不同分布 $\tilde{\rho}$ 混合序列部分和的强收敛性*

Strong Convergence Properties of the Sums for $\tilde{\rho}$-Mixing Random Sequences with Different Distributions

伍艳春,刘筱萍

WU Yan-chun, LIU Xiao-ping

(桂林工学院数理系,广西桂林　541004)

(Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:讨论不同分布 $\tilde{\rho}$ 混合序列部分和的强收敛性,所得结果推广和改进了文献[2]的结论,将同分布推广到不同分布。

关键词:$\tilde{\rho}$ 混合序列　强收敛　混合速度

中图法分类号:O211.4　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2006)01-0017-02

Abstract: In this paper, we discuss strong convergence properties of the sums of $\tilde{\rho}$-Mixing Random sequences with different distributions. We got the results which improved and extended results in references[2]. We improved and extended the same distributions to different distributions.

Key words: $\tilde{\rho}$-mixing random sequences, strong convergence, mixing ratres

1　定义和引理

设$\{X_i:i\in N\}$是概率空间$(\Omega,\mathrm{B},\mathrm{P})$中的随机变量序列,$F_S=\sigma(X_i:i\in S\subset N)$为$\sigma$-域,在B中给定$\sigma$-域$F,R$,令$\rho(F,R)=\sup\{\mathrm{corr}(X,Y):X\in L_2(F),Y\in L_2(R)\}$,其中$\mathrm{corr}(X,Y)=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y}}$为相关系数,Bradley[1]引入如下相依系数:对$k\geqslant 0$,令

$$\tilde{\rho}(k)=\sup\{\rho(F_S,F_T):\text{有限子集 }S,T\subset N\text{ 且 }dist(S,T)\geqslant k\},\tag{1}$$

显然,$0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$且$\tilde{\rho}(0)=1$.

定义 1[2]　对随机序列$\{X_i:i\in N\}$,如果存在$k\in N$,使$\tilde{\rho}(k)<1$,则称$\{X_i:i\in N\}$是$\tilde{\rho}$混合序列.

注　在极限性质的讨论中,对$\tilde{\rho}$混合序列$\{X_i:i\in N\}$,即存在$k_0\in N$,使$\tilde{\rho}(k_0)<1$,如$k_0>1$,可考虑$\{X_i\}$的k_0个子列$\{X_{k_0 i+j};i\in N\}$,$j=0,1,2,\cdots,k_0-1$,而每一个子列的$\tilde{\rho}(1)$即为原序列的$\tilde{\rho}(k_0)$,因此,对$\tilde{\rho}$混合序列,可不失一般性假设$\tilde{\rho}(1)<1$.

$\tilde{\rho}$混合与通常的ρ混合有一定的类似,但并不相同,它们互不包含,事实上,在通常的ρ混合系数$\rho(k)$中,(1)式中的S,T分别是$[1,n]$和$[n+k,\infty]$中的子集;另外,$\tilde{\rho}$混合只要求存在某$k_0\in N$,使$\tilde{\rho}(k_0)<1$,在这一点上要比ρ混合的要求$\rho(k)\to 0,k\to\infty$弱得多.本文讨论了不同分布$\tilde{\rho}$混合序列部分和的强收敛性,所得结果推广和改进了文献[2]的结论.

文献[3]在$\tilde{\rho}$相依序列中得到了与独立情形一致的矩不等式.

引理 1[3]　设$\tilde{\rho}:=\tilde{\rho}(1)<1,q>1,X_i$为$\sigma(\xi_i)$可测且$EX_i=0,E|X_i|^q<\infty,i=1,2,3,\cdots$,则存在仅依赖于$\tilde{\rho},q$的正常数$C$,使$1<q\leqslant 2$时,有

$$E|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i|^q\leqslant C\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^q,\forall\, n\geqslant 1,a\geqslant 0,$$

$q>2$时,有:

$$E|\sum_{i=a+1}^{a+n}X_i|^q\leqslant C\{\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^q+(\sum_{i=a+1}^{a+n}EX_i^2)^{q/2}\},$$

$\forall\, n\geqslant 1,a\geqslant 0$.

本文以C记与n无关的正常数,可取不同的值;以"$\ll$"表示通常的大"O";I_A表示集合A上的示性函数.

2　定理及其证明

定理 1　设$\{X_i:i\in N\}$是$\tilde{\rho}$混合序列,满足

收稿日期:2005-04-21

作者简介:伍艳春(1964-),女,广西桂林人,副教授,主要从事数理统计研究。

*广西教育厅面上科研项目基金资助项目([2004]20)资助。

$$EX_i = 0, \tag{2}$$

$$\sup_i E|X_i|^p < \infty, \tag{3}$$

则对 $1 \leqslant r < 2, r < p$,有:$n^{-\frac{1}{r}} S_n \to 0$, a.s. $n \to \infty$.

其中 $S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$.

证明 由 Jensen 不等式[4],对 $\forall\ \alpha \leqslant \beta$,有

$$(E|X|^\alpha)^{1/\alpha} \leqslant (E|X|^\beta)^{1/\beta}.$$

不失一般性,可设 $p < 2$.

取 $0 < \delta < \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$,对 X_i 截尾,记 $Y_i \triangleq X_i I(|X_i| < i^{\frac{1}{r}-\delta})$,有

$$n^{-\frac{1}{r}} S_n = n^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i) + n^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=1}^{n} EY_i + n^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - EY_i) = I_1 + I_2 + I_3.$$

故要证明定理1,只需证明 $I_i \to 0$, a.s. $n \to \infty, i = 1, 2, 3$.

由 Markov 不等式[4] 及定理1的条件(3)式,有

$$P(X_i \neq Y_i) = p(|X_i| \geqslant i^{\frac{1}{r}-\delta}) \leqslant \frac{1}{i^{(\frac{1}{r}-\delta)p}} E|X_i|^p \leqslant \frac{1}{i^{(\frac{1}{r}-\delta)p}} \sup_i E|X_i|^p \ll \frac{1}{i^{(\frac{1}{r}-\delta)p}}.$$

由 δ 的取法有

$$(\frac{1}{r} - \delta)p > 1.$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i \neq Y_i) \ll \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{(\frac{1}{r}-\delta)p}} < \infty.$

由 Borel-Cantelli 引理[4] 有

$$I_1 = n^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i) \to 0, \text{a.s.} \tag{4}$$

由定理1的条件(2)、(3)式及 Hölder 不等式[4]

$$n^{-\frac{1}{r}} |\sum_{i=1}^{n} EY_i| = n^{-\frac{1}{r}} |\sum_{i=1}^{n} E(X_i - Y_i)| = n^{-\frac{1}{r}} |\sum_{i=1}^{n} EX_i I(|X_i| > i^{\frac{1}{r}-\delta})| \leqslant n^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=1}^{n} E|X_i| I(|X_i| > i^{\frac{1}{r}-\delta}) \leqslant n^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=1}^{n} E|X_i| \cdot \frac{|X_i|^{p-1}}{i^{(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)}} \leqslant$$

$$n^{-\frac{1}{r}} \sup_i E|X_i|^p \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i})^{(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)} \leqslant n^{-\frac{1}{r}} (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})^{(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)} (\sum_{i=1}^{n} 1)^{1-(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)} \leqslant$$

$$n^{-\frac{1}{r}} (\ln n)^{(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)} n^{1-(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)} = \frac{(\ln n)^{(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)}}{n^{\frac{p}{r}-1-\delta(p-1)}},$$

因为

$$\theta = \frac{p}{r} - 1 - \delta(p-1) > 0,$$

所以

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\ln n)^{(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)}}{n^{\frac{\theta}{2}}} = 0,$$

所以当 n 充分大时,有

$$(\ln n)^{(\frac{1}{r}-\delta)(p-1)} \leqslant n^{\frac{\theta}{2}}.$$

故

$$I_2 = n^{-\frac{1}{r}} |\sum_{i=1}^{n} EY_i| \ll \frac{1}{n^{\frac{\theta}{2}}} \to 0, \tag{5}$$

记 $\widetilde{S}_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} (Y_i - EY_i)$,取

$$q > \max\{\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{p}{r} - 1) + \delta(1 - \frac{p}{2})}, \frac{2}{\delta}, 2\},$$

有

$$P(\frac{|\widetilde{S}_n|}{n^{\frac{1}{r}}} \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^q n^{q/r}} E(\widetilde{S}_n)^q. \tag{6}$$

由引理1及 Cr 不等式[4],有

$$E|\widetilde{S}_n|^q \ll (\sum_{i=1}^{n} E(Y_i - EY_i)^2)^{\frac{q}{2}} + \sum_{i=1}^{n} E|Y_i - EY_i|^q, \tag{7}$$

$$E(Y_i - EY_i)^q \leqslant 2^{q-1}(E|Y_i|^q + E|Y_i|^q) \ll n^{(\frac{1}{r}-\delta)q},$$

$$\sum_{i=1}^{n} E(Y_i - EY_i)^q \ll \sum_{i=1}^{n} n^{(\frac{1}{r}-\delta)q} = n^{1+(\frac{1}{r}-\delta)q}, \tag{8}$$

$$E(Y_i - EY_i)^2 \ll E|Y_i|^2 = E|Y_i|^p \cdot |Y_i|^{2-p} \leqslant \sup_i E|X_i|^p \cdot i^{(\frac{1}{r}-\delta)(2-p)} \ll n^{(\frac{1}{r}-\delta)(2-p)},$$

$$(\sum_{i=1}^{n} E(Y_i - EY_i)^2)^{\frac{q}{2}} = n^{[1+(\frac{1}{r}-\delta)(2-p)]q/2}, \tag{9}$$

由(4)~(9)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\frac{|\widetilde{S}_n|}{n^{\frac{1}{r}}} \geqslant \varepsilon) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{q}{r}}} [n^{[1+(\frac{1}{r}-\delta)(2-p)]q/2} + n^{1+(\frac{1}{r}-\delta)q}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}(\frac{p}{r}-1)+\delta(1-\frac{p}{2})q}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta q - 1}}.$$

由 q 的取法,上两级数都收敛,故

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n^{-\frac{1}{r}} |\widetilde{S}_n| \geqslant \varepsilon) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$I_3 = n^{-\frac{1}{r}} \widetilde{S}_n \to 0, \text{a.s. } n \to \infty. \tag{10}$$

结合(4)、(5)、(10)式,定理1得证.

参考文献:

[1] BREADLEY R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields[J]. Journal of Theoret Probab, 1992, 5(3): 355-374.

[2] 吴群英. $\widetilde{\rho}$ 混合序列的若干收敛性质[J]. 工程数学学报, 2001, 18(3): 58-64.

[3] 杨善朝. 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用[J]. 科学通报, 1998, 43(13): 1823-1827.

[4] 林正炎, 陆传荣, 苏申根. 概率极限理论基础[M]. 北京: 高等教出版社, 1999.

(责任编辑:韦廷宗 邓大玉)