DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.008
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 265~267

拟线性抛物型偏微分方程组解的振动性

Oscillation for Solutions of Systems of Quasilinear Parabolic Partial Differential Equations

罗李平

Luo Liping

(衡阳师范学院数学系,湖南衡阳 421008)

(Department of Mathematics, Hengyang Normal University, Hengyang, Hunan, 421008, China)

摘要: 利用 Green定理和微分不等式,研究一类拟线性抛物型偏微分方程组: $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = a_i(t)\Delta u_i(x,t) + \sum_{k=1}^{s} a_{ik}(t)\Delta u_i(x,\delta_k(t)) - p_i(x,t)u_i(x,t) - \sum_{j=1}^{m} f_{ij}[t,x,u_j(x,\sigma(t))], i=1,2,\cdots,m$ 解的振动性,获得该类方程组在两类不同边值条件: $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial N} + g_i(x,t)u_i(x,t) = 0, (x,t)\in \partial\Omega\times R_+, i=1,2,\cdots,m$ 和 $u_i(x,t) = 0, (x,t)\in \partial\Omega\times R_+, i=1,2,\cdots,m$ 所有解振动的若干充分条件: $\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\sigma(t)}^{t} q(s)\exp\left(\int_{\sigma(s)}^{s} p(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s > \frac{1}{e}$.

关键词: 微分方程 偏微分方程 拟线性 振动性

中图法分类号: O175.26 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0265-03

Abstract The oscillation of solutions of the systems of a class of quasilinear parabolic partial differential equations $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = a_i(t)\Delta u_i(x,t) + \sum_{k=1}^{s} a_{ik}(t)\Delta u_i(x,\delta_k(t)) - p_i(x,t)u_i(x,t) - \sum_{j=1}^{m} f_{ij}[t,x,u_j(x,\sigma(t))], i=1,2,\cdots,m$ is studied by Green's theorem and differential inequalities. The sufficient conditions $\lim_{t\to\infty}\inf\int_{\sigma(t)}^{t} q(s)\exp\left(\int_{\sigma(s)}^{s} p(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s > \frac{1}{e}$. for the oscillation of all solutions of the systems are obtained under two kinds of different boundary conditions $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial N} + g_i(x,t)u_i(x,t) = 0, (x,t)\in \partial\Omega\times R_+, i=1,2,\cdots,m$; and $u_i(x,t) = 0, (x,t)\in \partial\Omega\times R_+, i=1,2,\cdots,m$.

Key words differential equation, partial differential equation, quasilinear, oscillation

近年来,不少学者对偏泛函微分方程组解的振动性进行研究和探讨,并陆续有许多研究结果发表,李永昆[1]给出了一类双曲型偏微分方程组解的振动性条件,关新平等[2]给出了一类非线性中立型双曲偏微分方程组解的振动准则,李伟年[3]给出了一类时滞抛物型偏微分方程组解的振动性定理,邓立虎等[4]研究了一类拟线性抛物泛函微分方程组解的振动性,林文贤[5]研究了一类高阶拟线性中立型偏泛函微分方程组解的振动性,获得了一些较好的结果.本文将讨论如下一类拟线性抛物型偏微分方程组:

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = a_i(t)\Delta u_i(x,t) + \sum_{k=1}^{s} a_{ik}(t)\Delta u_i(x,\delta_k(t)) - p_i(x,t)u_i(x,t) - \sum_{j=1}^{m} f_{ij}[t,x,u_j(x,\sigma(t))], i = 1,2,\cdots,m \tag{1}$$

解的振动性,其中 $(x,t)\in\Omega\times R_+ \equiv G, R_+ = [0,\infty)$, $\Omega\subset R^n$ 是具有逐片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,且

$$\Delta u_i(x,t) = \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x_r^2}, i = 1,2,\cdots,m.$$

考虑两类边值条件:

(B_1) $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial N} + g_i(x,t)u_i(x,t) = 0, (x,t)\in\partial\Omega\times R_+, i = 1,2,\cdots,m$;

收稿日期: 2005-03-10

作者简介: 罗李平(1964-),男,湖南耒阳人,副教授,主要从事偏微分方程振动理论研究.

$(B_2)\ u_i(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times R_+,i=1,2,\cdots,m$;

其中，N 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，$g_i(x,t)\in C(\partial\Omega\times R_+;R_+),i=1,2,\cdots,m$.

本文总假定下列条件成立:

(H1) $a_i(t),a_{ik}(t),\rho_k(t),\sigma(t)\in C(R_+;R_+)$, $\rho_k(t)\leqslant t,\sigma(t)\leqslant t,\lim\limits_{t\to\infty}\rho_k(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty$, $\sigma(t)$ 非减，$i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,s$;

(H2) $p_i(x,t)\in C(\bar{G};R_+)$, $p(t)=\min\limits_{\substack{x\in\Omega\\1\leqslant i\leqslant m}}\{p_i(x,t)\}$, $f_{ij}[t,x,u_j(x,\sigma(t))]\in C(R\times\bar{G},R)$,

当 $u_j\neq0$ 时，$\dfrac{f_{ij}[t,x,u_j]}{u_j}\geqslant p_{ij}(x,t)$，其中 $p_{ij}(x,t)\in C(\bar{G};R),p_{ii}(x,t)>0,p_{ii}(t)=\min\limits_{x\in\Omega}\{p_{ii}(x,t)\},\bar{p}_{ij}(t)=\sup\limits_{x\in\Omega}|p_{ij}(x,t)|$,

$q(t)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{p_{ii}(t)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{p}_{ji}(t)\}\geqslant0,i,j=1,2,\cdots,m$.

定义 1 称向量函数 $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t))^T$ 为系统(1)、(B)$(i=1,2)$的解，若它在 G 上满足系统(1)及边值条件$(B_i)(i=1,2)$.

定义 2 称数值函数 $v(x,t)$ 在 G 内振动，若对任意正数 μ，存在点 $(x_0,t_0)\in\Omega\times[\mu,\infty)$，使得 $v(x_0,t_0)=0$，否则，称为非振动的；称系统(1)、(B)$(i=1,2)$的解 $u(x,t)$ 在 G 内振动，若它至少有一个分量作为数值函数是振动的；称系统(1)、(B)$(i=1,2)$的解 $u(x,t)$ 在 G 内非振动，若它的每一个分量作为数值函数都是非振动的.

引理 1[1] 假设 $Q(t),Q_i(t)\in C([t_0,\infty);R_+)$, $i=1,2,\cdots,m,g_i(t)\in C([t_0,\infty);R),g_i(t)$ 非减且 $g_i(t)\leqslant t,\lim\limits_{t\to\infty}g_i(t)=\infty,i=1,2,\cdots,m$，若对某一个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 有

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{g_i(t)}^{t}Q_i(s)\exp\left[\int_{g_i(s)}^{s}Q(r)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s>\frac{1}{e},$$

则微分不等式 $y'(t)+Q(t)y(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(t)y(g_i(t))\leqslant0(t\geqslant t_0)$ 无最终正解.

1 边值条件(B_1)下系统的振动性

定理 1 若

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t}q(s)\exp\left[\int_{\sigma(s)}^{s}p(r)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s>\frac{1}{e},\tag{2}$$

则系统(1)、(B_1)的所有解在 G 内振动.

证明 假设系统(1)、(B_1)有一个非振动解 $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t))^T$，不妨设当 $t\geqslant t_0\geqslant0$ 时，$|u_i(x,t)|>0,i=1,2,\cdots,m$，令 $\delta_i=\operatorname{sgn}u_i(x,t),Z_i(x,t)=\delta_iu_i(x,t)$，则 $Z_i(x,t)>0,(x,t)\in\Omega\times[t_0,\infty),i=1,2,\cdots,m$.由条件(H1)知，存在 $t_1\geqslant t_0$，使得 $Z_i(x,t)>0,Z_i(x,\rho_k(t))>0,Z_j(x,\sigma(t))>0,(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty),i,j=1,2,\cdots,m,k=1,2,\cdots,s$.

方程(1)两边关于 x 在 Ω 上积分，并利用 Green 公式、边值条件(B_1)及(H2)可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_\Omega Z_i(x,t)\mathrm{d}x\Big]&=a_i(t)\int_\Omega\Delta Z_i(x,t)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{s}a_{ik}(t)\int_\Omega\Delta Z_i(x,\rho_k(t))\mathrm{d}x-\\&\int_\Omega p_i(x,t)Z_i(x,t)\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{m}\delta_i\int_\Omega f_{ij}[t,x,u_j(x,\sigma(t))]\mathrm{d}x\leqslant\\&-p(t)\int_\Omega Z_i(x,t)\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{m}\frac{\delta_i}{\delta_j}\int_\Omega p_{ij}(x,t)Z_j(x,\sigma(t))\mathrm{d}x\\&\leqslant-p(t)\int_\Omega Z_i(x,t)\mathrm{d}x-p_{ii}(t)\int_\Omega Z_i(x,\sigma(t))\mathrm{d}x+\\&\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{p}_{ij}(t)\int_\Omega Z_j(x,\sigma(t))\mathrm{d}x,t\geqslant t_1,i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}$$

上式按 $i=1,2,\cdots,m$ 垂直相加，并记 $V(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\int_\Omega Z_i(x,t)\mathrm{d}x,t\geqslant t_1$，得

$$V'(t)+p(t)V(t)+\sum_{i=1}^{m}\Big[p_{ii}(t)\int_\Omega Z_i(x,\sigma(t))\mathrm{d}x-\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{p}_{ij}(t)\int_\Omega Z_j(x,\sigma(t))\mathrm{d}x\Big]\leqslant0,t\geqslant t_1,$$

亦即 $V'(t)+p(t)V(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}\{p_{ii}(t)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{p}_{ji}(t)\}\int_\Omega Z_i(x,\sigma(t))\mathrm{d}x\leqslant0,t\geqslant t_1$.

因此 $V'(t)+p(t)V(t)+\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{p_{ii}(t)-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{p}_{ji}(t)\}\sum\limits_{i=1}^{m}\int_\Omega Z_i(x,\sigma(t))\mathrm{d}x\leqslant0,t\geqslant t_1$,

即 $V'(t)+p(t)V(t)+q(t)V(\sigma(t))\leqslant0,t\geqslant t_1$. (3)

这表明 $V(t)>0$ 是微分不等式(3)的解.另一方面，结合(2)式，由引理知(3)式无最终正解，矛盾.定理 1 证毕.

2 边值条件(B_2)下系统的振动性

为了讨论系统(1)、(B_2)的振动性，我们在 Ω 上考虑 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases}\Delta\varphi(x)+\lambda\varphi(x)=0, & x\in\Omega,\\\varphi(x)=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4}$$

其中，λ 是常数.

令 λ_0 是问题(4)的最小特征值,则据文献[6]可知,$\lambda_0>0$,且 $\forall x\in\Omega$,其相应的特征函数 $\varphi(x)>0$.

定理 2 若条件(2)成立,则系统(1)、(B_2)的所有解在 G 内振动.

证明 假设系统(1)、(B_2)有一个非振动解 $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t))^T$,不妨设当 $t\geqslant t_0\geqslant 0$ 时,$|u_i(x,t)|>0$, $i=1,2,\cdots,m$,令 $\theta_i=\operatorname{sgn} u_i(x,t)$, $Z_i(x,t)=\theta_i u_i(x,t)$,则 $Z_i(x,t)>0$, $(x,t)\in\Omega\times[t_0,+\infty)$, $i=1,2,\cdots,m$. 由条件(H1)知,存在 $t_1\geqslant t_0$,使得 $Z_i(x,t)>0$, $Z_i(x,\tau_k(t))>0$, $Z_j(x,\sigma(t))>0$, $(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty)$, $i,j=1,2,\cdots,m$, $k=1,2,\cdots,s$.

方程(1)两边同乘以 $\varphi(x)$,并在 Ω 上关于 x 积分,利用 Green 公式、边值条件(B_2)及(H2)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big[\int_\Omega Z_i(x,t)\varphi(x)\,dx\Big]= \\
&a_i(t)\int_\Omega \Delta Z_i(x,t)\varphi(x)\,dx+ \\
&\sum_{k=1}^{s} a_{ik}(t)\int_\Omega \Delta Z_i(x,\tau_k(t))\varphi(x)\,dx- \\
&\int_\Omega p(x,t),Z_i(x,t)\varphi(x)\,dx- \\
&\sum_{j=1}^{m}\theta_i\int_\Omega f_{ij}[t,x,u_j(x,\sigma(t))]\varphi(x)\,dx\leqslant \\
&-p(t)\int_\Omega Z_i(x,t)\varphi(x)\,dx- \\
&\sum_{j=1}^{m}\frac{\theta_i}{\theta_j}\int_\Omega p_{ij}(x,t)Z_j(x,\sigma(t))\varphi(x)\,dx\leqslant \\
&-p(t)\int_\Omega Z_i(x,t)\varphi(x)\,dx- \\
&p_{ii}(t)\int_\Omega Z_i(x,\sigma(t))\varphi(x)\,dx+\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{p}_{ij}(t)\int_\Omega Z_j(x, \\
&\sigma(t))\varphi(x)\,dx,\ t\geqslant t_1,\ i=1,2,\cdots,m.
\end{aligned}
$$

上式按 $i=1,2,\cdots,m$ 垂直相加,并记 $V(t)=\sum_{i=1}^{m}\int_K Z_i(x,t)\varphi(x)\,dx$, $t\geqslant t_1$,类似定理 1 的证明可得

$$U'(t)+p(t)U(t)+q(t)U(\sigma(t))\leqslant 0,\ t\geqslant t_1. \tag{5}$$

这表明 $U(t)>0$ 是微分不等式(5)的解.另一方面,结合方程(2),由引理知方程(5)无最终正解,矛盾.定理 2 证毕.

3 实例

例 1 考虑方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=2\Delta u_1(x,t)+\Delta u_1\left(x,t-\dfrac{3\pi}{2}\right)- \\
\qquad u_1(x,t)-3u_1(x,t-\pi)-2u_2(x,t-\pi), \\
\dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=2\Delta u_2(x,t)+\Delta u_2\left(x,t-\dfrac{3\pi}{2}\right)- \\
\qquad u_2(x,t)-(-2)u_1(x,t-\pi)- \\
\qquad 3u_2(x,t-\pi),
\end{cases}
$$

$$(x,t)\in(0,\pi)\times[0,\infty), \tag{6}$$

边值条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}u_i(0,t)=\frac{\partial}{\partial x}u_i(\pi,t)=0,\ t\geqslant 0,\ i=1,2. \tag{7}$$

不难验证本题满足定理 1 的全部条件,所以系统(6)、(7)的所有解在 $(0,\pi)\times[0,\infty)$ 上振动.事实上,$u_1(x,t)=\cos x\sin t$, $u_2(x,t)=\cos x\cos t$ 就是这样的一个解.

例 2 考虑方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=3\Delta u_1(x,t)+\Delta u_1\left(x,t-\dfrac{3\pi}{2}\right)- \\
\qquad u_1(x,t)-4u_1(x,t-\pi)- \\
\qquad (-2)u_2(x,t-\pi), \\
\dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=2\Delta u_2(x,t)+\Delta u_2\left(x,t-\dfrac{3\pi}{2}\right)- \\
\qquad u_2(x,t)-2u_1(x,t-\pi)-3u_2(x,t-\pi),
\end{cases}
$$

$$(x,t)\in(0,\pi)\times[0,\infty), \tag{8}$$

边值条件为

$$u_i(0,t)=u_i(\pi,t)=0,\ t\geqslant 0,\ i=1,2. \tag{9}$$

容易验证本例满足定理 2 的全部条件,因此,系统(8)、(9)的所有解在 $(x,t)\times[0,\infty)$ 上振动.事实上,$u_1(x,t)=\sin x\cos t$, $u_2(x,t)=\sin x\sin t$ 即是这样的一个解.

参考文献:

[1] 李永昆.具有偏差变元的双曲型微分方程组解的振动性[J].数学学报,1997,40(1):100–105.

[2] 关新平,杨 军.非线性中立型双曲偏泛函微分方程系统的振动性[J].系统科学与数学,1998,18(2):239–246.

[3] 李伟年.时滞抛物方程组解的振动性定理[J].数学的实践与认识,2001,31(2):143–147.

[4] 邓立虎,葛渭高,俞元洪.拟线性抛物泛微分方程组有关边值问题的振动性[J].应用数学学报,2001,24(2):295–301.

[5] 林文贤.高阶拟线性中立型偏泛函微分方程组解的振动性[J].高等学校计算数学学报,2003,25(1):50–59.

[6] Vladimirov V S. Equations of Mathematical Physics[M]. Moscow: Nauka, 1981.

(责任编辑:黎贞崇)