DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.010
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 273~ 275

1-序列商映射和 2-序列商映射相关性质*

The Corresponging Properties of 1-Sequence-Quotient Mapping and 2-Sequence-Quotient Mapping

孔庆钊,陈海燕,张夏苇,郑顶伟
Kong Qingzhao, Chen Haiyan, Zhang Xiawei, Zheng Dingwei

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:通过引入 2-序列商映射的定义,讨论 1-序列商映射和 2-序列商映射的相关性质.给出: 2-序列商映射保持 sof 可数空间;映射 $f: X\to Y$,如果 X 为 snf 可数(sof 可数)空间,f 为 1-序列商映射(2-序列商映射),则 f 为 1-序列覆盖映射(2-序列覆盖映射)等结果.这些结果改进并推广广义度量空间映射象的有关理论.

关键词:映射 序列商映射 序列覆盖映射 序列邻域 序列开集
中图法分类号: O189.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0273-03

Abstract In this paper, 2-sequence-quotient mapping is introduced, and the corresponging properties of 1-sequence-quotient mapping and 2-sequence-quotient mapping is discussed. It is shown that sof countbale spaces are preserved under 2-sequence-quotient mapping. Let $f: X\to Y$, if X is snf countbale (sof countbale) space, f is 1-sequence-quotient mapping (2-sequence-quotient mapping), then f is 1-sequence-covering mapping (2-sequence-covering mapping). These results improve the corresponging theories of the mapping on generalized metric spaces.

Key words mapping, sequence-quotient mapping, sequence-covering mapping, sequential neighborhood, sequence-open set

随着一般拓扑学的发展,产生了各种各样的拓扑空间类,各种映射则是揭示相应拓扑空间类的有利工具.林寿[1]引入 1-序列覆盖映射和 2-序列覆盖映射,但是它们都要求满足序列覆盖映射的条件:保持收敛序列.然而在研究广义度量空间的映射时,所涉及的映射相当一部分仅保持收敛子序列.因此谷建胜[2]引入了 1-序列商映射这一概念,并且得出了一系列的结果.本文在此基础上,进一步研究 1-序列商映射的有关性质,并通过引入 2-序列商映射的定义,探讨 2-序列商映射的有关性质.给出: 2-序列商映射保持 sof 可数空间;映射 $f: X\to Y$,如果 X 为 snf 可数(sof 可数)空间,f 为 1-序列商映射(2-序列商映射),则 f 为 1-序列覆盖映射(2-序列覆盖映射)等结果.这些结果改进并推广广义度量空间映射象的有关理论.

本文约定,所有的空间均满足 T_2 分离公理,所有的映射均假设为连续满映射.

收稿日期: 2005-03-24
修回日期: 2005-05-23
作者简介:孔庆钊(1978-),男,山东烟台人,硕士研究生,主要从事一般拓扑学研究
* 广西大学科研基金(199802)资助项目。

1 相关定义

定义 1 设 $f: X\to Y$ 为映射,则

(1) f 称为 2-序列覆盖映射[1](1-序列覆盖映射[1]),如果对于 $y\in Y$,任意的 $x\in f^{-1}(y)$(存在 $x\in f^{-1}(y)$)满足:如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y,则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$,使得每一个 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(2) f 称为 2-序列商映射(1-序列商映射[2]),如果对于 $y\in Y$,任意的 $x\in f^{-1}(y)$(存在 $x\in f^{-1}(y)$)满足:若 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y,则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_k\}$,使得每一个 $x_k\in f^{-1}(y_{n_k})$.

(3) f 称为序列覆盖映射[3],如果 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列,那么存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(4) f 称为序列商映射[4],如果对于 Y 中任一收敛序列 S,存在 X 中收敛序列 L,使得 $f(L)$ 是 S 的子序列.

(5) f 称为几乎开映射[5],如果对于 $y\in Y$,存在 x

$\in f^{-1}(y)$ 使得若 U 是 x 在 X 中的邻域,则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

注 1 由定义 1,显然有下面的蕴含关系:

(1) 2-序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 2-序列商映射 $\Rightarrow$ 序列商映射.

(2) 1-序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 1-序列商映射 $\Rightarrow$ 序列商映射.

(3) 2-序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 1-序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列商映射.

定义 2[6] 对于空间 X,设 $B\subset X$,则

(1) B 称为点 x 在 X 中的序列邻域,如果 X 中的序列 x_n 收敛于 x,则 x_n 是终于 B 的.

(2) B 称为 X 的序列开集,如果 B 是 B 中的每一点的序列邻域.

(3) X 称为序列空间,如果 X 的每一序列开集是 X 的开集.

注 2[7] 对于空间 X 的子集 P,如果 X 中的每个收敛于 x 的序列,存在子列是终于 P 的,则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

定义 3 设 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x: x\in X\}$ 是空间 X 的子集族,它满足:对 $x\in X$,

(a) $\mathscr{P}_x$ 是 x 在 X 中的网,即 $x\in\bigcap\{\mathscr{P}_x: x\in X\}$ 且对 X 中含 x 的开集 G,存在 $\mathscr{P}_x$ 中的某个元素 P,使得 $P\subset G$.

(b) 对于 $\mathscr{P}_x$ 中的任意两个元素 U,V,那么存在 $\mathscr{P}_x$ 中的某个元素 W,使得 $W\subset U\cap V$.

(1) P 称为 X 的序列邻域网[1],如果 $\mathscr{P}_x$ 的每一个元素是 x 在 X 中的序列邻域.

(2) P 称为 X 的序列开网[1],如果 $\mathscr{P}_x$ 的每一个元素是 X 的序列开集.

上述 $\mathscr{P}_x$ 分别称为 x 在 X 中的序列邻域网(简记为 sn 网)和序列开网(简记为 so 网).

若空间 X 的每一点都有可数的 sn 网(so 网),则称 X 为 snf 可数(sof 可数)空间.

注 3[8] 空间 X 是 gf 可数空间当且仅当 X 是 snf 可数的序列空间.

本文中未定义的术语及符号以文献[2,7]为准.

2 主要结果及证明

定理 1 2-序列商映射保持 sof 可数空间.

证明 设 $f: X\to Y$ 是 2-序列商映射,X 是 sof 可数空间.对于 $y\in Y$,及任意的 $x\in f^{-1}(y)$ 满足定义 1(2)中 2-序列商映射的条件.设 $\mathscr{B}=B_n$ 是 x 在 X 中的可数序列开网,令 $\mathscr{P}_y=f(\mathscr{B})=\{f(B_n)\}$.显然 $\mathscr{P}_y$ 是 y 的可数网,下面证明每个 $f(B_n)$ 是 Y 中的序列开集.

对任意的 $y\in f(B_n)$ 及 Y 中任一收敛到 y 的序列 $\{y_n\}$,因为 f 为 2-序列商映射,所以存在 $x\in B_n\cap f^{-1}(y)$ 使得 $x_k\to x$ 且 $x_k\in f^{-1}(y_{n_k})$,所以存在 $k_0\in N$,当 $k\geqslant k_0$ 有 $x_k\in B_n$ 即 $y_{n_k}\in f(B_n)$,所以由注 2,$f(B_n)$ 为 y 的序列邻域,由 y 的任意性可知 $f(B_n)$ 为 Y 中的序列开集.

定理 2 下列条件等价:

(1) X 是度量空间的 1-序列覆盖映射(2-序列覆盖映射).

(2) X 是度量空间的 1-序列商映射(2-序列商映射).

(3) X 是 snf 可数(sof 可数)空间.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由注 1 可得,(3)$\Rightarrow$(1)由文献[9]的定理 3 可得.

(2)$\Rightarrow$(3)设 $f: M\to X$ 是 1-序列商映射,其中 M 是度量空间.对于 $x\in X$ 存在 $U_x\in M$ 满足 1-序列商映射定义的条件.令 $\mathscr{B}=\{B_{x_i}: i\in N\}$ 为 U_x 在 M 中的可数邻域基,令 $\mathscr{P}_x=f(\mathscr{B})=\{f(B_{x_i}): i\in N\}$.

由文献[2]中的定理 1 知 P_x 为 x 的可数序列邻域网,从而 X 为 snf 可数空间.

引理 3 设 $f: X\to Y$ 是 1-序列商映射,如果 X 是序列空间,那么 Y 是序列空间当且仅当 f 是商映射.

证明 *充分性* 因为商映射保持序列空间,X 是序列空间,所以 Y 是序列空间.

必要性 由文献[10]中的定理 2.1.16(2)和注 1 显然成立.

推论 4 下列条件等价:

(1) X 是度量空间的 1-序列覆盖(2-序列覆盖)、商映射.

(2) X 是度量空间的 1-序列商(2-序列商)、商映射.

(3) X 是 gf 可数(第一可数)空间.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由注 1 可得,(3)$\Rightarrow$(1)由文献[9]的推论 2 可得.

(2)$\Rightarrow$(3)由定理 2 引理 3 和注 3 显然可证.

定理 5 对于正则空间 X,下列条件等价:

(1) X 是仿紧局部紧空间的 1-序列覆盖 L-映象(SL-映象).

(2) X 是仿紧局部空间的 1-序列商 L-映象(SL-映象).

(3) X 具有由紧子集组成的点可数(局部可数)sn 覆盖.

证明 (3)$\Rightarrow$(1)由文献[11]的定理 4.6 可得.

(1)⇒(2) 是显然的.

(2)⇒(3) 设 $f: M\to X$ 是 1-序列商 L-映射,其中 M 是仿紧局部紧空间.由文献[12]的引理 3.1,M 具有局部有限开覆盖 $\mathscr{B}$ 使得对每一个 $B\in\mathscr{B}$, B 是 M 中的闭子集.对于 $x\in X$,由 f 是 1-序列商映射,存在 $U_x\in f^{-1}(x)$ 满足定义 1中(2)的要求.置 $\mathscr{P}_x=\{f(B): U_x\in B\in\mathscr{B}\}$,$\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x: x\in X\}$.由文献[12]的引理 3.1知 $\mathscr{P}$ 是由 X 的紧子集组成的点可数覆盖,对每一个 $\mathscr{P}_x$ 中的元素 P,存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $P=f(B)$ 且 $U_x\in B$.设 X 中的序列 $x_n\to x$,由 $\mathscr{P}_x$ 的构造及 1-序列商映射定义,存在 $U_k\in f^{-1}(x_{n_k})$ 使得在 M 中 $U_k\to U_x$.因 B 是 M 的开集,所以 U_k 终于 B,于是 $\{x_{n_k}\}$ 终于 P.由注(2)知,P 是 x 的序列邻域,从而 $\mathscr{P}$ 是 X 的 sn 覆盖.

引理 6[7] 空间 X 是 Fréchet空间当且仅当 X 的每一点的序列邻域是该点的邻域.

定理 7 设 $f: X\to Y$,若 Y 为 Fréchet空间,f 为 1-序列商映射,则 f 是几乎开映射.

证明 因为 f 是 1-序列商映射,对于每个 $y\in Y$,存在 $x\in f^{-1}(y)$ 满足其定义的条件.对 x 在 X 中的邻域 U,下面证明 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

对于 Y 中的收敛于 y 的序列 $\{y_n\}$,存在 X 中的收敛于 x 的序列 $\{x_k\}$,使得每一 $x_k\in f^{-1}(y_{n_k})$.因为 U 是 x 的邻域,所以序列 $\{x_k\}$ 是终于 U 的,从而序列 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_k}\}$ 终于 $f(U)$.

由注 2可知 $f(U)$ 是 y 的序列邻域.因为 Y 是 Fréchet空间,由引理 6,$f(U)$ 是 y 的邻域,于是 f 是几乎开映射.

定理 8 设 $f: X\to Y$,若 Y 为序列空间,f 为 2-序列商映射,则 f 是开映射.

证明 设 U 是 X 中的开集,要证 f 为开映射,必须证明 $f(U)$ 为开集,因为 Y 为序列空间,所以只需证明 $f(U)$ 为 Y 中的序列开集即可.

对任意的 $y\in f(U)$,取 $x\in f^{-1}(y)\cap U$,对 Y 中的任一收敛于 y 序列 $\{y_n\}$,则在 X 中存在收敛于 x 序列 $\{x_k\}$ 且 $x_k\in f^{-1}(y_{n_k})$.因为 U 为开集,所以 $\{x_k\}$ 终留于 U,即 $\{y_{n_k}\}$ 终留于 $f(U)$,所以 $f(U)$ 为 y 的序列邻域,由 y 的任意性可知,$f(U)$ 为 Y 的序列开集,从而 $f(U)$ 为开集.

因为开、S 映射保持局部可分度量空间,再结合推论 4和定理 8,则有:

推论 9 2序列商、商映射保持局部可分度量空间.

引理 10[1] 设 $f: X\to Y$,如果 $\{B_n: n\in N\}$ 是 X 中某点 x 的递减网,并且每一个 $f(B_n)$ 是 $f(x)$ 在 Y 中的序列邻域.若在 Y 中序列 $\{y_n\}$ 收敛于 $f(x)$,那么存在 $x_n\in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

谷建胜[2]证明了:如果 $f: X\to Y$ 是 1-序列商,可数紧映射,X 是度量空间,则 f 是 1-序列覆盖映射.而本文的定理 11将这个结论改进,得出了更为令人满意的结果:

定理 11 设 $f: X\to Y$,X 是 snf 可数(sof 可数)空间,若 f 为 1-序列商映射(2-序列商映射),则 f 为 1-序列覆盖映射(2-序列覆盖映射).

证明 下面只对 1-序列商映射的情况给予证明.2-序列商映射的证明类似对每一 $y\in Y$,存在 $x\in f^{-1}(y)$,因为 X 是 snf 可数空间,令 $\{B_n: n\in N\}$ 是 x 在 X 中递减的可数序列邻域网,则对任意 $n\in N$,下证 $f(B_n)$ 为 y 的序列邻域.

对 Y 中任一收敛于 y 的序列 $\{y_n\}$,因为 f 是 1-序列商映射,所以在 X 中存在收敛于 x 的序列 $\{x_k\}$,使得每一个 $x_k\in f^{-1}(y_{n_k})$,又因为 B_n 为 x 的序列邻域,所以 $\{x_k\}$ 终留于 B_n,即 $\{y_{n_k}\}$ 终留于 $f(B_n)$ 且 $y\in f(B_n)$,故而 $f(B_n)$ 为 y 的序列邻域.所以由引理 10,若 Y 中序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y,那么存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$,所以 f 是 1-序列覆盖映射.

另外,谷建胜[2]提出了 1-序列商映射是否序列覆盖映射的问题,而本文由注 1(3)可知,定理 11实际上部分回答了这个问题.

参考文献:

[1] 林 寿.关于序列覆盖 S映射[J].数学进展,1996,25(6): 548-551.

[2] 谷建胜.关于1-序列商映射[J].数学研究,2003,36(3): 305-308.

[3] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mapping[J]. General Topology Appl, 1971,(1): 143-154.

[4] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mapping[J]. Czech Math J, 1976,(26): 174-182.

[5] Engelking R. General Topology[M]. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1977.

[6] Franklin S P. Space in which sequences suffice[J]. Fund Math, 1965,(57): 107-115.

[7] 林 寿.点可数覆盖与序列覆盖映射[M].北京:科学出版社,2002.

[8] Lin shou, A Note on the Arens′ Space and Sequential Fan[J]. Topology Appl, 1997, 81(3): 185-196.

[9] 林 寿,燕鹏飞.关于序列覆盖紧映射[J].数学学报,2001,(1): 175-182.

[10] 林 寿.广义度量空间与映射[M].北京:科学出版社,1995.

[11] 李进金.仿紧局部紧空间的序列覆盖 L 影象[J].数学进展,2000,29(5): 457-463.

(责任编辑:黎贞崇)