DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.005
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 255~258

关于丢番图方程 $x^4 \pm 6px^2y^2 \pm 3p^2y^4 = z^2$ *

On the Diophantine Equation $x^4 \pm 6px^2y^2 \pm 3p^2y^4 = z^2$

周 科
Zhou Ke

(广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530001)

(Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teacher's Education. University, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要: 设 p 为素数,利用 Fermat无穷递降法,研究方程 $x^4 \pm 3px^2y^2 + 3p^2y^4 = z^2$ 与 $x^4 \pm 6px^2y^2 - 3p^2y^4 = z^2$ 正整数解的存在性,证明该方程在 $p \equiv 5 \pmod{12}$ 时均无正整数解,在 $p \equiv 11 \pmod{12}$ 时有解且有无穷多组正整数解,获得方程无穷多组正整数解的通解公式和方程的部分正整数解.

关键词: 丢番图方程 Fermat无穷递降法 正整数解

中图法分类号: O156.7 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0255-04

Abstract Let p be a prime number, using Fermat Infinite method of descent, to study the positive integral solution of the equations $x^4 \pm 3px^2y^2 + 3p^2y^4 = z^2$ and $x^4 \pm 6px^2y^2 - 3p^2y^4 = z^2$. Proved that the equations have no positive integer solution were proved, where $p \equiv 5 \pmod{12}$. They have infinite multi-groups positive integer solution while $p \equiv 11 \pmod{12}$. The infinite multi-group positive integer solution formula and a part for positive integer solution of the equations have been given.

Key words Diophtine equation, Fermat infinite method of descent, positive integral solution

三元四次丢番图方程

$$x^4 + mx^2y^2 + ny^4 = z^2, (x, y) = 1, \quad (1)$$

在广义 Fermat猜想与 Tijdeman[1]猜想的研究中具有非常重要的作用. 1911年 Aubry猜想当 $n = 1$ 和 $|m \pm 2|$ 均为素数时,如果 $0 < m \not\equiv 3 \pmod 8$ 或 $0 > m \equiv 3 \pmod 8$,则方程(1)无正整数解.近年来,曹珍富[2]、郑德勋[3,4]、王云葵[5~8]、周科[6,7]等就有许多关于方程(1)方面的研究,并取得了一系列的研究成果.本文利用因式分解法和 Fermat无穷递法获得了方程(1)的进一步结果.

1 相关引理

引理 1 设 $p \equiv 5 \pmod 6$ 为素数,如果丢番图方程

$$p^2x^4 - 3px^2y^2 + 3y^4 = z^2, (x, y) = 1 \quad (2)$$

有解,则其全部正整数解可表为 $x = u, y = 2rs, z = r^4 + 3s^4$,其中,$u, r, s$ 是方程(3)的正整数解:

$$pu^2 = 6r^2s^2 - r^4 + 3s^4, (r, s) = 1, 2 | rs, p \equiv 11 \pmod{12}. \quad (3)$$

证明 设 x, y, z 为方程(2)的正整数解,由(3)式知,$(2px^2 - 3y^2)^2 + 3y^4 = (2z)^2$,故有正整数 r, s 使得方程(4)有正整数解:

$$2z \pm (2px^2 - 3y^2) = r^4, 2z \mp (2px^2 - 3y^2) = 2s^4, y = rs, (r, s) = 1. \quad (4)$$

若 $2 \nmid y$,则 $2 \nmid xy$.否则必有 $2 | 3x^2y, -3x^2y \equiv 0, 4 \pmod 8$ 又由(3)知 $2 \nmid z$,因而: $px^4 \equiv 0 \pmod 8$, $z^2 \equiv 3y^4 \equiv 3 \pmod 8$ 所以 $p^2x^4 - 3px^2y^2 + 3y^2 \equiv 3, 7 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod 8$,矛盾.

由于 $p \equiv 5 \pmod 6$,故有 $4px^2 = 6y^2 - r^4 + 3s^4 = 6r^2s^2 - r^4 + 3s^4 = 8 \pmod{16}$,矛盾,故 $2 | y$.因为 $(x, y) = 1$,所以 $2 \nmid x$ 再由(3)知,$2 \nmid z$,又由 $(px^2 - 6(\frac{y}{2})^2)^2 + 12(\frac{y}{2})^4 = z^2$ 模 8知,$12(\frac{y}{2})^2 \equiv 0 \pmod 8$,故有 $4 | y$,从而必有适合 $(r, s) = 1, 2 | rs$ 的正整数 r, s 使得:

收稿日期: 2005-05-11
修回日期: 2005-08-04
作者简介: 周 科(1962-),男,副教授,广西桂林人,主要从事数论研究.
* 广西壮族自治区教育厅科研项目资助(广义 Fermat猜想的研究).

$$z \pm \left(px^2 - 6\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) = 2r^4, z \mp \left(px^2 - 6\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) = 6s^4, y = 2rs. \quad (5)$$

由此及 $p \equiv 5 \pmod 6$ 有 $z = r^4 + 3s^4, px^2 = 6r^2s^2 - r^4 + 3s^4$,有 $p \equiv 11 \pmod{12}$,由此推出方程(2)的全部正整数解可由(3)式表出.

例如,方程(3)有解 $(p,r,s,u) = (11,2,1,1)$,因而方程(2)有解: $(p,x,y,z) = (11,1,4,19)$.

引理 2 设 $p \equiv 5 \pmod 6$ 为素数,如果丢番图方程

$$p^2x^4 + 3px^2y^2 + 3y^4 = z^2, (x,y) = 1 \quad (6)$$

有解,则其全部正整数解可由① 与② 表出:

① $x = u, y = rs, z = (r^4 + 3s^4)/4$,其中 u,r,s 是方程(7)的正整数解:

$$4pu^2 = 3s^4 - 6r^2s^2 - r^4, (r,s) = 1, 2 \nmid rs, p \equiv 23 \pmod{24}; \quad (7)$$

② $x = u, y = 2rs, z = r^4 + 3s^4$,其中 u,r,s 是方程(8)的正整数解:

$$pu^2 = 3s^4 - 6r^2s^2 - r^4, (r,s) = 1, 2 | rs, p \equiv 11 \pmod{12}. \quad (8)$$

证明 设 x,y,z 为方程(6)的正整数解,若 $2 \nmid y$,则 $2 \nmid xy$,从而有 $1 + 3p + 3 \equiv 1 \pmod 8$,故 $p \equiv -1 \pmod 8 \equiv 23 \pmod{24}$,由 $(2px^2 + 3y^2)^2 + 3y^4 = (2z)^2$ 知有正整数 r,s 使得方程(9)有解:

$$2z \pm (px^2 + 3y^2) = r^4, 2z \mp (2px^2 + 3y^2) = 3s^4, y = rs, (r,s) = 1. \quad (9)$$

由于 $p \equiv 5 \pmod 6$,故有 $4px^2 = 3s^4 - 6r^2s^2 - r^4$,由此推出方程(6)的正整数解由① 表出.

例如,方程(7)有解 $(p,r,s,u) = (47,1,3,1)$,由① 得(6)有解 $(p,x,y,z) = (47,1,3,21)$.

若 $2 | y$,则由 $\left(px^2 + 6\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)^2 + 12\left(\frac{y}{2}\right)^4 = z^2$ 有 $4 | y$,从而必有适合 $(r,s) = 1, 2 | rs$,的正整数 r,s 使得:

$$z \pm \left(px^2 + 6\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) = 2r^4, z \mp \left(px^2 + 6\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) = 6s^4, y = 2rs. \quad (10)$$

由此及 $p \equiv 5 \pmod 6$ 有 $z = r^4 + 3s^4, px^2 = 3s^4 - 6r^2s^2 - r^4$,从而 $p \equiv 11 \pmod{12}$,由此推出方程(6)的正整数解可由② 表出.

例如,方程(8)有解 $(p,r,s,u) = (23,1,2,1)$,由① 得(6)有解 $(p,x,y,z) = (23,1,4,17)$.

2 方程 $x^3 \pm 6px^2y^2 = z^2$ 的正整数解

定理 1 设 $p \equiv 5 \pmod 6$ 为素数,则丢番图方程

$$x^4 - 3px^2y^2 + 3p^2y^4 = z^2, (x,y) = 1, \quad (11)$$

$$x^4 + 6px^2y^2 - 3p^2y^4 = z^2, (x,y) = 1, \quad (12)$$

在 $p \equiv 5 \pmod{12}$ 时均无正整数解,在 $p \equiv 11 \pmod{12}$ 时,如果有解,则有无穷多组正整数解,并且方程(11)的全部正整数解可由(13)表出;方程(12)的全部正整数解可由(14)表出,其中 u,r,s 是方程(3)的正整数解.

$$\begin{cases} x_{n+1} = |x_n^4 - 3p^2y_n^4|, x_1 = |p^2u^4 - 3(2rs)^4|, \\ y_{n+1} = 2x_ny_nz_n, y_1 = 4urs(r^4 + 3s^4), \\ z_{n+1} = z_n^4 + 3p^2x_n^4y_n^4, z_1 = (r^4 + 3s^4)^4 + \\ \quad 3p^2(2urs)^4, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^4 + 3p^2y_n^4, x_1 = r^4 + 3s^4, \\ y_{n+1} = 2x_ny_nz_n, y_1 = 2urs, \\ z_{n+1} = |z_n^4 - 3p^2(2x_ny_n)^4|, z_1 = |p^2u^4 - \\ \quad 3(2rs)^4|. \end{cases} \quad (14)$$

证明 设 x,y,z 是方程(11)的正整数解,若 $2 \nmid y$,则 $2 \nmid xy$,并且设 x,y,z 是方程(11)使 y 为最小的一组正整数解,由 $(2x^2 - 3py^2)^2 + 3p^2y^4 = (2z)^2$ 知,存在正整数 r,s 使得方程(15)或(16)有正整数解:

$$2z \pm (2x^2 - 3py^2) = p^2r^4, 2z \mp (2x^2 - 3py^2) = 3s^4, y = rs, (r,s) = 1, \quad (15)$$

$$2z \pm (2x^2 - 3py^2) = r^4, 2z \mp (2x^2 - 3py^2) = 3p^2s^4, y = rs, (r,s) = 1. \quad (16)$$

由(15)式有 $p^2r^4 + 6pr^2s^2 - 3s^4 = 4x^2$,即 $\left(\frac{pr^2 + 3s^2}{2}\right)^2 - 3s^4 = x^2$,故有正整数 a,b 使得:

$$\frac{pr^2 + 3s^2}{2} \pm x = a^4, \frac{pr^2 + 3s^2}{2} \mp x = 3b^4, s = ab, (a,b) = 1, \quad (17)$$

即有 $pr^2 = a^4 - 3a^2b^2$,故 $p \equiv 1 \pmod{24}$,矛盾.故(11)式在 $p \equiv 5 \pmod{12}$ 时均无正整数解.由(17)式有:

$$r^4 + 6pr^2s^2 - 3p^2s^4 = (2x)^2, (r,s) = 1, 2 \nmid rs, \quad (18)$$

故有 $\left(\frac{r^2 + 3ps^2}{2}\right)^2 - 3p^2s^4 = x^2$,所以存在正整数 a,b 使得方程(19)或(20)有正整数解:

$$\frac{r^2 + 3ps^2}{2} \pm x = p^2a^4, \frac{r^2 + 3ps^2}{2} \mp x = 3b^4, s = ab, (a,b) = 1, \quad (19)$$

$$\frac{r^2 + 3ps^2}{2} \pm x = a^4, \frac{r^2 + 3ps^2}{2} \mp x = 3p^2b^4, s = ab, (a,b) = 1. \quad (20)$$

由(20)式有 $p^2a^4 - 3pa^2b^2 + 3b^4 = r^2$,由(3)式

及 $2\nmid ab$ 知方程无正整数解.由(18)式有 $a^4-3pa^2b^2+3p^2b^4=r^2$,说明(a,b,r)也是方程(11)的正整数解,但 $y=abr>b$,这与 y的最小性相矛盾,故方程(11)在 $2\nmid y$ 时无正整数解.

若 $2|y$,由引理1的证明及 $(x^2-6p(\frac{y}{2})^2)^2+12p^2(\frac{y}{2})^4=z^2$,知 $4|y$,故有方程(21)或(22)有正整数解:

$$z\pm(x^2-6p(\frac{y}{2})^2)=2p^2r^4,z\mp(x^2-6p(\frac{y}{2})^2)=6s^4,(r,s)=1,y=1rs,2|rs, \tag{21}$$

$$z\pm(x^2-6p(\frac{y}{2})^2)=2r^4,z\mp(x^2-6p(\frac{y}{2})^2)=6p^2s^4,(r,s)=1,y=2rs,2|rs. \tag{22}$$

由(22)式有 $p^2r^4+6pr^2s^2-3s^4=x^2$,即 $(pr^2+3s^2)^2-12s^4=x^2$,故有正整数 a,b 使得方程(23)有解:

$$pr^2+3s^2\pm x=2a^4,pr^2+3s^2\mp x=6b^4,s=ab,2|ab, \tag{23}$$

故有 $pr^2=a^4-3a^2b^2+3b^4,p\equiv1(\mathrm{mod}\ 6)$,矛盾;由(23)式有 $y=2rs,z=r^4+3p^2s^4$ 及

$$r^4+6pr^2s^2-3p^2s^4=x^2,(r,s)=1,2|s, \tag{24}$$

故有 $(r^2+3ps^2)^2-12ps^4=x^2$,从而方程(25)或(26)有正整数解:

$$r^2+3ps^2\pm x=2p^2a^4,r^2+3ps^2\mp x=6b^4,s=ab,2|ab, \tag{25}$$

$$r^2+3ps^2\pm x=2a^4,r^2+3ps^2\mp x=6p^2b^4,s=ab,2|ab, \tag{26}$$

由(25)式有 $x=|p^2a^4-3b^4|,y=2abr,z=r^4+3p^2(ab)^4$ 及 $p^2a^4-3pa^2b^2+3b^4=r^2$,由(2)式知方程(11)的正整数解 (x_1,y_1,z_1) 由(13)式表出;由(26)式有 $x=|a^4-3p^2b^4|,y=2abr,z=r^4+3p^2(ab)^4$ 及 $a^4-3pa^2b^2+3p^2b^4=r^2$,说明(a,b,r)也是方程(11)的正整数解,令 $(a,b,r)=(x_n,y_n,z_n)$,则方程(11)更大的正整数解 $(x,y,z)=(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})$ 由(13)表出.

从方程(18)与(24)出发,类似地,易证方程(12)的正整数解由(14)表出.

定理 2 设 $p\equiv5(\mathrm{mod}\ 6)$ 为素数,则丢番图方程

$$x^4+3px^2y^2+3p^2y^4=z^2,(x,y)=1, \tag{27}$$

$$x^4-6px^2y^2-3p^2y^4=z^2,(x,y)=1, \tag{28}$$

在 $p\equiv5(\mathrm{mod}\ 12)$ 时均无正整数解,在 $p\equiv11(\mathrm{mod}\ 12)$ 时如果有解,则有无穷多组正整数解,并且方程(27)的全部正整数解可由(29)与(30)式表出;方程(28)的全部正整数解可由(31)与(32)式表出,其中(29)与(31)中的 u,r,s 是方程(7)的正整数解,而(30)与(32)中的 u,r,s 是方程(8)的正整数解:

$$\begin{cases} x_{n+1}=|x_n^4-3p^2y_n^4|/2,x_1=|p^2u^4-3r^4s^4|/2,\\ y_{n+1}=x_ny_nz_n,y_1=urs(r^4+3s^4)/4,\\ z_{n+1}=(z_n^4+3p^2x_n^4y_n^4)/4,z_1=[(r^4+3s^4)^4+\\ \quad 3p^2(4urs)^4]/4^5, \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=|x_n^4-3p^2y_n^4|,x_1=|p^2u^4-3(2rs)^4|,\\ y_{n+1}=2x_ny_nz_n,y_1=4urs(r^4+3s^4),\\ z_{n+1}=z_n^4+3p^2x_n^4y_n^4,z_1=(r^4+3s^4)^4+\\ \quad 3p^2(2urs)^4, \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=(x_n^4+3p^2y_n^4)/4,x_1=(r^4+3s^4)/4,\\ y_{n+1}=x_ny_nz_n,y_1=urs,\\ z_{n+1}=|z_n^4-3p^2(2x_ny_n)^4|/16,z_1=|p^2u^4-\\ \quad 3r^4s^4|, \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n^4+3p^2y_n^4,x_1=r^4+3s^4,\\ y_{n+1}=2x_ny_nz_n,y_1=2urs,\\ z_{n+1}=|z_n^4-3p^2(2x_ny_n)^4|,z_1=|p^2u^4-3(2rs)^4|. \end{cases} \tag{32}$$

证明 设 x,y,z 是方程(28)的正整数解,

(Ⅰ) 若 $2\nmid y$,则 $2\nmid xy$,则由 $(2x^2+3py^2)^2+3p^2y^4=(2z)^2$ 知,存在正整数 r,s 使得方程(33)或(34)有正整数解:

$$2z\pm(2x^2+3py^2)=p^2r^4\ 2z\mp(2x^2+3py^2)=3s^4,y=rs,(r,s)=1, \tag{33}$$

$$2z\pm(2x^2+3py^2)=r^4,2z\mp(2x^2+3py^2)=3p^2s^4,y=rs,(r,s)=1. \tag{34}$$

由(33)式有 $p^2r^4-6pr^2s^2-3s^4=4x^2$,即 $(\frac{pr^2-3s^2}{2})^2-3s^4=x^2$,故有正整数 a,b 使得:

$$\left|\frac{pr^2-3s^2}{2}\right|\pm x=a^4,\left|\frac{pr^2-3s^2}{2}\right|\mp x=3b^4,s=ab,(a,b)=1, \tag{35}$$

由 $p\equiv5(\mathrm{mod}\ 6)$ 有 $pr^2=3a^2b^2-a^4-3b^4=-(a^2-\frac{3}{2}b^2)^2-\frac{3}{4}b^4<0$,矛盾.由(34)式有:

$$r^4-6pr^2s^2-3p^2s^4=(2x)^2,(r,s)=1,2\nmid rs, \tag{36}$$

故有 $(\frac{r^2-3ps^2}{2})^2-3p^2s^4=x^2$,故存在正整数 a,b 使得方程(37)或(38)有正整数解:

$$\left|\frac{r^2-3ps^2}{2}\right|\pm x=p^2a^4,\left|\frac{r^2-3ps^2}{2}\right|\mp x=3b^4,s=ab,(a,b)=1, \tag{37}$$

$$\left|\frac{r^2-3ps^2}{2}\right|\pm x=a^4\left|\frac{r^2-3ps^2}{2}\right|\mp x=3p^2b^4,s=ab,(a,b)=1. \tag{38}$$

由(36)式有 $2x=|p^2a^4-3b^4|$, $y=abr$, $4z=r^4+3p^2a^4b^4$ 及 $p^2a^4+4pa^2b^2+3b^4=r^2$,由方程(6)知方程(27)的正整数解 (x_1,y_1,z_1) 由(29)表出;由(38)式有

$$2x=|a^4-3p^2b^4|,\ y=abr,\ 4z=r^4+3p^2a^4b^4 \text{及}$$
$$a^4+3pa^2b^2+3p^2b^4=r^2,\ (a,b)=1,\ 2\nmid b,\quad (39)$$

说明 (a,b,r) 也是方程(27)在 $2\nmid y$ 的正整数解,令 $(a,b,r)=(x_n,y_n,z_n)$,则方程(27)更大的正整数解 $(x,y,z)=(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})$ 由(29)表出.

(Ⅱ)若 $2|y$,则有 $(x^2+6p(\frac{y}{2})^2)^2+12p^2(\frac{y}{2})^4=z^2$, $4|y$,故有方程(40)或(41)有正整数解:

$$z\pm(x^2+6p(\frac{y}{2})^2)=2p^2r^4,\ z\mp(x^2+6p(\frac{y}{2})^2)=6s^4,\ (r,s)=1,\ y=2rs,\ 2|rs,\quad (40)$$

$$z\pm(x^2+6p(\frac{y}{2})^2)=2r^4,\ z\mp(x^2+6p(\frac{y}{2})^2)=6p^2s^4,\ (r,s)=1,\ y=2rs,\ 2|rs,\quad (41)$$

由(40)式有 $p^2r^4-6pr^2s^2-3s^4=x^2$,即 $(pr^2-3s^2)^2-12s^4=x^2$,故有正整数 a,b 使得方程(42)有解:

$$|pr^2-3s^2|\pm x=2a^4,\ |pr^2-3s^2|\pm x=6b^4,\ s=ab,\ 2|ab.\quad (42)$$

故由 $p\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$ 有 $pr^2=3a^2b^2-a^4-3b^2=-(a^2-\frac{3}{2}b^2)^2-\frac{3}{4}b^4<0$,矛盾.由(42)式有 $y=2rs$, $z=r^4+3p^2s^4$,及方程(43)有正整数解:

$$r^4-6pr^2s^2-3p^2s^4=x^2,\ (r,s)=1,\ 2|s,\quad (43)$$

故有 $(r^2-3ps^2)^2-12ps^4=x^2$,从而有方程(44)或(45)有正整数解:

$$|r^2-3ps^2|\pm x=2p^2a^4,\ |r^2-3ps^2|\pm x=6b^4,\ s=ab,\ 2|ab,\quad (44)$$

$$|r^2-3ps^2|\pm x=2a^4,\ |r^2-3ps^2|\pm x=6p^2b^4,\ s=ab,\ 2|ab,\quad (45)$$

由(44)式有 $x=|p^2a^4-3b^4|$, $y=2abr$, $z=r^4+3p^2(ab)^4$ 及方程(46)有正整数解:

$$p^2a^4+3pa^2b^2+3b^4=r^2,\ (a,b)=1,\ 2|b,\quad (46)$$

由(6)式知方程(27)的正整数解 (x_1,y_1,z_1) 由(30)式表出;由(46)式有 $x=|a^4-3p^2b^4|$, $y=2abr$, $z=r^4+3p^2(ab)^4$,及方程(47)有正整数解:

$$a^4+3pa^2b^2+3p^2b^4=r^2,\ (a,b)=1,\ 2|b,\quad (47)$$

说明 (a,b,r) 也是方程(27)在 $2|y$ 的正整数解,令 $(a,b,r)=(x_n,y_n,z_n)$,则方程(27)更大的正整数解 $(x,y,z)=(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})$ 由(30)表出.

从方程(36)与(43)出发,完全类似地易证方程(28)的正整数解由(31)与(32)表出.

通过计算机程序,可得到方程(11)的部分正整数解 (p,x,y,z):

(11, 647, 152, 223249); (23, 479471, 26920, 205398599041); (47, 147841345801679, 36669689368088, 91192844095339001807435965633); (59, 165324702788233, 21584845070096, 27566843092812681279502669009); (71, 4273, 92, 9636289); (107, 15841948201, 1381878368, 185457390518611949713); (443, 134041, 6216, 16708118353); (599, 100402191793, 521522424, 98372328939817084932 49).

同样可得方程(12)的部分正整数解 (p,x,y,z):

(11, 19, 4, 647); (23, 673, 20, 479471); (47, 9773809, 1875916, 147841345801679); (59, 9091939, 1187032, 165324702788233); (71, 49, 4, 4273); (107, 89779, 7696, 15841948201); (443, 259, 12, 134041); (599, 314929, 828, 100402191793).

参考文献:

[1] Tijdeman R. Diophantine Equations and Diophantine Approximations[M]. In: Moilln R A ed. Number Theory and Applications, Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1989. 215.

[2] 曹珍富.关于丢番图方程 $x^4\pm y^4=z^p$ [J].宁夏大学学报, 1999, 20(1): 18-21.

[3] 郑德勋.关于不定方程 $x^4+kx^2y^2+y^4=z^2$ 的可解性[J].科学通报, 1987, (8): 571-573.

[4] 郑德勋.关于方程 $x^4+kx^2y^2+y^4=z^2$ 可解性的注记[J].四川大学学报, 1989, (专辑): 11-15.

[5] 王云葵.关于丢番图方程 $x^3\pm y^6=Dz^2$ [J].广西民族学院学报, 2002, 8(1): 1-4.

[6] 王云葵.方程 $x^p\pm y^{2p}=z^2$ 与广义费尔马猜想[J].广西民族学院学报, 2001, 7(4): 241.

[7] 周 科.关于丢番图方程 $x^4+mx^2y^2+ny^4=z^2$ [J].广西师范学院学报, 2002, 19(3): 21-25.

[8] 周 科,王云葵.关于丢番图方程 $ax^4+bx^2y^2+cy^4=dz^2$ (Ⅱ)[J].松辽学刊, 2001, (3): 78-80.

(责任编辑:黎贞崇)