DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.014
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 288~ 291

共存性商品市场扩散的数学模型及扩散机理*

Mathematical Models and Diffusion Principle of Marketing Diffusion of Co-existing Production

凌征球
Ling Zhengqiu

(玉林师范学院数学与计算机科学系,广西玉林 537000)
(Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Teachers' College, Yulin, Guangxi, 537000, China)

摘要:为研究共存性商品的市场扩散规律,分析共存性商品的扩散规律和扩散机理,根据共存性商品之间存在的关系,运用微分方程的理论和方法,建立共存性商品的市场扩散的数学模型

$\dot{x}_1(t) = (K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1x_1(t))$ 和 $\dot{x}_2(t) = (K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2x_2(t))$.

实证分析表明,建立的市场扩散数学模型可用来预测共存性商品的市场扩散趋势.

关键词:商品市场 扩散 数学模型 共存性 平衡点
中图法分类号:O211.6; F723 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2005)04-0288-04

Abstract The mathematical model for marketing diffusion of co-existing production was introduced by using the theory and methods of differential equation

$\dot{x}_1(t) = (K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1x_1(t))$ and $\dot{x}_2(t) = (K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2x_2(t))$.

Their diffusion regularity and principle were further studied.

Key words marketing, diffusion, mathematical model, co-existing, equilibrium point

市场更新、扩散过程对于市场预测以及企业制定价格、广告等方面的合理策略具有重要作用.产品扩散被定义为以一定的方式随时间在社会系统中的各个成员间的传播过程.目前,研究的焦点集中在大众传播媒体和人际渠道偏好方面,人际传播对社会系统中扩散的速度和形态具有重要影响.由于不同类型的商品之间存在着微妙的关系,自20世纪60年代,国际上涌现了大量分析扩散过程[1,2],其中 Logistic等模型在一定程度上与单个体的实际扩散过程有较好的吻合.随着社会的发展,市场上出现的商品种类及数量越来越丰富,使得人们对商品的分类越分越细.

本文主要研究一种特殊的商品——“共存性”商品,建立其市场扩散的数学模型,并对其扩散机理作进一步的研究分析.为简明起见,本文讨论的只是耐用消费品的市场扩散规律.

收稿日期:2005-04-18
作者简介:凌征球(1963-),男,广西桂平人,讲师,主要从事非线性扩散方程研究及应用。
* 玉林师范学院科研项目(05YBSJ55)资助。

1 共存性商品市场扩散的数学模型

用 A_1, A_2 分别表示 2种共存性商品[3],$x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别表示 2种商品在时刻 t 的市场占有量,K_1, K_2 表示 2种商品的最大市场容纳量.

假设 1 商品信息的扩散分为两类,一类来自消费者内部(口传信息);另一类来自消费者外部(广告、宣传等).消费者也分两类,一类是接收了外部信息就可能去购买,称为“更新者”;另一类必须接收到内部信息才可能去购买,称为“模仿者”.

因此,对于这两种商品,可分别建立下列独自的模型[1]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = (K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2x_2(t)), \end{cases}$$

其中,$\dot{x}_1(t) = \mathrm{d}x_1(t)/\mathrm{d}t$; $\dot{x}_2(t) = \mathrm{d}x_2(t)/\mathrm{d}t$; $a_1 > 0, a_2 > 0$称为“更新者”的扩散强度系数; $b_1 > 0, b_2 > 0$称为“模仿者”的扩散强度系数,它们都可以使用最小二乘法进行估计. $a_1(K_1 - x_1(t))$, $a_2(K_2 - x_2(t))$表示由于接受了外部信息就去购买商品的消费者, $b_1x_1(t)(K_1 - x_1(t))$, $b_2x_2(t)(K_2 - x_2(t))$表示由于

接受了内部信息就去购买商品的消费者.

由于 2种商品不能单独在市场中扩散,必须依赖对方的存在.显然,商品 A_1的扩散速度与另一商品 A_2的市场占有量有关,且 A_2的市场占有量的提高有利于商品 A_1的扩散,同样的分析对商品 A_2也是适用的,并假设 2种商品的市场容纳量均为常数.基于上面的分析,可以建立如下的数学模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_2(K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1 x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_1(K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2 x_2(t)), \end{cases} \quad (0)$$

其中,r_1,r_2分别表示产品 A_1,A_2固有的依赖于对方的扩散系数;$\dot{x}_1$,$\dot{x}_2$分别是 A_1,A_2的扩散速度.为了讨论方便,仍用 a_1表示 r_1a_1,b_1表示 r_1b_1,a_2表示 r_2a_2,b_2表示 r_2b_2,这时系统(0)变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1 x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2 x_2(t)). \end{cases} \quad (1)$$

2 模型稳定性分析

引理 1 设二维非线性系统[4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases} \quad (2)$$

而 $P_0 = (x_0, y_0)$是系统(2)的平衡点.记:

$$p = -\left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} + \frac{\partial g(P_0)}{\partial y}\right),$$

$$q = \begin{vmatrix} f_x(P_0) & f_y(P_0) \\ g_x(P_0) & g_y(P_0) \end{vmatrix},$$

且满足 $p^2 - 4q \geqslant 0$时,如果:

(Ⅰ)当 $p > 0, q > 0$时,$P_0 = (x_0, y_0)$是系统(2)的稳定结点;

(Ⅱ)当 $p < 0, q > 0$时,$P_0 = (x_0, y_0)$是系统(2)的不稳定结点;

(Ⅲ)当 $q < 0$时,$P_0 = (x_0, y_0)$是系统(2)的鞍点.

定理 1 (a)对于非线性系统(1)的 2个非负的平衡点 $P_1(0,0)$,$P_2(K_1,K_2)$,分别是鞍点和稳定的结点.

(b)对于任意的初始点 $P_0(x_1(t_0), x_2(t_0))$,其中 $x_1(t_0) > 0, x_2(t_0) > 0$,在 $t \to \infty$时,都有 $P(x_1(t), x_2(t)) \to P_2(K_1, K_2)$.

证明 (a)设 $f(x_1,x_2) = x_2(K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1x_1(t))$,$g(x_1,x_2) = x_1(K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2x_2(t))$,并解如下的代数方程:

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) = 0, \\ g(x_1,x_2) = 0, \end{cases}$$

可得系统(1)的 2个非负的平衡点 $P_1(0,0)$,$P_2(K_1,K_2)$.

对于平衡点 $P_1(0,0)$,

$$p = -\left(\frac{\partial f(P_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial g(P_1)}{\partial x_2}\right) = 0,$$

$$q = \begin{vmatrix} f_{x_1}(P_1) & f_{x_2}(P_1) \\ g_{x_1}(P_1) & g_{x_2}(P_1) \end{vmatrix} = -a_1a_2K_1K_2 < 0,且$$

$p^2 - 4q \geqslant 0$,因此,从引理知,$P_1(0,0)$是非线性系统(1)的鞍点.而对于 $P_2(K_1,K_2)$,

$$p = K_2(a_1 + b_1K_1) + K_1(a_2 + b_2K_2) > 0,$$

$$q = K_1K_2(a_1 + b_1K_1)(a_2 + b_2K_2) > 0,$$

而且 $p^2 - 4q = (a_1K_2 + K_1(b_1K_2 - (a_2 + b_2K_2)))^2 \geqslant 0$,由引理知,$P_2(K_1,K_2)$是稳定的结点.

(b)用 2条直线 $x_1 = K_1$,$x_2 = K_2$(临界线)把第一象限划分为 4个区域(图 1).

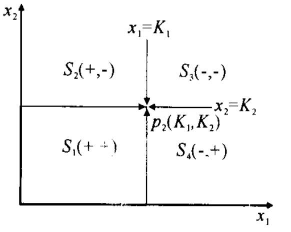

图 1 第一象限的划分

Fig. 1 Division of the first sector

图 1中,S_1: $\dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$; S_2: $\dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0$; S_3: $\dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 < 0$; S_4: $\dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 > 0$.

对于任意的初始点 $P_0(x_1(t_0), x_2(t_0))$,$x_1(t_0) > 0$,$x_2(t_0) > 0$,系统(1)的解 $P = (x_1(t), x_2(t))$如果落在区域 S_1,由于 $\dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$,即 $x_1(t)$,$x_2(t)$是逐渐递增的,也就是 $x_1(t)$,$x_2(t)$随时间的推移而趋向于临界直线 $x_1 = K_1$或 $x_2 = K_2$,最终趋向于平衡点 $P_2(K_1,K_2)$;当系统(1)的解 $P = (x_1(t), x_2(t))$落在区域 S_2或 S_3或 S_4时,可以进行同样的分析.因此在 $t \to \infty$时,$P = (x_1(t), x_2(t)) \to$ 多 $P_2(K_1,K_2)$.

如果把系统(1)变为如下的形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}_1}{x_2} = (K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1x_1(t)), \\ \dfrac{\dot{x}_2}{x_1} = (K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2x_2(t)), \end{cases} \quad (3)$$

并把 $\frac{\dot{x}_1}{x_2}$,$\frac{\dot{x}_2}{x_1}$分别称为 A_1产品依赖于 A_2产品的扩散率和 A_2产品依赖于 A_1产品的扩散率.那么有如下的结论:

定理 2 在 $K_1 > \frac{a_1}{b_1}$,$K_2 > \frac{a_2}{b_2}$的条件下,在区域 S_1内,如果

$$\begin{cases} 0 < x_1 < \dfrac{b_1K_1 - a_1}{2b_1}, \\ 0 < x_2 < \dfrac{b_2K_2 - a_2}{2b_2}, \end{cases} \quad (4)$$

则 2种产品的扩散率呈递增趋势;如果

$$\begin{cases} \dfrac{b_1K_1 - a_1}{2b_1} < x_1 < K_1, \\ \dfrac{b_2K_2 - a_2}{2b_2} < x_2 < K_2, \end{cases} \tag{5}$$

则 2种产品的扩散率呈递减趋势.

证明　对系统(3)的每一个方程的两边同时对 t 求导得,

$$\begin{cases} \mathrm{d}(\dfrac{\dot{x}_1}{x_2})/\mathrm{d}t = -\dot{x}_1(a_1 - b_1K_1 + 2b_1x_1), \\ \mathrm{d}(\dfrac{\dot{x}_2}{x_1})/\mathrm{d}t = -\dot{x}_2(a_2 - b_2K_2 + 2b_2x_2), \end{cases}$$

由于在区域 S_1 内,有 $\dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$,因此,如果条件(4)成立,则 $\mathrm{d}\left(\dfrac{\dot{x}_1}{x_2}\right)/\mathrm{d}t > 0, \mathrm{d}\left(\dfrac{\dot{x}_2}{x_1}\right)/\mathrm{d}t > 0$,因此扩散率 $\dfrac{\dot{x}_1}{x_2}, \dfrac{\dot{x}_2}{x_1}$ 均呈递增趋势. 如果条件(5)成立,则 $\mathrm{d}\left(\dfrac{\dot{x}_1}{x_2}\right)/\mathrm{d}t < 0, \mathrm{d}\left(\dfrac{\dot{x}_2}{x_1}\right)/\mathrm{d}t < 0$,即是扩散率呈递减趋势.

定理 2说明了这样一个过程: 2种产品自进入市场起,由于市场占有量较少($x_1 < K_{10}, x_2 < K_{20}$,见图 2, 其中 $P_3 = \left(\dfrac{b_1K_1 - a_1}{2b_1}, \dfrac{b_2K_2 - a_2}{2b_2}\right)$, $K_{10} = \dfrac{b_1K_1 - a_1}{2b_1}$, $K_{20} = \dfrac{b_2K_2 - a_2}{2b_2}$),2种产品的扩散率逐渐递增,但是,由于其自身扩散所表现出来的扩散阻滞作用始终存在,致使在产品的市场占有量达到一定的程度($x_1 > K_{10}, x_2 > K_{20}$)之后,扩散率又呈递减趋势,这种扩散的情况与实际情况是相符的.这也是说,沿着任意初始点 $P_0(x_1(t_0), x_2(t_0))$ 出发的轨线,2种产品均先以扩散率递增,然后递减的方式趋向于平衡点 $P_2(K_1, K_2)$.

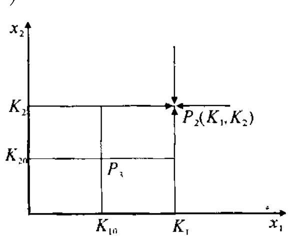

图 2　产品进入市场的扩散过程

Fig. 2　The diffusion process of product entry marketing

3　曲线 $x_1(t), x_2(t)$ 的扩散分析

对于如下的常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2x_2(t)), \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

把系统(6)的前两个方程变成如下形式:

$$\begin{cases} x_1\dot{x}_1 = x_1x_2(K_1 - x_1(t))(a_1 + b_1x_1(t)), \\ x_2\dot{x}_2 = x_1x_2(K_2 - x_2(t))(a_2 + b_2x_2(t)), \end{cases}$$

再把上两式相除,可得到

$$\frac{x_1 dx_1}{x_2 dx_2} = \frac{(K_1 - x_1)(a_1 + b_1x_1)}{(K_2 - x_2)(a_2 + b_2x_2)},$$

分离变量,可得如下形式:

$$\int_{x_1(0)}^{x_1(t)} \frac{x_1}{(K_1 - x_1)(a_1 + b_1x_1)} \mathrm{d}x_1 = \int_{x_2(0)}^{x_2(t)} \frac{x_2}{(K_2 - x_2)(a_2 + b_2x_2)} \mathrm{d}x_2,$$

积分后,得到如下通解:

$$\frac{1}{(a_1 + b_1K_1)} \ln[(K_1 - x_1)^{K_1}(a_1 + b_1x_1)^{\frac{a_1}{b_1}}] - \frac{1}{(a_2 + b_2K_2)} \ln[(K_2 - x_2)^{K_2}(a_2 + b_2x_2)^{\frac{a_2}{b_2}}] = s, \tag{7}$$

其中,$s = \dfrac{1}{(a_1 + b_1K_1)} \ln(K_1^{K_1} a_1^{\frac{a_1}{b_1}}) - \dfrac{1}{(a_2 + b_2K_2)} \ln(K_2^{K_2} a_2^{\frac{a_2}{b_2}})$.

因此,对于扩散曲线 $x_1(t), x_2(t)$ 有如下结论:

定理 3　对于满足初值条件 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$ 的非线性系统(1),其轨线方程具有形式(7)的通解.

从定理 3可知,对于给定的参数 $K_i, a_i, b_i (i = 1, 2)$,就可以利用数学软件画出曲线(7)的图形,即可看出各种轨线在整个区域 S_1 的扩散过程.

4　模型参数估计

把时间区间 $[0, t]$ 进行 M 等分(M 是正整数),再把系统(1)改为差分方程的格式:

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = x_1^{(m)} + x_2^{(m)}(K_1 - x_1^{(m)})(a_1 + b_1x_1^{(m)})h, \\ x_2^{(m+1)} = x_2^{(m)} + x_1^{(m)}(K_2 - x_2^{(m)})(a_2 + b_2x_2^{(m)})h, \\ x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, \\ m = 0, 1, 2, \cdots, M - 1, \text{其中 } h = t/M. \end{cases} \tag{8}$$

先看参数 K_1, a_1, b_1 的估计.

由于 $\dfrac{x_1^{(m+1)} - x_1^{(m)}}{x_2^{(m)}} = (K_1 - x_1^{(m)})(a_1 + b_1x_1^{(m)})h = K_1a_1h + (K_1b_1 - a_1)hx_1^{(m)} - b_1h(x_1^{(m)})^2$,

令 $y^{(m)} = \dfrac{x_1^{(m+1)} - x_1^{(m)}}{x_2^{(m)}}, x^{(m)} = x_1^{(m)}, C = K_1a_1h, B = (K_1b_1 - a_1)h, A = -b_1h$,则

$$y^{(m)} = C + Bx^{(m)} + A(x^{(m)})^2,$$

再运用线性回归和最小二乘法,先估计参数 A、B、C,再估计参数 K_1, a_1, b_1 的值,K_2, a_2, b_2 也可同样处理. 如果把求出的各参数 $K_i, a_i, b_i (i = 1, 2)$ 的值代入模

型(1),即可以预测某对共存性商品市场扩散的动态过程及动态规律.

上面讨论只针对2种产品的情况,对于一般的情况,可以建立如下模型:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2x_3\cdots x_n(K_1-x_1(t))(a_1+b_1x_1(t)),\\ \dot{x}_n(t)=x_1x_2\cdots x_{n-1}(K_n-x_n(t))(a_n+\\ \qquad b_nx_n(t)),\end{cases} \tag{9}$$

其中,$x_1(t),\cdots,x_n(t)$分别表示共存性商品$A_1,\cdots,A_n$在时刻t时的市场占有量;参数$K_i,a_i,b_i(i=1,\cdots,n)$的含义如同前述.系统(9)也可进行同样的分析.

5 实证分析

因为传统的光学照相机与胶卷就是一对共存性的商品,根据广西统计年鉴各卷[5],得到的统计数据如表1所示.

表1 1991~2000年广西城镇居民传统光学相机拥有量及胶卷的销量

Table 1 The statistics of owning amount to traditional camera for Guangxi town inhabitants and the accumulation sales of film in 1991~2000

年份 Year	相机(万台) Camera (ten thousand)	胶卷(万卷) Film (ten thousand)	年份 Year	相机(万台) Camera (ten thousand)	胶卷(万卷) Film (ten thousand)
1991	21.76	27.42	1996	48.21	295.50
1992	29.09	66.97	1997	55.56	383.85
1993	31.69	111.03	1998	63.24	486.93
1994	34.96	162.42	1999	68.31	601.69
1995	38.38	220.77	2000	70.53	726.03

首先根据(8)式,先估计模型的各个参数$K_i,a_i,b_i(i=1,2)$: $K_1=141,a_1=0.0043,b_1=0.0002,K_2=1932,a_2=0.00083,b_2=10^{-6}$,因此系统(1)变成:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(141-x_1(t))(0.0043+0.0002x_1(t)),\\ \dot{x}_2(t)=x_1(1932-x_2(t))(0.00083+10^{-6}x_2(t)),\end{cases}$$

从上式可以知,传统相机与胶卷的市场最大容纳量分别是141(万台)和1932(万卷);同时,$K_1>\dfrac{a_1}{b_1}=21.5,K_2>\dfrac{a_2}{b_2}=830,\dfrac{b_1K_1-a_1}{2b_1}=59.75,\dfrac{b_2K_2-a_2}{2b_2}=551.$

另外,从(7)式也可以得到扩散曲线方程:

$$\frac{1}{31}\ln[(141-x_1)^{141}(0.0043+0.0002x_1)^{21.5}]-\frac{1}{362}\ln[(1932-x_2)^{1932}(0.00083+10^{-6}x_2)^{830}]=-3.1946\times10^{6}.$$

由此可以使用计算机及数学软件画出扩散曲线的图形,对产品的扩散作进一步的分析.从实证中得出的参数估计结果来看,传统的光学照相机与胶卷这一对共存性商品存在如下市场扩散现象:1991年~1998年,广西城镇居民中拥有的传统相机,以及每年销售的胶卷都处在一个快速发展的阶段,1999年后,虽然相机拥有量和胶卷销售量的绝对数字比上一年有所增加,但增加的速度呈递减趋势,这可能是由于自1999年后,普及型的数码相机开始进入家庭,使得传统的光学相机受到冲击而造成销量下降的缘故.这与广西当时的情况基本相符.从总体上看,光学相机拥有量的增加带动了胶卷的销售量的提升;同样胶卷销售量的快速提升也说明了光学相机拥有量的提高.这一点说明了光学相机与胶卷这对共存性商品的特点.

由于表1中的光学相机数据是从广西统计年鉴中按城镇居民每百户拥有的光学相机数再经过转换计算得到,胶卷数据是根据每台相机每年销耗的胶卷数计算得到,这些数据都属于抽样数据,因此实证分析中的计算结果仅作参考.

参考文献:

[1] Bass F M. A new product growth model for consumer durables[J]. Management Sci, 1969, 15(1): 215-227.

[2] 潘 涛.市场扩散的数学模型及其机理分析[J].广西科学,1996,3(3): 12-15.

[3] 陈晓红,等."共生性"商品市场扩散机制研究[J].中国软科学,2003,(6): 143-146.

[4] 黄明瑞.非线性控制系统[M].西安:西安电子科技大学出版社,1996. 25-32.

[5] 广西统计局.广西统计年鉴(1991-2000)[M].北京:中国统计出版社,1991-2001.

(责任编辑:黎贞崇)