DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.006
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 259~ 261

含 n 个滞量的微分差分方程周期解的存在性*

The Existence of Periodic Solutions of Differential Difference Equations with n Time Lags

刘永建[1],邓春红[1,2],冯春华[1]
Liu Yongjian[1], Deng Chunhong[1,2], Feng Chunhua[1]

(1.广西师范大学数学与计算机科学学院,广西桂林 541004; 2.湖南科技学院数学与计算科学系,湖南永州 425042)
(1. College of Mathematics & Computer Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. Department of Mathematics & Computer Science, Hunan University of Science & Technology, Yongzhou, Hunan, 425042, China)

摘要: 通过构造多元函数,定性分析一个耦合自治常微分方程组周期解的存在性,研究含多个滞量的微分差分方程 $x'(t)=F(x(t),x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),\cdots,x(t-\tau_n))$ 和 $x'(t)=F(x(t),x(t-\tau),x(t-2\tau),\cdots,x(t-n\tau))$ 周期解的存在性问题,获得系统存在非平凡振动周期解的一组充分条件,推广和改进了文献[3~ 5]的结果.

关键词: 微分方程 微分差分方程 周期解 存在性 时滞
中图法分类号: O175.7 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0259-03

Abstract By constructing multivariate function and qualitative analyzing the existence of periodic solutions of a coupled system of autonomous system of differential equations, the existence of non-constant oscillating periodic solutions of differential difference equations with n time lags $x'(t)=F(x(t),x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),\cdots,x(t-\tau_n))$ and $x'(t)=F(x(t),x(t-\tau),x(t-2\tau),\cdots,x(t-n\tau))$ is studied. A set of sufficient conditions on the existence is obtained, the results of Reference [3~ 5] are extended and improved.

Key words differential equation, differential difference equation, periodic solution, existence, time lags

许多事物的变化规律不仅依赖于当时的状态,还依赖于事物过去或将来的状态.除了理想情形以外,动力系统总是存在滞后或超前现象. 因此,微分差分方程在生物数学、经济学、自动控制理论、医学、物理学等许多方面均有着广泛的应用.

以往对泛函微分方程或更特殊的微分差分方程周期解存在性的研究方法主要应用不动点定理[1],但不动点原理所得结果是非构造性,不易了解周期解的几何特征.文献[2]通过定性分析一个耦合自治常微分方程组周期解的存在性,提供了研究微分差分方程非平凡周期解的存在性问题的一种新的方法, 其后许多人做了这方面的推广工作[3~ 7].刘正荣等[8]对这些工作做了综合性的论述,并对含多个滞量的微分差分方程 $x'(t)=\sum_{i=1}^{n-1}-f(x(t-\tau_i))$ 存在周期解时函数的特性进行了剖析.

收稿日期: 2005-03-14
修回日期: 2005-04-19

作者简介: 刘永建(1975-),男,湖南新邵人,主要从事微分方程周期解和概周期解研究.

* 国家自然科学基金(10461003)资助项目.

本文研究比文献[2~ 8]更广泛的含 n 个滞量的微分差分方程:

$$x'(t)=F(x(t),x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),\cdots,x(t-\tau_n)),\tag{1}$$

和

$$x'(t)=F(x(t),x(t-\tau),x(t-2\tau),\cdots,x(t-n\tau))\tag{2}$$

周期解的存在性问题,推广和改进了文献[3~ 5]的结果.

1 相关记号和引理

对方程组

$$\begin{cases}x'=-f(x,y),\\ y'=f(y,x),\end{cases}\tag{3}$$

本文总假设 f 满足:

(H1) $f: R^2\to R$ 连续,对 $x\neq 0, y\in R, xf(y,x)>0, J(x,y)\triangleq\begin{pmatrix}-f(x,y)\\ f(y,x)\end{pmatrix}$ 在 R^2 上满足局部

Lipschitz条件;

(H2) $f(-y,x)=f(y,x)$, $f(y,-x)=-f(y,x)$;

(H3) $|f(y,x)|\leqslant r(|x|)$,其中 $r(s)$ 关于 s 连续,$r(0)=0$, $r(s)>0(s>0)$;

(H4) 对任意 $y\in R$, $\int_0^{\infty} f(y,x)\,\mathrm{d}x=+\infty$;

(H5) 存在常数 $M>0$,使得对 $y_1\geqslant y_2\geqslant 0$ 或 $y_1\leqslant y_2\leqslant 0$ 有 $M|f(y_1,x)|\geqslant|f(y_2,x)|$.

注　条件(H1)保证了系统(3)在初始条件 $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ 下存在唯一解,并且过相平面上任意一点 $(x_0,y_0)\in R^2$,系统(3)有唯一相轨线.

引理 1[8]　方程(3)的所有解都是周期解.

引理 2[8]　若 $(x(t),y(t))$ 是方程(3)的 $4w$ 周期解,则 $y(t)=x(t-w)$.

记 $X(t,\lambda)=(x(t),y(t))(\lambda\geqslant 0)$,为方程(3)过点 (λ,λ) 的解,其周期为 $w(\lambda)$.

还记

(H6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(y,x)}{x}=T$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(y,x)}{x}=U$, (T, U也可为零或无穷).

引理 3[8]　若条件(H6)成立,则

$$\lim_{\lambda\to 0} w(\lambda)=\begin{cases}2c/T, & 0<T<+\infty,\\ +\infty, & T=0,\\ 0, & T=\infty.\end{cases}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} w(\lambda)=\begin{cases}2c/U, & 0<U<+\infty,\\ +\infty, & U=0,\\ 0, & U=\infty.\end{cases}$$

注　随 λ 的变化,$w(\lambda)$ 可以取尽介于 $2c/T$ 和 $2c/U$ 之间的所有值,它们各不相同,组成一个连续统.

引理 4[2]　设简单闭曲线 $L\subset R^2$, G 是包含原点在内以 L 为边界的区域,$T: R^2\to R^2$ 是以原点为中心的旋转变换,则 $TL\cap L\neq\varnothing$.

2　主要结果及证明

记

$$f(y,x)=-F(y,x,-y,-x,y,x,-y,-x,\cdots).\tag{4}$$

定理 1　若 $f(y,x)$ 满足条件(H1)~(H5),且

(H7) 存在正整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得 $\dfrac{f_1}{1+4k_1}=\dfrac{f_2}{2+4k_2}=\dfrac{f_3}{3+4k_3}=\cdots=\dfrac{f_n}{n+4k_n}$ 成立;

(H8) $\min(T,U)<\dfrac{1+4k_1}{2f_1}c<\max(T,U)$

成立,则方程(1)存在周期为 $\dfrac{4f_1}{1+4k_1}$ 的非平凡振动周期解.

证明　考虑耦合方程组

$$\begin{cases}x'=-f(x,y),\\ y'=f(y,x).\end{cases}\tag{5}$$

由引理 2和引理 3知道方程(5)存在一个以 $\dfrac{4f_1}{1+4k_1}$ 为周期的解.设 $(x(t),y(t))$ 是方程(5)周期解,又

$(-x(t))'=-x'(t)=f(x(t),y(t))=-f(-x(t),-y(t))$,

$(-y(t))'=-y'(t)=-f(y(t),x(t))=f(-y(t),-x(t))$,

故 $(-x(t),-y(t))$ 也是方程(5)的解.由引理 5知 $(x(t),y(t))$ 和 $(-x(t),-y(t))$ 在相同的轨道上,所以存在 $W\in(0,\dfrac{4f_1}{1+4k_1})$,使得 $x(t)=-x(t-W)=x(t-2W)$ 和 $y(t)=-y(t-W)=y(t-2W)$ 成立,因而有 $2W=m\dfrac{4f_1}{1+4k_1}$ 或者 $W=m\dfrac{2f_1}{1+4k_1}$.又因为 $W\in(0,\dfrac{4f_1}{1+4k_1})$,故 m 必取值为 1即 $W=\dfrac{2f_1}{1+4k_1}$,所以有

$$\begin{cases}x(t)=-x(t-\dfrac{2f_1}{1+4k_1})=-x(t+\dfrac{2f_1}{1+4k_1}),\\ y(t)=-y(t-\dfrac{2f_1}{1+4k_1})=-y(t+\dfrac{2f_1}{1+4k_1})\end{cases}\tag{6}$$

成立.同样可检验 $(y(t),-x(t))$ 也是方程(5)的解.同时,解 $(y(t),-x(t))$ 和 $(x(t),y(t))$ 在相同的轨道上,所以存在 $W\in(0,\dfrac{4f_1}{1+4k_1})$,使得

$$\begin{cases}y(t)=x(t-e),\\ -x(t)=y(t-e),\end{cases}\tag{7}$$

成立,即 $x(t)=-y(t-e)=-x(t-2e)$.再由(6)式知 $2e=\dfrac{2f_1}{1+4k_1}+k\dfrac{4f_1}{1+4k_1}$ 或者 $e=(2k+1)\dfrac{f_1}{1+4k_1}$.显然 k 只能取值为 0或 1.下证 $k=0$.

若 $k=1$ 即 $e=\dfrac{3f_1}{1+4k_1}$.此时如果 $(x(t_0),y(t_0))$ 属于第Ⅰ象限,$(-x(t_0),-y(t_0))$ 就应该在第Ⅲ象限,这样由(6)式知 $(x(t_0-\dfrac{2f_1}{1+4k_1}),y(t_0-\dfrac{2f_1}{1+4k_1}))$ 也应在第Ⅲ象限,因此 $(x(t_0-\dfrac{3f_1}{1+4k_1}),y(t_0-\dfrac{3f_1}{1+4k_1}))$ 必不属于第Ⅳ象限.但由(7)式知 $(x(t_0-\dfrac{3f_1}{1+4k_1}),y(t_0-\dfrac{3f_1}{1+4k_1}))=(y(t_0),-x(t_0))$ 应属于第Ⅳ象限,矛盾.因此 $k=0$ 即 $e=\dfrac{f_1}{1+4k_1}$,故

$$\begin{cases} x(t) = -y(t - \dfrac{\tau_1}{1+4k_1}), \\ y(t) = x(t - \dfrac{\tau_1}{1+4k_1}), \end{cases} \tag{8}$$

成立.由(6)式,(8)式及条件(H7)知

$x(t-\tau_1) = x(t-(1+4k_1)\dfrac{\tau_1}{1+4k_1}) = x(t-\dfrac{\tau_1}{1+4k_1}) = y(t)$,

$x(t-\tau_2) = x(t-(2+4k_2)\dfrac{\tau_2}{2+4k_1}) = x(t-(2+4k_2)\dfrac{\tau_2}{2+4k_2}) = x(t-(2+4k_2)\dfrac{\tau_1}{1+4k_1}) = x(t-\dfrac{2\tau_1}{1+4k_1}) = -x(t)$,

$x(t-\tau_3) = x(t-(3+4k_3)\dfrac{\tau_3}{3+4k_3}) = x(t-(3+4k_3)\dfrac{\tau_1}{1+4k_1}) = x(t-\dfrac{3\tau_1}{1+4k_1}) = -y(t)$,

$x(t-\tau_4) = x(t-(4+4k_4)\dfrac{\tau_3}{4+4k_4}) = x(t-(4+4k_4)\dfrac{\tau_1}{1+4k_1}) = x(t-\dfrac{4\tau_1}{1+4k_1}) = x(t)$,…

因而,$x' = -f(x,y) = -F(x(t),y(t),-x(t),-y(t),x(t),y(t),\cdots) = F(x(t),x(t-\tau_1),x(t-\tau_2),\cdots)$.

显然,$\dfrac{4\tau_1}{1+4k_1}$ 非零.考虑方程(5)的解$(x(t),y(t))$,由对称性知道,在一个周期内$x(t)$存在而且只存在两个零点,即$x(t)$是振动的.同理$y(t)$也是振动的.所以,$x = x(t)$是方程(1)以$\dfrac{4\tau_1}{1+4k_1}$为周期的非平凡振动周期解.证毕.

若方程(1)中的$\tau_i = 0 (i = 3,4,\cdots,n)$,即方程(1)为

$$x'(t) = F(x(t),x(t-\tau_1),x(t-\tau_2)), \tag{9}$$

若函数F满足定理1的所有条件,则有:

推论1 方程(9)有周期为$\dfrac{4\tau_1}{1+4k_1}$的非平凡振动周期解.

注 此时条件(H7)为:存在正整数k_1,k_2,k_3,使得$\dfrac{\tau_1}{1+4k_1} = \dfrac{\tau_2}{2+4k_2} = \dfrac{\tau_3}{3+4k_3}$成立.

显然,推论1中的条件比文献[6]的弱,两者却有同样的结果.文献[5]要求滞量$\tau_i (i = 1,2,3,\cdots,n)$是可以相互替换的,而上述定理1没有这要求.因而本文推广了文献[5,6]的主要结果.

定理2 若$f(y,x)$满足条件(H1)~(H6),且(H8)存在正整数k,使得$\min(\alpha,\beta) < \dfrac{1+4k}{2\tau}\pi < \max(\alpha,\beta)$成立,则方程(2)存在周期为$\dfrac{4\tau}{1+4k}$的非平凡振动周期解.

证明 显然,存在正整数$k_2,k_3,\cdots,k_n$使得$\dfrac{1}{1+4k} = \dfrac{2}{2+4k_2} = \dfrac{3}{3+4k_3} = \cdots = \dfrac{n}{n+4k_n}$成立.取定理1中$\tau_i (i = 1,2,3,\cdots,n)$分别等于$i\tau (i = 1,2,3,\cdots,n)$.证明过程类似定理1的证明,详细过程略.

令定理2中$\tau = 1$,有:

推论2 若$\min(\alpha,\beta) < \dfrac{\pi}{2} < \max(\alpha,\beta)$,则方程(2)存在周期为4的非平凡振动周期解.

注 推论2是文献[4]主要结果.

例1 考察方程

$$x'(t) = (Ax(t-\tau_1)x(t-\tau_3)x(t-\tau_5)x(t-\tau_7)x(t-\tau_9))/(B+\sin(x(t)x(t-\tau_2)x(t-\tau_4)x(t-\tau_6))+x(t-\tau_1)x(t-\tau_9)). \tag{10}$$

解 显然,$f(y,x) = \dfrac{Ax^5}{B+\sin y^4 + x^2}$,取$A = 5, B = 4$,此时$\alpha = 0, \beta = 5$.当$\tau_i (i = 1,2,\cdots,9)$分别取$\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{9}{20}\pi,\dfrac{2}{15}\pi,\dfrac{3}{20}\pi,\dfrac{7}{10}\pi,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{4}{5}\pi,\dfrac{27}{20}\pi$.容易验证存在$k_i (i = 1,2,\cdots,9)$分别等于1,2,6,1,1,9,2,10,18,满足定理1的所有条件,所以方程(10)存在周期为$\dfrac{\pi}{15}$的周期解.

参考文献:

[1] 蒲志林,苟清明.一类时滞模型周期正解的存在性问题[J].工程数学学报,2002,19(3):21-24.

[2] Kaplan J L, Yorke J A. Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equation[J]. J Mathematical Analysis Apply, 1974, 48(2): 317-324.

[3] 温立志,夏华兴.含两个滞量的差分微分方程周期解的存在性[J].中国科学(A),1987,(9):909-916.

[4] Wang K. On the existence of nontrivial periodic solution of differential difference equations[J]. Chinese Annals of Mathematical Series B, 1990, 11(4): 437-444.

[5] Sun J T. On the existence of oscillating periodic solutions of differential difference equation with n time lags[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 1993, 8(1): 40-44.

[6] 郁文生,伍炯宇.方程$x'(t) = -f(x(t),x(t-\tau_1),x(t-\tau_2))$非常数周期解的存在性[J].四川大学学报,1994,31(4):452-459.

[7] 葛渭高.三维时滞微分系统的不可列个周期解[J].数学学报,1996,39(4):442-449.

[8] 刘正荣,李继彬.哈密顿系统与时滞微分方程的周期解[M].北京:科学出版社,1996.62-158.

(责任编辑:黎贞崇)