 也称为 H 在 G 中的一个 F-s- 补. 特别地,H 在 G 中称为超可解 -s- 补的,如果存在 G 的子群 K,使得 $G=HK$ 且 $K/(K\cap H_G)$ 超可解. H 在 G 中称为 p- 幂零 -s- 补的,如果存在 G 的子群 K,使得 $G=HK$ 且对某素数 p,$K/(K\cap H_G)$ 是 p- 幂零的.

引理 1.1[10] 设 F 是一个商群闭且子群闭的群类,H 是 G 的一个子群,则下列断言成立:

(1) 如果 K 是 H 在 G 中的 F-s- 补且 $N\lhd G$,则 KN/N 是 HN/N 在 G/N 中的 F-s- 补.

(2) 如果 $H\leqslant D\leqslant G$ 且 K 是 H 在 G 中的 F-s-补,则 $K\cap D$ 是 H 在 D 中的 F-s- 补.

引理 1.2[12] 设 G 是有限群,N,D 是 G 的正规子群且 $D\leqslant N$,$D\leqslant \Phi(G)$,则 N/D 幂零的充要条件是 N 幂零.

引理 1.3[12] 设 G 是有限群,且 $\Phi(G)=1$,则 $F(G)$ 是交换群且 $F(G)=\langle N\mid N$ 是 G 的可解极小正规子群$\rangle$.

引理 1.4[13] 设 G 为一个可解群. 若 $F(G)$ 有一正规列 $\Phi(G)=K_0\leqslant K_1\leqslant K_2\leqslant\cdots\leqslant K_n=F(G)$ 使得 $K_i\trianglelefteq G$,$|K_{i+1}/K_i|$ 为素数,则 G 超可解.

引理 1.5[14] 如果 G 的每个包含在 N 中的极小正规子群不包含在 $\Phi(G)$ 中,则 $F(N)$ 是群 G 的包含在 N 中的极小正规子群的直积.

引理 1.6[12] 设 G 为有限群,p 是 $|G|$ 的最小素因子. 如果 $H\leqslant G$ 且 $|G:H|=p$,则 $H\lhd G$.

引理 1.7[15] 设 G 为群,N 是 G 的子群. (1) 如果 $N\lhd G$,那么 $F^*(N)\leqslant F^*(G)$;(2) 如果 $F^*(G)$ 可解,那么 $F^*(G)=F(G)$.

引理 1.8[12] 设 G 是一有限可解群,则 $C_G(F(G))\leqslant F(G)$.

引理 1.9[7] 设 F 是含 U 的饱和群系,G 是一有限群. 如果 G 存在循环正规子群 N 使得 $G/N\in F$,则 $G\in F$.

引理 1.10[12] 极小非 p- 幂零群是极小非幂零群.

2 主要结果

命题 2.1 设 G 为一有限可解群,$F(G)$ 是 G 的 Fitting 子群. 如果 $F(G)$ 的所有素数阶子群在 G 中均有超可解 -s- 补,则 G 为超可解群.

证明 假设命题不真,并设 G 为极小阶反例.

(1) $\Phi(G)=1$.

否则,存在素数 $p\in\pi(\Phi(G))$,取 $P\in Syl_p(\Phi(G))$. 由于 $\Phi(G)$ 幂零,所以 $P\ char\ \Phi(G)$. 又因为 $\Phi(G)\trianglelefteq G$,故 $P\trianglelefteq G$. 由引理 1.2 知,$F(G/P)=F(G)/P$. $F(G/P)$ 的任一极小子群具有形式 LP/P,其中 L 是 $F(G)$ 的极小子群. 由题设条件知,L 在 G 中有超可解 -s- 补. 又由引理 1.1(1) 知,LP/P 在 G/P 中有超可解 -s- 补. 故 G/P 满足命题条件. 由 G 的极小性可得,G/P 超可解. 又因为 $P\leqslant\Phi(G)$,所以 $G/\Phi(G)$ 超可解,从而 G 超可解,矛盾.

(2) $F(G)=\langle x_1\rangle\times\langle x_2\rangle\times\cdots\times\langle x_s\rangle$,其中 $\langle x_i\rangle$ 是 G 的素数阶正规子群.

由(1)及引理 1.3 可知,$F(G)=R_1\times R_2\times\cdots\times R_s$,其中 R_i 是 G 的极小正规子群. 对任意 $R_i\leqslant F(G)$,任取 R_i 的极小子群 $\langle x\rangle$,由题设条件及定义 1.1 知,存在 $K\leqslant G$ 使得 $G=\langle x\rangle K$ 且 $K/(\langle x\rangle_G\cap K)$ 超可解. 假设 $\langle x\rangle<R_i$,则由 R_i 的极小正规性可知,$\langle x\rangle_G=1$. 故 $K\cong K/(\langle x\rangle_G\cap K)$,从而 K 超可解. 由 $R_i\lhd G$,则 $R_i\cap K\trianglelefteq K$. 又由 G 可解知,R_i 交换,故 $R_i\cap K\trianglelefteq R_i$. 所以 $R_i\cap K\trianglelefteq G$. 再由 R_i 的极小正规性可得,$R_i\cap K=R_i$ 或 $R_i\cap K=1$. 若 $R_i\cap K=R_i$,则 $G=\langle x\rangle K=K$ 超可解,矛盾. 若 $R_i\cap K=1$,则 $R_i=R_i\cap\langle x\rangle K=\langle x\rangle(R_i\cap K)=\langle x\rangle$,矛盾.

(3) 导出矛盾.

由(2)及引理 1.4 知,G 超可解,矛盾.

定理 2.1 设 F 是含 U 的饱和群系,G 是一有限群. 则 $G\in F$ 的充分必要条件是存在 G 的可解正规子群 N 使得 $G/N\in F$ 且 $F(N)$ 的所有素数阶子群在 G 中均有超可解 -s- 补.

证明 必要性. 取 $N=1$ 即可.

充分性. 假设命题不真,并设 G 为极小阶反例.

(1) $N\cap\Phi(G)=1$.

否则,存在素数 $p\in\pi(N\cap\Phi(G))$,取 $P\in Syl_p(N\cap\Phi(G))$,则 $P\ char\ N\cap\Phi(G)\trianglelefteq G$,所以 $P\trianglelefteq G$. 由同构定理及题设条件知,$(G/P)/(N/P)\in F$. 由引理 1.2 知,$F(N/P)=F(N)/P$. $F(N/P)$ 的任一极小子群具有形式 LP/P,其中 L 为 $F(N)$ 的极小子群. 由题设条件知,L 在 G 中有超可解 -s- 补. 再由引理 1.1(1) 知,LP/P 在 G/P 中有超可解 -s- 补. 故 $(G/P,N/P)$ 满足定理条件. 由 G 的极小性可得 $G/P\in F$. 再由 $P\leqslant\Phi(G)$ 知,$G/\Phi(G)\in F$,故 $G\in F$,矛盾.

(2) $F(N)=\langle x_1\rangle\times\langle x_2\rangle\times\cdots\times\langle x_s\rangle$,其中 $\langle x_i\rangle$ 是 G 的含于 N 的素数阶正规子群.

由(1)及引理 1.5 知,$F(N)=L_1\times L_2\times\cdots\times L_s$,其中 L_i 是 G 的包含在 N 中的极小正规子群. 对任意 $L_i\leqslant F(N)$,任取 L_i 的素数阶子群 $\langle x\rangle$,由题设条件

及定义 1.1 知，存在 $K \leqslant G$ 使得 $G = \langle x \rangle K$ 且 $K/(\langle x \rangle_G \cap K)$ 超可解. 若 $\langle x \rangle < L_i$，由 L_i 的极小正规性可知，$\langle x \rangle_G = 1$. 故 $K \cong K/(\langle x \rangle_G \cap K)$，从而 K 超可解. 由 $L_i \lhd G$，则 $L_i \cap K \trianglelefteq K$. 又由 N 可解知，L_i 交换，故 $L_i \cap K \trianglelefteq L_i$. 所以 $L_i \cap K \trianglelefteq G$. 再由 L_i 的极小正规性可知，$L_i \cap K = L_i$ 或 $L_i \cap K = 1$. 若 $L_i \cap K = L_i$，则 $G = \langle x \rangle K = K$，从而 G 超可解，于是 $G \in F$，矛盾. 若 $L_i \cap K = 1$，则 $L_i = L_i \cap \langle x \rangle K = \langle x \rangle (L_i \cap K) = \langle x \rangle$，矛盾.

(3) $G/F(N) \in F$.

由(2)及 N/C 定理知，$G/C_G(\langle x_i \rangle) \cong Aut(\langle x_i \rangle)$ 且 $G/C_G(\langle x_i \rangle)$ 循环，从而 $G/C_G(\langle x_i \rangle) \in U \subseteq F$. 又因为 F 为群系，所以 $G/\bigcap_{i=1}^{s} C_G(\langle x_i \rangle) \in F$. 下面证明 $C_G(F(N)) = \bigcap_{i=1}^{s} C_G(\langle x_i \rangle)$. 因为 $C_G(F(N)) \leqslant C_G(\langle x_i \rangle)$，所以 $C_G(F(N)) \leqslant \bigcap_{i=1}^{s} C_G(\langle x_i \rangle)$. 设任意 $t \in \bigcap_{i=1}^{s} C_G(\langle x_i \rangle)$，则 t 与任一 x_i 可交换，所以 t 也与 $F(N)$ 中的任一元可交换，因此 $t \in C_G(F(N))$. 从而 $C_G(F(N)) = \bigcap_{i=1}^{s} C_G(\langle x_i \rangle)$. 故 $G/C_G(F(N)) \in F$. 又因为 $G/N \in F$，所以 $G/N \cap C_G(F(N)) \in F$，即 $G/C_N(F(N)) \in F$. 由于 $F(N)$ 交换，所以 $F(N) \leqslant C_N(F(N))$. 又因为 N 可解，由引理 1.8 知，$C_N(F(N)) \leqslant F(N)$. 从而 $C_N(F(N)) = F(N)$. 因此 $G/F(N) \in F$.

(4) 反例不存在.

记 $T_i = \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_{i-1} \rangle \times \langle x_{i+1} \rangle \times \cdots \times \langle x_s \rangle$，则 $F(N)/T_i \cong \langle x_i \rangle$. 由同构定理及(3)知，$(G/T_i)/(F(N)/T_i) \in F$. 由引理 1.9 知 $G/T_i \in F$. 再由 F 为群系知，$G/\bigcap_1^s T_i \cong G \in F$，矛盾.

推论 2.1 设 G 是一有限群. 则 G 是超可解群的充分必要条件是存在 G 的可解正规子群 N 使得 G/N 超可解且 $F(N)$ 的任意素数阶子群在 G 中均有超可解 -*s*- 补.

命题 2.2 设 G 为一有限群，$F^*(G)$ 为 G 的广义 *Fitting* 子群. 如果 $F^*(G)$ 的所有素数阶子群在 G 中均有超可解 -*s*- 补，则 G 为超可解群.

证明 假设命题不真，并设 G 为极小阶反例.

(1) $F^*(G)$ 是 p- 幂零的，这里 p 是 $|F^*(G)|$ 的最小素因子.

否则，$F^*(G)$ 包含一个极小非 p- 幂零子群 N. 由引理 1.10 知，N 是极小非幂零群. 于是 $N = [N_p]N_q$ 是 N_p 与 N_q 的半直积，其中 $N_p \lhd N$，N_q 循环[16]. 任取 N_p 的极小子群 $\langle x \rangle$，由题设条件及引理 1.1 可知，存在 $K \leqslant N$ 使得 $N = \langle x \rangle K$ 且 $K/(\langle x \rangle_N \cap K)$ 超可解. 若 $N = K$，则 $K/(\langle x \rangle_N \cap K) = N/(\langle x \rangle_N \cap N) = N/\langle x \rangle_N$ 超可解，所以 N 超可解，故 N 有 *Sylow* 塔. 又由 p 是 $|F^*(G)|$ 的最小素因子知，N 是 p- 幂零的，矛盾. 若 $K < N$，因为 $K/(\langle x \rangle_N \cap K) \cong K$，则 K 超可解，所以 K 有 *Sylow* 塔. 因为 $|N:K| = |\langle x \rangle| = p$，由引理 1.6 知，$K \lhd N$. 由 p 是 $|F^*(G)|$ 的最小素因子知，N 有 *Sylow* 塔，从而为 p- 幂零的，矛盾.

(2) $F^*(G) = F(G) \neq 1$.

由(1)知 $F^*(G) = P[K]$，其中 K 为 $F^*(G)$ 的正规 p'-*Hall* 子群. 易验证 K 满足命题条件. 由归纳假设可得，K 可解. 由同构定理知，$F^*(G)/K \cong P$. 又由 P 可解知，$F^*(G)$ 可解. 进而由引理 1.7 知，$F^*(G) = F(G) \neq 1$.

(3) 最后的矛盾.

若 G 可解，由(2)及命题 2.1 知，G 超可解，矛盾. 若 G 不可解，则 $\Phi(G) = 1$. 否则，存在 X 是 $\Phi(G)$ 的极小子群. 由题设条件及定义 1.1 知，存在 $K \leqslant G$ 使得 $G = XK$ 且 $K/(X_G \cap K)$ 超可解. 易知 $K = G$，故 G/X_G 超可解，从而 G 超可解，矛盾. 由引理 1.3 知，$F(G) = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_s$，其中 R_i 是 G 的可解极小正规子群. 对任意 $R_i \leqslant F(G)$，任取 R_i 的极小子群 $\langle x \rangle$，由题设条件及定义 1.1 知，存在 $K \leqslant G$ 使得 $G = \langle x \rangle K$ 且 $K/(\langle x \rangle_G \cap K)$ 超可解. 假设 $\langle x \rangle < R_i$，则由 R_i 的极小正规性可知，$\langle x \rangle_G = 1$. 故 $K \cong K/(\langle x \rangle_G \cap K)$，从而 K 超可解. 由 $R_i \lhd G$，则 $R_i \cap K \trianglelefteq K$. 又由 R_i 可解知，R_i 交换，故 $R_i \cap K \trianglelefteq R_i$. 所以 $R_i \cap K \trianglelefteq G$. 再由 R_i 的极小正规性可得，$R_i \cap K = R_i$ 或 $R_i \cap K = 1$. 若 $R_i \cap K = R_i$，则 $G = \langle x \rangle K = K$，从而 G 超可解，矛盾. 若 $R_i \cap K = 1$，则 $R_i = R_i \cap \langle x \rangle K = \langle x \rangle (R_i \cap K) = \langle x \rangle$，矛盾. 于是 $K/(\langle x \rangle_G \cap K) = K/(\langle x \rangle \cap K)$ 超可解. 又因为 $G/\langle x \rangle \cong K/(\langle x \rangle \cap K)$，故 G 超可解，矛盾.

定理 2.2 设 F 是含 U 的饱和群系，G 是一有限群. 则 $G \in F$ 的充分必要条件是存在 G 的正规子群 N 使得 $G/N \in F$ 且 $F^*(N)$ 的所有素数阶子群在 G 中均有超可解 -*s*- 补.

证明 必要性. 取 $N = 1$ 即可.

充分性. 由引理 1.1(2) 知，$F^*(N)$ 的任一素数阶子群在 N 中有超可解 -*s*- 补，同命题 2.2 的证明可得 $F^*(N)$ 可解. 进而由引理 1.7 知，$F^*(N) = F(N) \neq 1$.

若 N 可解，由定理 2.1 可知，$G \in F$. 若 N 不可解，则 $\Phi(N) = 1$. 否则，存在 X 是 $\Phi(N)$ 的极小子群. 由题设条件及引理 1.1(2) 知，存在 $K \leqslant N$ 使得 $N = XK$ 且 $K/(X_N \cap K)$ 超可解. 易知 $K = N$，故 N/X_N 超可解，从而 N 超可解，矛盾. 由引理 1.3 知，$F(N)$

$= R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_s$,其中 R_i 是 N 的可解极小正规子群. 对任意 $R_i \leqslant F(N)$,任取 R_i 的极小子群 $\langle x \rangle$,由题设条件及引理 1.1(2) 知,存在 $K \leqslant N$ 使得 $N = \langle x \rangle K$ 且 $K/(\langle x \rangle_N \cap K)$ 超可解. 若 $\langle x \rangle < R_i$,则由 R_i 的极小正规性可知,$\langle x \rangle_N = 1$. 故 $K \cong K/(\langle x \rangle_N \cap K)$,从而 K 超可解. 由 $R_i \lhd N$,则 $R_i \cap K \unlhd K$. 又由 R_i 可解知,R_i 交换,故 $R_i \cap K \unlhd R_i$. 所以 $R_i \cap K \unlhd N$. 再由 R_i 的极小正规性可得,$R_i \cap K = R_i$ 或 $R_i \cap K = 1$. 若 $R_i \cap K = R_i$,则 $N = \langle x \rangle K = K$,从而 N 超可解,矛盾. 若 $R_i \cap K = 1$,则 $R_i = R_i \cap \langle x \rangle K = \langle x \rangle (R_i \cap K) = \langle x \rangle$,矛盾. 于是 $K/(\langle x \rangle_N \cap K) = K/(\langle x \rangle \cap K)$ 超可解. 又因为 $N/\langle x \rangle \cong K/(\langle x \rangle \cap K)$,故 N 超可解,矛盾.

推论 2.2 设 G 是一有限群,则 G 是超可解群的充分必要条件是存在 G 的正规子群 N 使得 G/N 超可解且 $F^*(N)$ 的所有素数阶子群在 G 中均有超可解 -s- 补.

附注

(1) 文中条件"超可解 -s- 补子群"不同于通常的"补子群".

例如:G 是阶为 p^n 的循环群,其中 $n > 1$,则 G 超可解. $F(G) = G$ 有唯一的极小子群 X 且 X 在 G 中有超可解 -s- 补,但 X 在 G 中不可补.

(2) 定理 2.1、2.2 及推论 2.1、2.2 中的条件"超可解 -s- 补"不可换成"p- 幂零 -s- 补".

例如:$G = [H]Z_2$ 是 H 与 Z_2 的半直积,其中 $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ 是 G 的 3^2 阶初等交换正规子群,$Z_2 = \langle u \rangle$ 是 H 的 2 阶自同构,定义为 $a^u = a^{-1}, b^u = b^{-1}$. 则 $\langle a \rangle$,$\langle b \rangle$ 是 G 的极小正规子群,G 超可解且 G/H 超可解. 取 $\langle a \rangle \leqslant H$,则 $\langle a \rangle$ 在 G 中不是 3- 幂零 -s- 补的. 事实上,$G = \langle b \rangle Z_2 \langle a \rangle$,而 $\langle b \rangle Z_2/(\langle a \rangle_G \cap \langle b \rangle Z_2) \cong \langle b \rangle Z_2$ 非 3- 幂零;$G = \langle a \rangle G$,而 $G/(\langle a \rangle_G \cap G) \cong G/\langle a \rangle \cong \langle b \rangle Z_2$ 非 3- 幂零,所以 $\langle a \rangle$ 在 G 中无 3- 幂零 -s- 补子群.

(3) 定理 2.1、2.2 对非饱和的群系 F 不真.

例如:$F = \{G | G^U$ 初等交换$\}$. 很明显,F 是一群系且 $U \subseteq F$,但 F 不饱和.

例子:$G = H \times K$,其中 $H = A_5, K \in F$. 则 $G/H \cong K \in F$ 且 $F(H)$ 的素数阶子群在 G 均有超可解 -s- 补,但 $G \notin F$.

(4) 定理 2.1、2.2 中的 F 必含 U.

例如:F 仅含 N,取 $F = N$.

例子:$G = S_3, H = A_3$,有 $|G/H| = 2$,H 在 G 有超可解 -s- 补,但 S_3 非幂零.

参考文献:

[1] HUPPERT B. Endliche Gruppen Ⅰ[M]. Berlin:Springer Verlag,1968.

[2] BUCKLEY J. Finite groups whose minimal subgroups are normal[J]. Math Z,1970,116:15-17.

[3] SASTRY N. On minimal non-PN-groups[J]. J Algebra,1980,65:104-109.

[4] SHAALAN A. The influence on π-Quasinormaliy of some subgroups[J]. Acta Math Hungary,1990(3～4):287-293.

[5] LI SHIRONG. On minimal non-PE-groups[J]. J Pure Appl Algebra,1998,132(2):149-158.

[6] LI SHIRONG. On minimal subgroups of finite groups I [J]. Comm Algebra,1994,22(6):1913-1918.

[7] LI SHIRONG. On minimal subgroups of finite groups Ⅲ [J]. Comm Algebra,1998,26(8):2453-2461.

[8] WANG Y. C-normality of groups and its properties[J]. J Algebra,1996,180(3):954-965.

[9] BALLESTER-BOLINCHES A,GUO X Y. On complemented subgroups of finite groups [J]. Arch Math,1999,72(3):161-166.

[10] MIAO L,GUO W. Finite groups with some primary subgroups F-s-supplemented[J]. Comm Algebra,2005,33(8):2789-2800.

[11] SHEMETKOR L A. Formations of finite groups[M]. Moscow:Nauka,1978.

[12] 徐明耀. 有限群导引[M]. 北京:科学出版社,2001.

[13] HUPPERT B. Endliche gruppen Ⅰ[M]. New York:[s. n.],1967:720.

[14] LI DEYU,GUO XIUYUN. The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups Ⅱ[J]. Comm Algebra,1998,26(6):1913-1922.

[15] HUPPERT B,BLACKBURN N. Finite Groups Ⅲ [M]. Berlin:Springer-Verlag,1982.

[16] 陈重穆. 内,外-$\sum$群与极小非$\sum$-群[M]. 重庆:西南师范大学出版社,1988.

(责任编辑:邓大玉)