DOI :10. 13656/j. cnki. gxkx. 2005. 03. 006
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(3): 174～176

动力系统中的回复运动
Recurrence Motion in Dynamical System

李 刚
Li Gang

(山东科技大学数学系,山东青岛 266510)
(Deparment of Mathematics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong, 266510, China)

摘要: 讨论动力系统中 Poisson 稳定运动及 Lyapunov 稳定性的性质及它们之间的关系, 得到有关 Posison 稳定运动的结果, 在一定程度上推广了文献[3] 的结论.
关键词: Poisson 稳定运动 Lyapunov 稳定性 极限集 一阶延伸极限集
中图法分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)03-0174-03
Abstract: The main purpose of this paper is to discuss the relationship between Poisson stability and Lyapunov stability in dynamical systems and their properties, and to get some results of Poisson stability which in some extent generalizes the results of reference[3].
Key words: Poisson stability, Lyapunov stability, limit set, prolongational limit set

S. Elaydi 和 H. R. Farran 在文献[1] 中引进了 Riemann 流形上的 Lipschitz 稳定动力系统的概念, Chin-Ku Chu 等人在文献[2] 中引进了度量空间中的动力系统在一个点的 Lyapunov 稳定性的概念. 我们熟知, Poisson 稳定运动在动力系统稳定性理论中占有相当重要的地位, 这方面已有不少研究工作[3~5], 本文主要研究动力系统中的 Lyapunov 稳定性和 Poisson 稳定运动之间的关系.

拓扑空间 X 上的一个动力系统(X,π)是一个连续映射 $\pi: X\times R\to X$ 使得

(1)$\pi(x,0)=x$, 对每一个 $\pi(x,0)=x$,

(2)$\pi(\pi(x,s),t)=\pi(x,s+t)$, 对 $x\in X$, $s,t\in R$,

本文设X为一般的度量空间, 以 xt 简记$\pi(x,t)$. 若$M\subset X$, $A\subset R$, 我们记$MA=\{xt: x\in M, t\in A\}$. 若 $M=\{x\}$ 或 $A=\{t\}$, 则用 xA 和Mt 简记$\{x\}A$ 和 $M\{t\}$. $\gamma^+(x)=xR^+$、$\gamma^-(x)=xR^-$ 和 $\gamma(x)=xR$ 分别表示过点 $x\in X$ 的正半轨道、负半轨道和轨道. 对 $A\subset X$, $\bar{A}$、∂A 和 $IntA$ 分别表示A 的闭包、边界和内部. 对 $x\in X$, 记$\overline{\gamma^+(x)}$、$\overline{\gamma(x)}$、$\overline{\gamma^-(x)}$ 分别表示过点 $x\in X$ 的正半轨道闭包、轨道闭包和负半轨道的闭包. $\omega(x)$ 和 $\alpha(x)$ 分别表示点 x 的正向和负向极限集; $J^+(x)$, $J^-(x)$ 分别表示点 x 的正向和负向延伸极限集, 其分别定义为 $\omega(x)=\{y\in X$: 存在$\{t_n\}\subset R^+$, $t_n\to\infty$和 $xt_n\to y\}$, $\alpha(x)=\{y\in X$: 存在$\{t_n\}\subset R^-$, $t_n\to-\infty$ 和 $xt_n\to y\}$; $J^+(x)=\{y\in X$: 存在$\{x_n\}\subset X$, $\{t_n\}\subset R^+$, 使 $x_n\to x$, $t_n\to\infty$ 和 $x_nt_n\to y\}$, $J^-(x)=\{y\in X$: 存在$\{x_n\}\subset X$, $\{t_n\}\subset R^+$, 使 $x_n\to x$, $t_n\to\infty$和 $x_nt_n\to y\}$.

介绍本文用到的几个定义如下.

定义 1 如果 $x\in J^+(x)$, 则称点 x 为非游荡的. 我们知道, $x\in J^+(x)\Leftrightarrow x\in J^-(x)$.

定义 2 集合 $A\subset X$ 称为关于集合 $B\subset X$ 是正向回复的当且仅当每一个 $T\in R$ 存在一个 $t>T$ 和一个 $x\in B$, 使得 $xt\in A$. 用不等式 $t<T$ 可以定义负向回复. 当集合 A 是关于自身正向回复时, 称集合 A 是自身正向回复的.

例如, 设单点集为$\{x\}$, 如果 x 是一个周期点, 则$\{x\}$ 是自身回复集合.

定义 3 若点 $x\in X$ 的每一个邻域关于$\{x\}$ 是正向回复的, 则称点 x 为正向 Poisson 稳定的, 负向的情况我们可类似定义. $x\in\omega(x)(x\in\alpha(x))\Leftrightarrow$点 x 是正(负)向 Poisson 稳定的; $x\in\omega(x)\cap\alpha(x)\Leftrightarrow$点 x 是 Poisson 稳定的.

收稿日期: 2004-10-25
修回日期: 2005-01-10
作者简介: 李 刚(1978-), 男, 山东潍坊人, 助教, 主要从事动力系统研究。

引理1[3] 设X是任意的度量空间和$x\in X$,则

(1) 对每一个$t\in R$, $J^{+}(x)=J^{+}(x)t=J^{+}(xt)$,

(2) 对每一个$t\in R$, $\omega(x)=\omega(x)t=\omega(xt)$.

定义4 如果对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$d(x,y)<\delta$时,对于$t\in R^{+}(R)$,有$d(xt,yt)<\varepsilon$,则称动力系统在点x处为(正)Lyapunov稳定的.

引理2 设动力系统(X,π)在点x是正Lyapunov稳定的,则$\omega(x)=J^{+}(x)$.

证明 设$y\in J^{+}(x)$,则存在点列$\{x_n\}\subset X$, $x_n\to x$,数列$\{t_n\}\subset R^{+}$, $t_n\to\infty$,使得$x_nt_n\to y$. 由点x的正Lyapunov稳定性可知,对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$d(x,y)<\delta$时,对于$t\in R^{+}$,有$d(xt,yt)<\varepsilon$,对于上述$\delta>0$,存在N,当$n>N$时,$d(x_n,x)<\delta$,故$d(x_nt_n,xt_n)<\varepsilon$, $n>N$,从而有$d(xt_n,y)\leqslant d(x_nt_n,xt_n)+d(x_nt_n,y)\to 0$,即$y\in\omega(x)$.

类似的,如果动力系统(X,π)在点x是负Lyapunov稳定的,则$\alpha(x)=J^{-}(x)$.

定理1 如果X是局部紧的Hausdorff空间,设$x\in X$是正向Poisson稳定的,且它不是一个周期点. 则集合$\omega(x)-\gamma(x)$在$\omega(x)$内是稠密的,即$\overline{\omega(x)-\gamma(x)}=\omega(x)=\overline{\gamma(x)}$.

证明 由于$x\in X$是正向Poisson稳定的,我们得到$\omega(x)=\overline{\gamma(x)}$, $\overline{\omega(x)-\gamma(x)}=\omega(x)$. 只要证明如果$y\in\gamma(x)$和$y\in V$,其中$V$为$y$的任意小的开邻域,但满足$V\subset U$, U是y的一紧致邻域U(因为X是局部紧的Hausdorff空间),则存在$z\in\omega(x)-\gamma(x)$,使得$z\in V$,为了证明这一点,注意到由于$y\in\omega(x)=\omega(y)$,则存在单调递增数列$\{t_n\}$, $t_n\to\infty$,使得$yt_n\to y$,选取$\tau_1>t_1$,使得$y\tau_1\in V$,而且$y\tau_1\notin y[-t_1,t_1]$,因此,由$X$是局部紧的Hausdorff空间,则有开集$V_1$使得$y\tau_1\in V_1\subset V$, $V_1\cap y[-t_1,t_1]=\varnothing$,假设我们已经定义了$y\tau_{n-1}$和$V_{n-1}$,选取$\tau_n>t_n$,使得$y\tau_n\in V_{n-1}$,因为$y\tau_n\notin y[-t_n,t_n]$,(这是因为$x\in X$是正向Poisson稳定的),又由于$X$是局部紧的Hausdorff空间,我们得到$y\tau_n\in V_n\subset V_{n-1}$, $V_n\cap y[-t_n,t_n]=\varnothing$.序列$\{y\tau_n\}$有这样的性质$y\tau_n\in V_n$,因为$U\supset V_1\supset V_2\supset\Lambda\supset V_{n-1}\supset V_n\supset\Lambda$,并且$X$是局部紧的Hausdorff空间,$U$为紧致的,则$\{y\tau_n\}$存在收敛子列,我们仍记为$\{y\tau_n\}$,存在$z$,使得$y\tau_n\to z$,因为$y\tau_n\in\gamma(x)$, $\tau_n\to\infty$,则$z\in\omega(x)$,而且$z,y\in V$, z在每一个V_n内,另外,我们注意到$z\notin\gamma(x)$,否则,由$z\in\gamma(x)=\gamma(x)$,则存在τ,使得$y=z\tau$,但是存在一个n,使得$t_n>|\tau|$,因此,$z\in y[-t_n,t_n]$,然而$z\in V_n$, $V_n\cap y[-t_n,t_n]=\varnothing$,即$z\notin y[-t_n,t_n]$,此为矛盾,故$z\notin\gamma(x)$. 定理证毕.

定理2 如果X是局部紧的Hausdorff空间,则$\gamma(x)$为周期的$\Leftrightarrow\gamma(x)=\omega(x)$.

证明 先看充分性,如果x不为周期的,由上述定理可知,$\overline{\omega(x)-\gamma(x)}=\overline{\gamma(x)}\neq\varnothing$,而由条件可知,$\gamma(x)=\omega(x)$,故$\overline{\omega(x)-\gamma(x)}=\varnothing$,此为矛盾,故$\gamma(x)$为周期的,反过来,如果$\gamma(x)$为周期的,易证$\gamma^{+}(x)=\omega(x)$.

上述定理1和定理2推广了文献[3]中第三章定理2.8的结论.在文献[3]中的定理是考虑完备的度量空间的情形,而我们考虑的是局部紧的空间的情形,比前者的条件要广泛的多.

下面定理3和定理4是在文献[3]第三章第二节的定理2.14和2.15的基础上得到的.

定理3 在度量空间X中,如果点x为正向Poisson稳定的,则$\overline{\gamma(x)}$内的每一点为非游荡点.

证明 因为点x为正向Poisson稳定,所以由引理1可知,对每一个$t\in R$, xt也是正向Poisson稳定的.设$\{x_n\}\subset\gamma^{+}(x)$,且$x_n\to y$,先证明$y\in J^{+}(y)$.

根据上面叙述,对于每个n, $x_n\in\omega(x_n)$,故对于每个n,存在$t_n>n$,使得$d(x_n,x_nt_n)<\dfrac{1}{n}$,所以

$$\rho(y,x_nt_n)\leqslant\rho(y,x_n)+\rho(x_n,x_nt_n)\leqslant\rho(y,x_n)+\frac{1}{n}.$$

这就证明了当$x_n\to y$时,$x_nt_n\to y$, $t_n\to\infty$. 即$y\in J^{+}(y)$.

类似可以证明,在度量空间X中,如果点x为负向Poisson稳定,$\overline{\gamma(x)}$内的每一点为非游荡点.

定理4 如果动力系统(X,R,π)是Lyapunov稳定,设$P\subset X$中的每一个点,或者是正向Poisson稳定的,或者是负向Poisson稳定的,则P内的每一点是Poisson稳定的.

证明 设$\{x_n\}\subset p$,且$x_n\to x$,首先证明$x\in J^{+}(x)$. 对于每个n,或者$x_n\in\omega(x_n)$,或者$x_n\in\alpha(x_n)$,于是可以假设或者对于每个n, $x_n\in\omega(x_n)$;或者对于每个n, $x_n\in\alpha(x_n)$. 不妨假设对于每个n, $x_n\in\omega(x_n)$,对于每个n,存在$t_n>n$,使得$d(x_n,x_nt_n)<\dfrac{1}{n}$,所以

$$\rho(x,x_nt_n)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,x_nt_n)\leqslant\rho(x,x_n)+\frac{1}{n}.$$

即$x\in J^{+}(x)$,由动力系统(X,R,π)是Lyapunov稳定的,则在每一点x处,有$\omega(x)=J^{+}(x)$和$\alpha(x)=$

$J^{-}(x)$，故 $x \in \omega(x)$ 和 $x \in \alpha(x)$，即点 x 是 Poisson 稳定的. 第二种情况我们可类似的考虑，这样就证明了 P 内的每一点是 Poisson 稳定的.

推论 1 设动力系统 (X, R, π) 为 Lyapunov 稳定，若点 x 为正 Poisson 稳定的或负 Poisson 稳定的，则 $\overline{\gamma(x)}$ 中的每一点为 Poisson 稳定的.

参考文献：

[1] Elaydi S, Farran H. Lipschitz stable dynamical systems[J]. Nonlinear Analysis, 1985, 7(9): 729-738.

[2] Chin-Ku Chu, Kim Myung Sun, Lee Keon-Hee, et al. Lipschitz stability and lyapunov stability theory in dynamical systems[J]. Nonlinear Analysis, 1992, 19(10): 901-909.

[3] Bhatia N P, Szego G. Stability theory of dynamical[M]. Berlin: Springer, 1970.

[4] Bhatia N P, Hajek O. Local Semi-dynamical systems[A]. Lecture Notes in Math[C]. Berlin: Springer, 1969. 90.

[5] Sibirsky K S. Introduction to topological dynamics[M]. English Transt. The Netherlands: Noordhoff International Publishing, 1975.

（责任编辑：韦廷宗　邓大玉）

（上接第 173 页 Continue from page 173）

故 $\{\Psi(x-n): n \in Z\}$ 是规范正交族，结合 $\{\Psi(x-n): n \in Z\}$ 是 W_0 的 Riesz 基，便知 $\{\phi(x-n), \Psi(x-n): n \in Z\}$ 是 V_1 的标准正交基.

注　由定理 1 知道已知 $\phi(x)$ 是正交尺度函数，要构造正交小波 Ψ，关键是去寻求一个 $Q(z)$，使得两尺度矩阵 $M(z) = \begin{bmatrix} P(z) & P(-z) \\ Q(z) & Q(-z) \end{bmatrix}$ 是一个酉矩阵，从而行列式 $\det M(z)$ 的绝对值为 1.

可设 $\alpha(z) = \dfrac{1}{\det M(z)}$，则 $|\alpha(z)| = 1$. 又 $M^T(z)^{-1} = \overline{M(z)}$，推出 $\alpha(z)Q(z) = -P(-z)$，即有 $Q(z) = -\bar{\alpha}(z)P(-z)$.

注意到 $\det M(z) = P(z)Q(-z) - P(-z)Q(z)$，因此 $\det M(-z) = -\det M(z)$，从而 $\alpha(-z) =$
$-\alpha(z)$，$Q(-z) = \bar{\alpha}(z)P(z)$.

这样 $M(z) = \begin{bmatrix} P(z) & P(-z) \\ -\bar{\alpha}(z)P(-z) & \bar{\alpha}(z)P(z) \end{bmatrix}$，

$\overline{M^T(z)} = \begin{bmatrix} P(z) & -\alpha(z)P(-z) \\ P(-z) & \alpha(z)P(z) \end{bmatrix}$，

验证　$M(z)\overline{M^T(z)} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

其中，$\beta_{11} = |P(z)|^2 + |P(-z)|^2$；$\beta_{12} = -\bar{\alpha}(z)P(z)P(-z) + \bar{\alpha}(z)P(z)P(-z)$；$\beta_{21} = -\alpha(z)P(z)P(-z) + \alpha(z)P(z)P(-z)$；$\beta_{22} = |P(z)|^2 + |P(-z)|^2$，

故 $M(z)$ 是酉矩阵. 所以，只要 $\alpha(z)$ 满足：
$|\alpha(z)| = 1$ 与 $\alpha(-z) = -\alpha(z)$.

令 $Q(z) = -\bar{\alpha}(z)P(-z)$，

则由 $\Psi(\omega) = Q(z)\phi(\frac{\omega}{2})$ 定义的 $\Psi(x)$ 就是一个正交小波.

特别地，取 $\alpha(z) = -\bar{z}$，$Q(z) = zP(-z)$，$\Psi(\omega) = zP(-z)\phi(\frac{\omega}{2})$ 这就是通常的取法，则 $\Psi(x)$ 是正交小波. 当然我们还可以令 $\alpha(z) = \pm\bar{z}^{2k+1}$ 或 $\alpha(z) = \pm z^{2k+1}$，根据定理 1，由 $\Psi(\omega) = -\bar{\alpha}(z)P(-z)\phi(\frac{\omega}{2})$ 定义的 $\Psi(x)$ 也是一个正交小波.

参考文献：

[1] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安：西安交通大学出版社，1998.

[2] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 程正兴译. 西安：西安交通大学出版社，1995.

[3] 冯象初，甘小冰，宋国香. 数值泛函与小波理论[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2003.

[4] Un Y, Tang L. Fast method compute tensor product 2-D wavelet transforms[A]. In: Proceedings of the Third International Conference on Wavelet Analysis and Its Applications[C]. Chongqing: Logistical Engi Univ of PLA, 2003. 99-104.

[5] Shi Z, Song G, Multi-frequency biorthogonal wavelets generated bu a finite number of functions[A]. In: Proceedings of the Third International Conference on Wavelet Analysis and Its Applications[C]. Chongqing: Logistical Engi Univ of PLA, 2003. 118-125.

[6] Tang Y Y, Yang J, Zhang W. A class of semi-orthogonal wavelet packets[A]. In: Proceedings of the Third International Conference on Wavelet Analysis and Its Applications[C]. Chongqing: Logistical Engi Univ of PLA, 2003. 144-149.

（责任编辑：黎贞崇）