DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.003
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 249, 254

关于 Fibonacci三角形存在的上界*
The Upper Bounds about Fibonacci Triangles

何 波
He Bo

(隆昌县响石中学,四川隆昌 642152)
(Longchang Xiangshi Middle School, Longchang, Sichuan, 642152, China)

摘要: 运用 Gel'Fond-Baker方法,证明: 对任意确定的正整数 $k>5$,若存在以 F_n, F_{n+k}, F_{n+k} 为边长的 Fibonacci 三角形,则必有 $n<k\cdot\exp(169.7+2.9k+7\ln(k+2))$.

关键词: Fibonacci数 Fibonacci三角形 Lucas数 Gel'Fond-Baker方法 上界
中图法分类号: O156 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0249-01

Abstract Using Gel'Fond-Baker method, we have proved that if existing a Fibonacci triangle with F_n, F_{n+k}, F_{n+k} as its sides with $k>5$, then $n<k\cdot\exp(169.7+2.9k+7\ln(k+2))$.

Key words Fibonacci number, Fibonacci triangle, Lucas number, Gel'Fond-Baker method, upper bound

整循环数列

$$F_0=0, F_1=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ (n\geqslant 0),$$
$$L_0=2, L_1=1, L_{n+2}=L_{n+1}+L_n\ (n\geqslant 0).$$

分别称为 Fibonacci数列和 Lucas数列.几百年来,人们对 Fibonacci数列的研究经久不衰,至今仍有许多关于 Fibonacci数列的问题未解决.

1990 年, H. Harborth 和 A. Kemnitz 提出 Fibonacci三角形猜想[1],并证明了 $k=1$或 $n\leqslant 25$时猜想成立.文献 [2]中曹珍富提到有研究该问题当 $k=2,3,4$的一般方法.最近,作者在文献 [3]中给出了猜想的一个简洁的充要条件,从四次丢番图方程的角度,指出了 $k=1,2,3,4,5$的统一证明方法.但目前可参阅的文献中至今没有 $k>5$的任何结论.

本文运用 Gel'Fond-Baker方法,对一般的 k,证明以下结论:

定理 1 设 $k>5$是确定的正整数,最多只有有限个以 F_n, F_{n+k}, F_{n+k} 为边长的 Fibonacci三角形,并且满足

$$n<k\cdot\exp(169.7+2.9k+7\ln(k+2)). \tag{1}$$

1 相关引理

证明所需要的相关引理:

引理 1 存在以 F_n, F_{n+k}, F_{n+k} 为边长的 Fibonacci三角形的一个充要条件是丢番图方程

$$(1-2L_k+4(-1)^k)x^4+2(1-4(-1)^k)x^2y^2+(1+2L_k+4(-1)^k)y^4=(-1)^n\left(\frac{2F_k}{d}\right)^2, \tag{2}$$

有正整数解,其中 $x^2=(F_{n+k}+\frac{1}{2}F_n)/d$, $y^2=(F_{n+k}-\frac{1}{2}F_n)/d$, $d=\gcd(F_{n+k}+\frac{1}{2}F_n, F_{n+k}-\frac{1}{2}F_n)$.

证明 首先由文献 [3]可知,当 $k>1, n>0$时,若存在以 F_n, F_{n+k}, F_{n+k} 为边长的 Fibonacci三角形,则 $h^2=F_{n+k}^2-\frac{1}{4}F_n^2$. 设 $d=\gcd(F_{n+k}+\frac{1}{2}F_n, F_{n+k}-\frac{1}{2}F_n)$,则有适当的正整数 x, y满足

$$F_{n+k}+\frac{1}{2}F_n=dx^2, F_{n+k}-\frac{1}{2}F_n=dy^2,$$

由此可得

$$F_n=d(x^2-y^2), F_{n+k}=d(x^2+y^2)/2. \tag{3}$$

而 Fibonacci数和 Lucas数满足 $2F_{n+k}=F_nL_k+L_nF_k$[4],结合(3)式有

$$L_n=d[(1-L_k)x^2+(1-L_k)y^2]/F_k, \tag{4}$$

由于 $L_n^2-5F_n^2=4(-1)^n$,将(3)式及(4)式代入立得结论.

(下转第 254页 Continue on page 254)

收稿日期: 2004-09-23
修回日期: 2004-12-28
作者简介: 何 波(1978-),男,四川隆昌人,中学数学教师,业余从事数论研究。
* 四川省教育厅自然科学基金资助项目(2004B025)和四川阿坝师专校级科研资助课题(ASB05-06)联合资助。

校应用数学学报 (A辑), 1999, 14(4): 397-403.

[3] Frideman J. Minimum higher eigenvalues of Laplacians on graphs[J]. Duke Mathmatical Journal, 1996, 83(1): 1-18.

[4] Zhang Xiaodong, Li Jiongsheng. On the largest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph [J]. Acta Mathematicae Applaciae Sinica, 2001, 17(2): 183-190.

[5] Schwenk A J, Wilson R J. On the Eigenvalues of A Graph Selected Topics in Graph Theory [M]. Beineke L W, Wilson R J, dds. New York Academic Press, 1978. 307-336.

[6] 李 乔,冯克勤.论图的最大特征根 [J].应用数学学报, 1979, 2(2): 167-175.

[7] Harary F. Graph Theory[M]. Addison-Wesley: Reading Mass, 1969.

[8] 张晓东,李炯生.树的 Laplacian矩阵的最大和次大特征值 [J].中国科学技术大学学报, 1998, 25(5): 513-518.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 249页 Continue from page 249)

引理 2[5,6] 设 m是大于 2的正整数, $f(X,Y) = a_0X^m + a_1X^{m-1}Y + \cdots + a_mY^m$ 是二元 m次原型, t为非零整数,则方程 $f(x,y) = t$ 仅有有限多组解,且这些解都满足

$$\max(|x|,|y|) < \exp(3^{3(m+9)} m^{18(m+1)} H_f^{2m-2} (\log H_f)^{2m-1} (\log B)), \qquad (5)$$

其中 $H_f = \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_m|$ 称为 $f(X,Y)$的高, $B = \max(e, |t|)$.

引理 3[7] 设 $d = \gcd(F_{n+k} + \frac{1}{2}F_n, F_{n+k} - \frac{1}{2}F_n)$,则 $d | 2F_k$.

2 定理 1的证明

由引理 1,设 $a_0 = 1 - 2L_k + 4(-1)^k$, $a_2 = 2(1 - 4(-1)^k)$, $a_4 = 1 + 2L_k + 4(-1)^k$, $a_1 = a_3 = 0$且 $t = (-1)^n(\frac{2F_k}{d})^2$,则 (2) 式即 $f(x,y) = t$. 由于 $\max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_4|\} = \max\{|a_0|, |a_4|\} \leqslant 2L_k + 5$,容易证明 $k > 5$时 $2L_k + 5 < L_{k+2}$,故 $H_f < L_{k+2}$. 此时由引理 2得

$$\max(|x|,|y|) < \exp(3^{39} 4^{90} L_{k+2}^6 (\log L_{k+2})^7 (\log t)), \qquad (6)$$

由引理 3, $\max(|x|,|y|) = |x|$,且

$$x^2 = (F_{n+k} + \frac{1}{2}F_n)/d \geqslant (F_{n+k} + \frac{1}{2}F_n)/2F_k > \frac{1}{2}T^{-k}, \qquad (7)$$

且

$$|t| = (\frac{2F_k}{d})^2 \leqslant 4F_k^2 < \frac{4}{5}T^{2k}, \qquad (8)$$

其中 $T = (1+\sqrt{5})/2$. 结合 (6)~(8) 式有

$$\frac{1}{2}T^{-k} < \exp(2 \cdot 3^{39} 4^{90} L_{k+2}^6 (\log L_{k+2})^7 (\log t)),$$

得到

$$\ln\frac{1}{2} + (n-k)\ln T < 2 \cdot 3^{39} 4^{90} T^{6k+12} (k+2)^7 \ln^7 T (\ln 0.8 + 2k\ln T), \qquad (9)$$

于是 $n < k \cdot \exp(169.7 + 2.9k + 7\ln(k+2))$.

定理证毕.

参考文献:

[1] Harborth H, Kemnitz A. Fibonacci triangies[J]. Applications of Fibonacci Numbers, 1988, 3: 129-132.

[2] 曹珍富.数论中的问题与结果 [M].哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996. 165-166.

[3] 何 波. Finonacci三角形的一个充要条件及应用 [J].西南民族大学学报 (自然科学版), 2004, 30(3): 277-281.

[4] 柯 召,孙 琦.谈谈不定方程 [M].上海: 上海教育出版社, 1980. 75-76.

[5] Bugeaud Y, Györy K. Bounds for the solutions of Thue-Mahler equntions and norm form equntions[J]. Acta Arith, 1996, 74: 253-292.

[6] 乐茂华. Gel'Fond-Baker方法在丢番图方程中的应用 [M].北京: 科学出版社, 1998. 59-64.

[7] 杨仕椿.关于 Fibonacci三角形和 Lucas三角形的一些结论 [J].广西民族学院学报 (自然科学版), 2002, 11: 1-3, 6.

(责任编辑: 韦廷宗 邓大玉)