DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.001

广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 241~ 245

# 最高阶元素个数为 68$p$的有限群*

# Finite Groups with 68$p$ Elements of Maximal Order

晏燕雄,陈贵云,何立官

Yan Yanxiong, Chen Guiyun, He Liguan

(西南师范大学数学与财经学院,重庆 400715)

(School of Mathematics and Finance, Southwest China Normal University, Chongqing, 400715, China)

摘要: 讨论群的最高阶元素个数为 68$p$的有限群,得到: 如果 $G$是最高阶元素个数为$|M(G)| = 68p$的有限群,其中素数 $p > 7$,则 $G$是可解群.

关键词: 有限群 可解群 元素的阶

中图法分类号: O152.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0241-05

**Abstract** We discuss the finite groups with 68$p$ elements of maximal order, and get a theorem as follows: Suppose $G$ is a finite group with $|M(G)| = 68p$ elements of maximal order, where $p$ is a prime and $p > 7$, then $G$ is solvable.

**Key words** finite groups, solvable groups, the order of elements

设 $G$为有限群. $\pi_e(G)$表示群 $G$中元素阶的集合, $k$是 $\pi_e(G)$中的最大值, $x$表示 $G$中最高阶为 $k$的元素, $n$表示 $G$中 $k$阶循环子群的个数. $l$是一个自然数, $\pi(l)$是 $l$的相异素因子的集合, $\pi(G) = \pi(|G|)$, $M_l(G)$是 $G$的 $l$阶元素的集合. 特别地 $M(G) = M_k(G)$. $\varphi(x)$为 $x$的欧拉函数. 另外, 设 $p$是一个素数, $p^n \| |G|$,表示 $p^n | |G|$,但 $p^{n+1} \nmid |G|$,未说明其余符号及术语见文献 [1].

1987年 Fields奖获得者 J. G. Thompson提出如下著名的猜想:

定义 1 有限群 $G_1$与 $G_2$称为同阶型群,如果 $|M_i(G_1)| = |M_i(G_2)|$, $i = 1, 2, 3, \cdots$

**Thompson**猜想 设 $G_1$与 $G_2$为同阶型群,如果 $G_1$可解,则必然 $G_2$可解.

文献 [2]研究了最高阶元素的个数 $|M(G)|$对群的影响,证明当 $|M(G)|$分别为 $2p$($p$为素数),奇数;小于或等于 4,或 $\varphi(k)$时, $G$为可解群. 文献 [3]证明了当 $|M(G)| = 8$时, $G$可解群. 文献 [4~6]证明了当 $|M(G)| < 20$, $2p^2$($p$为素数),或为 32时,群 $G$可解. 文献 [7]证明了当 $|M(G)| = 2pq$($7 \leqslant p \leqslant q$)时,群 $G$可解. 文献 [8]证明了当 $|M(G)| = 2n$时,其中 $(n, 15) = 1$,群 $G$可解. 本文在此基础上讨论了群 $G$的最高阶元素的个数 68$p$的情况,以下不妨设素数 $p > 7$,我们得到:

定理 1 设 $G$是最高阶元素个数为 68$p$的有限群,其中素数 $p > 7$,则 $G$可解.

## 1 相关引理

引理 1.1 设 $G$有 $n$个 $l$阶循环子群的,则 $|M_l(G)| = n\varphi(l)$,特别地 $|M(G)| = n\varphi(k)$. 而且如果 $n = 1$,则 $G$超可解. 如果 $k$是一个奇素数,则 $n \equiv 1 \pmod k$.

证明 由文献 [1]中的引理 2.2和定理 1.1及文献 [9]中定理 2.1,引理的结论显然得到证明.

引理 1.2[5] 若 $x \in G$, $|x| = k$, $M(G) \subset C_G(x)$,则 $\pi_e(C_G(x)) = \pi_e(\langle x \rangle)$, $C_G(x) = \langle M(G) \rangle$,且 $C_G(x) \trianglelefteq G$.

引理 1.3[10] 设 $G$是 $3'$单 $K_4$-群,则 $G \cong Sz(8)$ $(2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)$,或 $G \cong Sz(32)$ $(2^{10} \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 41)$.

引理 1.4[10] 设 $G$是单 $K_4$-群. 则 $G$同构于下述单群之一:

收稿日期: 2005-04-18

修回日期: 2005-05-23

作者简介: 晏燕雄 (1978-),男,江西九江人,硕士研究生,主要从事有限群研究。

* 国家自然科学基金项目 (10171074)、教育部重点项目和教育部优秀青年教师资助计划联合资助。

(1) $A_7(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$, $A_8(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$, $A_9(2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7)$, $A_{10}(2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7)$;

(2) $M_{11}(2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11)$, $M_{12}(2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11)$, $J_2(2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7)$;

(3) $L_2(16)(2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 17)$, $L_2(25)(2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13)$, $L_2(49)(2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2)$, $L_2(81)(2^4\cdot 3^4\cdot 5\cdot 41)$, $L_3(4)(2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)$, $L_3(5)(2^5\cdot 3\cdot 5^3\cdot 31)$, $L_3(7)(2^5\cdot 3^2\cdot 7^3\cdot 19)$, $L_3(8)(2^9\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 73)$, $L_3(17)(2^9\cdot 3^2\cdot 17^3\cdot 307)$, $L_4(3)(2^7\cdot 3^6\cdot 5\cdot 13)$, $S_4(4)(2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 17)$, $S_4(5)(2^6\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 13)$, $S_4(7)(2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^4)$, $S_4(9)(2^8\cdot 3^8\cdot 5^2\cdot 41)$, $S_6(2)(2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7)$, $O_8^+(2)(2^{12}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7)$, $G_2(3)(2^6\cdot 3^6\cdot 7\cdot 13)$, $U_3(4)(2^6\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13)$, $U_3(5)(2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7)$, $U_3(7)(2^7\cdot 3\cdot 7^3\cdot 43)$, $U_3(8)(2^9\cdot 3^4\cdot 7\cdot 19)$, $U_3(9)(2^5\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 73)$, $U_4(3)(2^7\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7)$, $U_5(2)(2^{10}\cdot 3^5\cdot 5\cdot 11)$, $S_z(8)(2^6\cdot 5\cdot 7\cdot 13)$, $S_z(32)(2^{10}\cdot 5^2\cdot 31\cdot 41)$, ${}^3D_4(2)(2^{12}\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot 13)$, ${}^2F_4(2)'(2^{11}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 13)$.

(4) $L_2(r)$, $r$ 是素数,且满足方程:

$$r^2-1=2^a\cdot 3^b\cdot u^c,$$

其中,$a\geqslant 1$, $b\geqslant 1$, $c\geqslant 1$, $r$和 $u$为素数, $u>3$.

(5) $L_2(2^m)$, $m$ 满足方程:

$$\begin{cases} 2^m-1=u, \\ 2^m+1=3t^b, \end{cases}$$

其中,$m\geqslant 1$, $u,t$ 为素数, $t>3$, $b\geqslant 1$.

(6) $L_2(3^m)$, $m$ 满足方程:

$$\begin{cases} 3^m-1=2u^c, \\ 3^m+1=4t, \end{cases} \text{或} \begin{cases} 3^m-1=2u, \\ 3^m+1=4t^b, \end{cases}$$

其中, $u,t$ 为素数, $b\geqslant 1$, $c\geqslant 1$.

**定义 2** 设 $k=\max\{\pi_e(G)\}$,现将 $G$的所有 $k$阶循环子群按共轭分类,设 $M_1, M_2,\cdots, M_t$ 是全部不同的类.命 $m_i=|G:N_G(\langle x_i\rangle)|$,其中$\langle x_i\rangle\in M_i$, $1\leqslant i\leqslant t$.则 $m_i$的取值与$\langle x_i\rangle$在 $M_i$中的选择无关,而仅与 $M_i$本身有关,称数组$(m_1,m_2,\cdots,m_t)$为 $G$的 $m$-型,并记 $m(G)=(m_1,m_2,\cdots,m_t)$.

**引理 1.5** 设 $G$有 $m$-型$(m_1,m_2,\cdots,m_t)$,如果它满足下面的条件,则此时对应的有限群群 $G$不存在:存在素数 $q$,正整数 $S_1$和 $n$,使得

$$|G|=S_1\cdot m_1, m_1+m_2+\cdots+m_t=n,$$

对于某个 $m_i$, $q|m_i$,但 $q\nmid S_1\times n\times\varphi(k)$,其中 $\varphi(k)$是 $k$的 Euler函数,且 $k=\max\{\pi_e(G)\}$.

证明 反证法 假设存在这样的有限群 $G$满足题设的条件.不妨设 $q|m_1$, $q\nmid n$,则必存在 $m_j$,记为 $m_2$,使得 $q\nmid m_2$.设 $x_i$是 $G$的最高阶为 $k$的元素,并且它属于共轭类长为 $m_i$的共轭类 $M_i$,其中 $1\leqslant i\leqslant n$.下面式子总是成立的:

$$G=m_1\cdot|N_G(\langle x_1\rangle):C_G(x_1)||C_G(x_1)|=m_2\cdot|N_G(\langle x_2\rangle):C_G(x_2)||C_G(x_2)|.$$

因为 $q\nmid S_1$,则 $q\nmid|C_G(x_1)|$.根据假设 $q\nmid m_2$, $q\nmid\varphi(k)$,从而有 $q||C_G(x_1)|$,但是 $\pi(C_G(x_1))=\pi(C_G(x_2))$,因此 $q||C_G(x_1)|$,矛盾.

根据引理 1.5,即得下面的推论:

**推论 1** 设有限群 $G$满足引理 1.5的条件,且 $k=\max\{\pi_e(G)\}$.如果 $\pi(n)\subseteq\{2,r\}$, $r$是奇素数, $\pi(k)\subseteq\{2,3,q\}$,且 $\pi(\varphi(k))=\{2,p\}$,其中 $p$和 $q$都是素数.则 $G$或者是$\{2,3,p,q\}$-群,或者是$\{2,3,p,q,r\}$-群.特别地,若 $\pi(n)=\{r\}$,则结论仍然成立.

**引理 1.6** 设 $G$是单 $K_3$-群,则 $G$是同构于下述群之一:
$A_5(2^2\cdot 3\cdot 5)$, $A_6(2^3\cdot 3^2\cdot 5)$, $L_2(7)(2^3\cdot 3\cdot 7)$, $L_2(8)(2^3\cdot 3^2\cdot 7)$, $L_2(17)(2^4\cdot 3^2\cdot 17)$, $L_3(3)(2^4\cdot 3^3\cdot 13)$, $U_3(3)(2^5\cdot 3^3\cdot 7)$, $U_4(2)(2^6\cdot 3^4\cdot 5)$.

**推论 2** 设 $G$是 $K_3$-群,则 $G$可解,如果 $\pi(G)$非下述集合之一: $\{2,3,5\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,3,13\}$及$\{2,3,17\}$.

证明 由引理 1.6直接可得推论 2.

## 2 定理 1的证明

本文中 $k=\max\{\pi_e(G)\}$, $x$表示 $G$的阶为 $k$的元素,则有 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\,|\,\varphi(k)$. $n$是 $G$中 $k$阶循环子群的个数,定理 1中的素数 $p>7$.而且下面的等式总是成立的:

$$|G|=|G:N_G(\langle x\rangle)||N_G(\langle x\rangle):C_G(x)||C_G(x)|, \quad (*)$$

因为 $n\varphi(k)=68p$,表 1为根据引理 1.1,得到的 $n$, $\varphi(k)$和 $k$三者之间的关系.

表 1 $n$, $\varphi(k)$和 $k$的关系

Table 1 Relations of $n$, $\varphi(k)$ and $k$

| $n$ | $\varphi(k)$ | $k$ |
|---|---|---|
| 1 | $68p$ | $k$ |
| 2 | $34p$<br>$q$或 $2q$ | $q=34p+1$ |
| 17 | $4p$<br>(1) $3q, 4q, 6q$ | $q=2p+1$<br>(2) $q, 2q$<br>$q=4p+1$ |
| 34 | $2p$<br>$q$或 $2q$ | $q=2p+1$ |
| $17p$ | 4 | 5, 8<br>10, 12 |
| $34p$ | 2 | 3<br>4<br>6 |
| $68p$ | 1 | 2 |

定理 1的证明过程分散 7个主要的引理当中,7个引理得到证明后,从而定理 1的结论自然成立.

引理 **2.1** 若 $|M(G)| = 68p, n = 1$,则 $G$超可解.

证明 根据引理 1.1,结论是显然的.

引理 **2.2** 若 $|M(G)| = 68p, n = 2$,则 $G$可解.

证明 此时由表 1可知,$k = q$或 $k = 2q$,其中素数 $p > 7$且 $q = 34p + 1$是素数.由引理 1.1易知 $k \neq q$.设 $x$是 $G$的最高阶为 $k$的元素.若 $k = 2q$,则 $C_G(x)$是$\{2,q\}$-群,故可解,并且有 $\varphi(k) = 34p$,因此 $|N_G(\langle x\rangle) : C_G(x)| \mid 34p$,而且有 $\pi(N_G(\langle x\rangle)) \subseteq \{2, 17, p, q\}$.令$\{r,s,t\} \subset \{2, 17, p, q\}$,因素数 $p > 7$,于是由推论 2知$\{2, 17, p, q\}$-群的任何一个$\{r,s,t\}$-子群不可能与某一单 $K_3$-群同构,同时,$\{2, 17, p, q\}$-群是 $3'K_4$-群,因为 $5 \nmid |G|$,由引理 1.3,则$\{2, 17, p, q\}$-可解.特别地 $N_G(\langle x\rangle)/C_G(x)$可解,进一步有 $N_G(\langle x\rangle)$可解.因 $|G : N_G(\langle x\rangle)| \leqslant 2$,则 $N_G(\langle x\rangle) \trianglelefteq G$,而且 $G/N_G(\langle x\rangle)$可解,进一步易知 $G$亦可解.

引理 **2.3** 若 $|M(G)| = 68p, n = 17$,则 $G$可解.

证明 根据表 1,此时 $\varphi(k) = 4p$,其中素数 $p > 7$.由于 $x$表示 $G$的一个最高阶为 $k$的元素,从而 $|N_G(\langle x\rangle) : C_G(x)| \mid 4p$,而且 $k$的取值为下面的情况之一:

(a) $k = q$或 $2q$,其中 $q = 4p + 1$是素数;

(b) $k = 3q, 4q$或 $6q$,其中 $q = 2p + 1$是素数.

下面再根据 $k$的不同取值继续进行讨论:

(I) 若 $k = q$或 $2q$,其中 $q = 4p + 1$是素数,则 $C_G(x)$是$\{2,q\}$-群,且有 $|N_G(\langle x\rangle) : C_G(x)| \mid 4p$.因为 $n = 17$是素数,于是根据推论 1及(*)式,则 $G$是$\{2, p, q\}$-群或$\{2, 17, p, q\}$-群.

若 $G$是$\{2, p, q\}$-群,因素数 $p > 7$,且 $q = 4p + 1$是素数,于是由推论 2知 $G$可解.

若 $G$是$\{2, 17, p, q\}$-群,则 $G$是 $3'K_4$-群,由于 $5 \notin \pi(G)$,由引理 1.3可知 $G$此时也可解.

(II) 现在我们讨论 $k$的取值为 $k = 3q, 4q$或 $6q$的情形,其中 $q = 2p + 1$是素数,分以下 3种情况讨论:

(1) 若 $k = 4q$,其中 $q = 2p + 1$为素数,则 $C_G(x)$是$\{2,q\}$-群.类似于上一步,由推论 1知此时 $G$是$\{2, p, q\}$-群或$\{2, 17, p, q\}$-群.同样地,由前面一步的证明,可知 $G$可解.

(2) 若 $k = 3q$,其中 $q = 2p + 1$是素数,则 $C_G(x)$是$\{3,q\}$-群.现假设 $|C_G(x)| = 3^u \cdot q^v$,且 $C_G(x)$中没有 $3^2$或 $q^2$阶元素.如果 $u \geqslant 4$,则 $C_G(x)$中至少有$(3^4 - 1)(q - 1) = 160p$个 $3q$阶元素,与题设 $|M(G)| = 68p$矛盾,故 $u \leqslant 3$.如果 $v \geqslant 2$,通过完全相同的推理可知 $C_G(x)$中至少有 $8p^2 + 8p$个 $3q$阶元素,因为素数 $p > 7$,显然 $8p^2 + 8p > 68p$,矛盾.故 $v = 1$,从而 $|C_G(x)| = 3^u \cdot q$,其中 $u \leqslant 3$.因为 $\pi(\varphi(k)) = \{2,p\}$及 $n = 17$是素数,于是根据推论 1及(*)式,则 $G$是$\{2, 3, p, q\}$-群或$\{2, 3, 17, p, q\}$-群.

设 $Q$是 $C_G(x)$的 $q$-Sylow子群,容易看到 $Q \operatorname{char} C_G(x) \trianglelefteq N_G(\langle x\rangle)$,即 $Q \trianglelefteq N_G(\langle x\rangle)$,也即 $N_G(\langle x\rangle) \leqslant N_G(Q)$.因为 $|G : N_G(\langle x\rangle)| = |G : N_G(Q)||N_G(Q) : N_G(\langle x\rangle)|$,且 $|G : N_G(\langle x\rangle)| \leqslant 17$.于是由 Sylow定理,则有 $|G : N_G(Q)| = 1$,故 $Q \trianglelefteq G$.

若 $G$是$\{2, 3, p, q\}$-群,则 $G/Q$是$\{2, 3, p\}$-群,因为素数 $p > 7$,且 $q = 2p + 1$是素数,则 $p = 11$或 $p \geqslant 19$.由推论 2,可知 $G/Q$可解,进一步 $G$可解.

若 $G$是$\{2, 3, 17, p, q\}$-群,则 $G/Q$是$\{2, 3, 17, p\}$-群.由(*)式,我们可以假设 $|G/Q| = 2^{\alpha} \cdot 3^u \cdot 17 \cdot p^{\beta}$,其中 $\alpha \leqslant 2, u \leqslant 3$及 $\beta \leqslant 1$.命 $\overline{G} = G/Q$,若 $\alpha = 1$,则 $\overline{G}$显然可解,进一步得出 $G$可解.下面不妨设 $\alpha = 2$.

若 $\beta = 0$,则 $|\overline{G}| = 2^2 \cdot 3^u \cdot 17$,其中 $u \leqslant 3$.由引理 1.6,易知 $\overline{G}$可解,从而 $G$可解.若 $\beta = 1$,则 $|\overline{G}| = 2^2 \cdot 3^u \cdot 17 \cdot p$,其中 $u \leqslant 3$.下面我们只需证明 $\overline{G}$可解.

根据上面的分析可以知道 $\overline{G}$的任何一个截断都不可能与某一单 $K_3$-群同构,如果 $\overline{G}$不可解,因 $\overline{G}$是 $K_4$-群,则 $\overline{G}$必存在一个截断,仍然记为 $\overline{W}/\overline{S}$,同构于某单 $K_4$-群.由(*)式,设 $|\overline{W}/\overline{S}| = 2^2 \cdot 3^t \cdot 17 \cdot p$,其中 $t \leqslant u \leqslant 3$.根据引理 1.4可知道 $\overline{W}/\overline{S}$只能同构于下述单 $K_4$-群之一:

(a) 若 $\overline{W}/\overline{S} \cong L_2(r)$,$r$是素数,且满足方程:

$$r^2 - 1 = 2^a \cdot 3^b \cdot v^c,$$

其中,$a \geqslant 1, b \geqslant 1, c \geqslant 1$,素数 $v > 3$.因为 $|L_2(r)| = r(r^2 - 1)/(2, r - 1)$,比较 $L_2(r)$和 $\overline{W}/\overline{S}$的阶易知,$r \neq 17, a \leqslant 2, b \leqslant 3, c = 1$.因此 $v = 17, r = p$.分别代入 $a, b$的所有各种正整数的取值,简单的计算易知,这样的素数 $p$是不存在的.因此 $\overline{W}/\overline{S} \ncong L_2(r)$.

(b) 若 $\overline{W}/\overline{S} \cong L_2(2^m)$,且 $m$满足方程:

$$\begin{cases} 2^m - 1 = v, \\ 2^m + 1 = 3t^b, \end{cases}$$

其中,$v, t$,是素数,$t > 3, b \geqslant 1$.通过比较 $L_2(2^m)$和 $\overline{W}/\overline{S}$的阶,我们有 $m = 2$,则 $3 \cdot t^b = 5$,显然这时方程组无解.于是 $\overline{W}/\overline{S} \ncong L_2(2^m)$.

(c) 若 $\overline{W}/\overline{S}\cong L_2(3^m)$, $m$ 下列方程组之一:

$$\begin{cases}3^m-1=2v^c,\\ 3^m+1=4t,\end{cases}\quad 或 \quad\begin{cases}3^m-1=2v,\\ 3^m+1=4t^b,\end{cases}$$

其中, $v,t$ 是素数, $b\geqslant 1$, $c\geqslant 1$. 用完全类似于(a)的方法, 易验证上述的两个方程组均无解, 因此 $\overline{W}/\overline{S}\ncong L_2(3^m)$. 至此我们已经证明了在(2)的条件下, $\overline{G}$ 是可解的, 从而 $G$ 可解.

(3) 若 $k=6q$, 其中素数 $p>7$, $q=2p+1$ 是素数, 则 $C_G(x)$ 是 $\{2,3,q\}$-群. 现假设 $|C_G(x)|=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot q^{\gamma}$, 类似于(2)的推理方法, 可以证明 $\alpha\leqslant 4$, $\beta\leqslant 3$, $\gamma=1$. 因此 $|C_G(x)|=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot q$, 其中 $\alpha\leqslant 4$, $\beta\leqslant 3$.

设 $Q$ 是 $C_G(x)$ 的 $q$-Sylow 子群, 则断言 $Q\trianglelefteq G$. 先证明 $Q\trianglelefteq C_G(x)$. 若否, 则 $C_G(x)$ 中至少含有 $q+1=2p+2$ 个 Sylow-$q$ 子群. 因为 $Q\trianglelefteq Z(C_G(x))$, 素数 $p>7$, 故 $C_G(x)$ 中至少有 $2\cdot(2p+2)\cdot(q-1)=8p^2+8p$ 个 $6q$ 阶元素, 显然 $8p^2+8p>68p$, 矛盾. 于是 $Q\trianglelefteq C_G(x)$, 又 $C_G(x)\trianglelefteq N_G(\langle x\rangle)$, 因而 $Q\trianglelefteq N_G(\langle x\rangle)$, 也即 $N_G(\langle x\rangle)\leqslant N_G(Q)$. 由于 $|G:N_G(\langle x\rangle)|=|G:N_G(Q)|\,|N_G(Q):N_G(\langle x\rangle)|$, 及 $|G:N_G(\langle x\rangle)|\leqslant 17$, 根据 Sylow 定理, 则有 $|G:N_G(Q)|=1$, 从而断言成立.

因为 $C_G(x)$ 是 $\{2,3,q\}$-群, $\varphi(k)=4p$ 及 $n=17$ 是素数, 于是根据推论 1 及(*)式, 则 $G$ 是 $\{2,3,p,q\}$-群或 $\{2,3,17,p,q\}$-群. 由于 $Q\trianglelefteq G$.

若 $G$ 是 $\{2,3,p,q\}$-群, 则 $G/Q$ 是 $\{2,3,p\}$-群, 类似于(2)前面部分的证明可知 $G/Q$ 可解, 从而 $G$ 可解.

若 $G$ 是 $\{2,3,17,p,q\}$-群, 则 $G/Q$ 是 $\{2,3,17,p\}$-群. 由(*)式, 现假设 $|G/Q|=2^{\alpha}\cdot 2^m\cdot 3^{\beta}\cdot p^{\gamma}\cdot 17$, 其中 $\alpha\leqslant 4$, $m\leqslant 2$, $\beta\leqslant 3$, $\gamma\leqslant 1$. 令 $\lambda=\alpha+m$, 则 $\lambda\leqslant 6$, $|\overline{G}|=|G/Q|=2^{\lambda}\cdot 3^{\beta}\cdot 17\cdot p^{\gamma}$, 其中 $\lambda\leqslant 6$, $\beta\leqslant 3$, $\gamma\leqslant 1$. 下面分 $\gamma=0$ 和 $\gamma=1$ 两种情况分别来证明 $\overline{G}$ 可解.

若 $\beta=3$, $\gamma=0$, 则 $\alpha\leqslant 2$, 因此 $\lambda\leqslant 4$, 故 $|\overline{G}|=|G/Q|=2^{\lambda}\cdot 3^3\cdot 17$, 其中 $\lambda\leqslant 4$. 如果 $\overline{G}$ 不可解, 则必有 $\overline{G}$ 的一个截断, 记为 $\overline{K}/\overline{H}$, 使得 $\overline{K}/\overline{H}\cong L_2(17)$, 但 $L_2(17)$ 中有 9 阶元素, 而 $\overline{G}$ 中没有 9 阶元素, 矛盾. 因此 $G$ 可解.

若 $\beta=2$, $\gamma=0$, 则 $\alpha\leqslant 3$, 因此 $\lambda\leqslant 5$, 故 $|\overline{G}|=|G/Q|=2^{\lambda}\cdot 3^2\cdot 17$, 其中 $\lambda\leqslant 5$. 如果 $\overline{G}$ 不可解, 类似于上一步的方法, 易推出同样的矛盾.

若 $\beta=1$, $\gamma=0$, 则 $\alpha\leqslant 4$, 因此 $\lambda\leqslant 6$, 故 $|\overline{G}|=|G/Q|=2^{\lambda}\cdot 3^2\cdot 17$, 其中 $\lambda\leqslant 6$. 此时由引理 1.6, 可知 $\overline{G}$ 可解.

若 $\gamma=1$, 则 $|\overline{G}|=|G/Q|=2^{\lambda}\cdot 3^{\beta}\cdot 17\cdot p$, 其中 $\lambda\leqslant 6$, $\beta\leqslant 3$. 根据上面的分析, 我们可以知道 $\overline{G}$ 的任何一个截断都不可能与某一单 $K_3$-群同构, 如果 $\overline{G}$ 不可解, 因 $\overline{G}$ 是 $K_4$-群, 则 $\overline{G}$ 必存在一个截断, 仍记为 $\overline{W}/\overline{S}$, 同构于某单 $K_4$-群. 不妨设 $|\overline{W}/\overline{S}|=2^{m_1}\cdot 3^{m_2}\cdot 17\cdot p$, 其中 $2\leqslant m_1\leqslant\lambda\leqslant 6$, $m_2\leqslant\beta\leqslant 3$, 根据引理 1.4, 我们知道 $\overline{W}/\overline{S}$ 只能同构于下述单 $K_4$-群之一:

(a) 若 $\overline{W}/\overline{S}\cong L_2(r)$, $r$ 是素数, 且满足方程:
$r^2-1=2^a\cdot 3^b\cdot u^c$,
其中, $a\geqslant 1$, $b\geqslant 1$, $c\geqslant 1$, 素数 $u>3$.

比较 $\overline{W}/\overline{S}$ 和 $L_2(r)$ 的阶, 则有 $u=17$, $c=1$, 并且有 $a\leqslant 7$, $b\leqslant 3$. 于是 $r^2-1=p^2-1=2^a\cdot 3^b\cdot 17$. 通过简单的计算易知, 对于所有满足条件 $2\leqslant a\leqslant 7$, $b\leqslant 3$ 的正整数 $a$ 和 $b$, 此方程均无解, 因此 $\overline{W}/\overline{S}\ncong L_2(r)$.

(b) 若 $\overline{W}/\overline{S}\cong L_2(2^m)$, $m$ 满足方程组:

$$\begin{cases}2^m-1=u_1,\\ 2^m+1=3t^b,\end{cases}$$

其中, $u_1,t$ 是素数, 且 $t>3$, $b\geqslant 1$.

因为 $|L_2(2^m)|=2^m\cdot(2^m+1)\cdot(2^m-1)$, 与 $\overline{W}/\overline{S}$ 阶相比较, 易知 $u_1\neq 17$, 因此 $t=17$, $b=1$. 代入上述方程组则有 $2^m+1=3\cdot 17$ 的解, 也即 $2^m=50$, 显然这是不可能的, 从而 $\overline{W}/\overline{S}\ncong L_2(2^m)$.

(c) 若 $\overline{W}/\overline{S}\cong L_2(3^m)$, $m$ 满足引理 1.4 方程组(6).

若 $m$ 满足方程组:

$$\begin{cases}3^m-1=2u^c,\\ 3^m+1=4t,\end{cases}$$

因为 $|L_2(3^m)|=3^m(3^m+1)(3^m-1)/(2,3^m-1)$, 把它与 $\overline{W}/\overline{S}$ 的阶相比较, 易知 $u\neq 17$, $c=1$. 因此 $t=17$, 代入上述方程组则有 $3^m+1=68$, 也即 $3^m=67$, 这是不可能的.

若 $m$ 满足方程组:

$$\begin{cases}3^m-1=2u_2,\\ 3^m+1=4t^b,\end{cases}$$

其中, $u_2,t$ 是素数, 且 $b\geqslant 1$, $c\geqslant 1$, 类似于前一步的方法, 我们可以证明此时方程组也无解, 因此 $\overline{W}/\overline{S}\ncong L_2(3^m)$. 这样就证明了 $\overline{G}$ 可解.

**引理 2.4** 若 $|M(G)|=68p$, $n=34$, 则 $G$ 可解.

证明 因为 $x$ 是 $G$ 的最高阶为 $k$ 的元素, 根据表 1 则有 $k=q$ 或 $2q$, 其中 $q=2p+1$ 素数, 及 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\,\big|\,\varphi(k)$, 并且有 $\varphi(k)=2p$, 素数 $p>7$. 由引理 1.6 易知 $k\neq q$, 因而下面只需讨论 $k=2q$

的情形.

因为 $k=2q$,则 $C_G(x)$ 是 $\{2,q\}$-群.由于 $\varphi(k)=2p$,及 $\pi(n)=\{2,17\}$,因此根据推论 1及(*)式,则 $G$是 $\{2,p,q\}$-群或 $\{2,17,p,q\}$-群.

若 $G$是 $\{2,p,q\}$-群,由于素数 $p>7$,且 $q=2p+1$素数,于是由推论 2易知 $G$可解

若 $G$是 $\{2,17,p,q\}$-群,则 $G$是 $3'K_4$-群,且因 $5\nmid |G|$,由引理 1.3,从而 $G$可解.

引理 **2.5** 若 $|M(G)|=68p$, $n=17p$,则 $G$可解.

证明 由于 $x$是 $G$的最高阶为 $k$的元素,根据表 1,此时 $k=5,8,10,12$,且 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\mid\varphi(k)$,其中 $\varphi(k)=4$.

若 $k=5,8,10$,则 $C_G(x)$ 是 2-群或 $\{2,5\}$-群,因为素数 $p>7$,则 $p\nmid|G|$ 且 $17\nmid|G|$.从而由推论 1及(*)式,则 $G$是 2-群或 $\{2,5\}$-群,于是 $G$可解.

若 $k=12$,则 $17\nmid|G|$.类似地我们有 $G$是 $\{2,3\}$-群或 $\{2,3,p\}$-群.由于 $k=12$,而且素数 $p>7$,则有 $p=11$或 $p\geqslant 17$.又单 $k_3$-群不含有素因子 11,从而可知 $G$可解.

引理 **2.6** 若 $|M(G)|=68p$, $n=34p$,则 $G$可解.

证明 根据表 1,我们有 $k=3,4,6$,及 $|N_G(\langle x\rangle):C_G(x)|\mid\varphi(k)$,其中 $\varphi(k)=2$.由 $x$是 $G$的最高阶为 $k$的元素 $G$,则 $C_G(x)$ 是 2-群或 $\{2,3\}$-群,考虑到 $k\leqslant 6$,因为素数 $p>7$,于是类似于引理 2.5的推理方法,易知 $G$是 2-群或 $\{2,3\}$-群,因而 $G$可解.

引理 **2.7** 若 $|M(G)|=68p$,则 $n\neq 68p$.

证明 假设 $|M(G)|=68p$, $n=68p$,则 $k=2$,因此 $G$是初等交换 2-群.令 $|G|=2^u$, $u$是某正整数.则 $G$中最高阶为 2的元素个数为 $2^u-1$,显然不可能为 $68p$,矛盾.

由定理 1,我们即可得 Thompson猜想成立的一个条件,即:

推论 **3** 设 $G$与 $M$是同阶型群,如果 $G$是最高阶元素个数 $68p$的有限群,其中素数 $p>7$.则 $M$可解.

参考文献:


[1] Herzog M. On finite simple groups of order divisible by there primes only[J]. J Algebra, 1968, 10: 383-388.

[2] 杨 成.最高阶元素个数不同的有限群[J].数学年刊, 1993, 14A(5): 561-576.

[3] 刘奉举.最高阶元素个数为 8的有限群[J].河北大学学报(自然科学版), 1996, 16(3): 57-59.

[4] 姜友谊.最高阶元素个数小于 20的有限群是可解群[J].西南师范大学学报(自然科学版), 1998, 23(4): 379-384.

[5] 姜友谊.最高阶元素个数为 $2p^2$的有限群是可解群[J].数学年刊, 2000, 21A(1): 61-64.

[6] 姜友谊.最高阶元素个数为 32的有限群是可解群[J].河北大学学报(自然科学版), 1999, 19(3): 215-219.

[7] 韩章家,陈贵云.最高阶元素个数为 $2pq$的有限群可解[J].西南师范大学学报(自然科学版), 2004, 29(2): 198-200.

[8] 何承春.最高阶元的个数为 $2m$ 的有限群,其中 $(2,m)=1$[D].重庆:西南师范大学, 2004.

[9] 徐明曜.有限群导引[M].北京:科学出版社, 1999.

[10] Shi W J. On simple $K_4$-groups[J]. Chinese Sci Bull(in Chinese), 1991, 36(7): 1281.

[11] Brandl, Shi Wujie. Finite groups whose elements order are consecutive integers[J]. J Alg, 1991, 143(2): 388-400.

[12] 杨 成. $\pi_e(G)=\{1,2,3,5,6\}$的有限群[J].工程数学学报, 2000, 17(1): 105-108.

[13] Conway J H, Curtis R T, Norton S P, et al. ATLAS of Finite Groups[M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.


(责任编辑:黎贞崇)

## 骨髓干细胞刺激其他干细胞分化

美国杜兰大学教授达尔文·普洛科普等研究人员将人体骨髓干细胞移植到实验鼠的大脑海马区的齿状回里,结果发现,实验鼠大脑海马区的新生神经元细胞在移植手术 7天后明显增加;在移植后 30天,不仅神经元细胞继续增长,而且负责神经元细胞之间通信联系的星形胶质细胞也明显增加。这些细胞都是实验鼠自身的神经元干细胞分化而来的。研究人员认为,移植的人体骨髓干细胞刺激了实验鼠自身神经元干细胞的增殖、迁徙和分化。出现这种情况的原因可能是骨髓干细胞分泌的多种诱导因子刺激了实验鼠的神经元干细胞,也有可能是骨髓干细胞分泌的生长因子刺激了实验鼠大脑中原有的星形胶质细胞,而星形胶质细胞又促进神经元细胞的生长。

这一成果表明骨髓干细胞有刺激其他干细胞分化生长的能力,这一发现对发展应用干细胞的再生疗法可能有重要意义。

(据科学网)