DOI：10.13656/j.cnki.gxkx.2005.03.001
广西科学 Guangxi Sciences 2005，12(3)：161～164

对角占优矩阵与 H-阵和 M-阵的判定*

Diagonally Dominant Matrices and the Determining of H-matrices and M-matrices

张成毅，李耀堂
Zhang Chengyi, Li Yaotang

(云南大学数学系，云南昆明　650091)
(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming, Yunnan, 650091, China)

摘要：讨论对角占优矩阵与 H-阵和 M-阵之间的关系，得出对角占优矩阵是 H-阵(或 M-阵)的充分必要条件，并给出 H-阵(或 M-阵)的判定算法.

关键词：对角占优矩阵　对角均势矩阵　对角均势主子阵　H-阵　M-阵　判定算法
中图法分类号：O151.21　　文献标识码：A　　文章编号：1005-9164(2005)03-0161-04

Abstract: The relationship between diagonally dominant matrices and H-matrices (or M-matrices) is studied, and several sufficient and necessary conditions of diagonally dominant matrices being H-matrices (or M-matrices) is presented. Furthermore, the determining algorithm of H-matrices (or M-matrices) is presented.

Key words: diagonally dominant matrix, diagonally equipotent matrix, diagonally equipotent principal submatrix, H-matrix, M-matrix, determining algorithm

19 世纪末，人们在研究行列式的性质和值的计算时，就注意到"对角占优"这一性质.严格对角占优矩阵和不可约对角占优矩阵的性质及其应用，早为人们所知.20 世纪 60 年代以来又陆续提出了具非零元素链对角占优矩阵、半强对角占优矩阵等一系列概念.游兆永[1]指出：严格对角占优矩阵、不可约对角占优矩阵和非零元素链对角占优矩阵(或者半强对角占优矩阵)等几类特殊对角占优矩阵都是 H-阵，并且当其主对角元为正、非主对角元非正时为 M-阵.但是，对于一般的对角占优矩阵何时为 H-阵以及何时为 M-阵，仍未见报道.因此，本文对此作进一步的系统研究.

1　定义与符号

用 $C^{n\times n}$ 表示 n 阶复矩阵的集合，设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，记

$$K=\left\{i\ \middle|\ |a_{ii}|=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ i\in n\right\},\ N=\{1,2,\cdots,n\},\ \Omega=N-K,$$

$|K|$ 表示 K 中元素的个数；A^T 表示 A 的转置矩阵；$\varnothing$ 表示空集.

定义 1.1　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果

$$|a_{ii}|\geqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n, \tag{1.1}$$

成立，则称 A 为行对角占优矩阵；如果

$$|a_{ii}|=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n,$$

成立，则称 A 为行对角均势矩阵；如果

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\ i=1,2,\cdots,n,$$

成立，则称 A 为行严格对角占优矩阵.

同理，可以定义列对角占优矩阵、列对角均势矩阵和列严格对角占优矩阵.但在本文中，对角占优矩阵、对角均势矩阵和严格对角占优矩阵一般指的是行对角占优矩阵、行对角均势矩阵和行严格对角占优矩阵.

定义 1.2　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，如果 A 的 k 阶主子矩阵：

收稿日期：2004-12-12
作者简介：张成毅(1977-)，男，山东临邑人，硕士研究生，主要从事数值计算研究。
*云南省教育厅科研基金(03Z169A)和云南大学理科校级科研基金(2003Z013B)资助项目。

$$A(i_1, i_2, \cdots, i_k) = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{bmatrix}$$

为对角均势矩阵,则称 $A(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 为 A 的对角均势主子阵,称其行列式 $\det(A(i_1, i_2, \cdots, i_k))$,为 A 的对角均势主子式.

注 1 如果 A 为对角占优矩阵, $A(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 为 A 的对角均势主子阵,则有:

(1) $J \subseteq K$,其中 $J = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}(k > 1)$.

(2) $a_{ij} = 0, i \in J, j \in C_N J$,其中 $C_N J$ 表示集合 J 关于全集 N 的补集.

(3) 若 $A(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 的阶数 $k = |J| = 1$,规定 $A(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 为一阶零矩阵.

定义 1.3 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$.当 $n = 1$ 时,若 A 的唯一元素不等于 0,则称 A 为不可约.当 $n \geqslant 2$ 时,若存在非空集合 $M \subset N, M \neq N$,使

$a_{ij} = 0, i \notin M, j \in M,$

则称 A 为可约矩阵,否则称 A 为不可约矩阵.

定义 1.4 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 满足下列条件:

(1) A 为对角占优;

(2) A 不可约;

(3) 严格不等式 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ 至少对一个行标 $i \in N$ 成立,

则称 A 为不可约对角占优矩阵.

定义 1.5 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 的非主对角元为非正值,且其逆矩阵为非负矩阵,即

$a_{ij} \leqslant 0; i, j \in N, i \neq j; A^{-1} \geqslant 0,$

则称 A 为 M-阵.

定义 1.6 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$,如果 A 的比较矩阵 $\mathscr{M}(A) = (m_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是 M-阵,则称 A 为 H-阵,其中

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ij}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

注 2 在本文中,若没有特别声明,所涉及的 H-阵和 M-阵都是指非奇异的 H-阵和 M-阵.

定义 1.7 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,称 $\rho(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$ 为 A 的谱半径.

2 对角占优矩阵为 *H*-阵和 *M*-阵的充分必要条件

为了证明方便,先引入几个引理.

引理 2.1[1] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 为不可约对角占优矩阵,则 A 是非奇异的.

引理 2.2 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 为对角占优矩阵,如果 A 不存在对角均势主子阵,则 A 非奇异.

证明 因 A 为对角占优矩阵,故有:

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n, \qquad (2.1)$$

又因 A 中不存在对角均势主子阵,所以(2.1)式中至少有一个严格不等式成立.

如果 A 是不可约的,则 A 是不可约对角占优矩阵.从而由引理 2.1 知 A 是非奇异的.

如果 A 是可约矩阵,则存在排列矩阵 P,使得

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ll} \end{bmatrix},$$

其中 A_{jj} 为 A 的 n_j 阶不可约主子矩阵, $j = 1, 2, \cdots, l$; $\sum_{j=1}^{l} n_j = n$.由题设知,对每个 $j(1 \leqslant j \leqslant l)$, A_{jj} 都不是对角均势主子阵且不可约.因而 A_{jj} 是不可约对角占优矩阵,故它是非奇异的,即 $\det A_{jj} \neq 0$,所以

$$\det A = \det PAP^T = \det A_{11} \det A_{22} \cdots \det A_{ll} \neq 0,$$

即 A 是非奇异的.

引理 2.3[2] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$,则 $\rho(A) \leqslant \rho(|A|)$,其中 $|A| = (|a_{ij}|) \geqslant 0$ 为 A 的绝对矩阵.

引理 2.4[3] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$,则对 C^n 上的任何一种矩阵范数 $\|\circ\|$ 都有 $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

引理 2.5[4] 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, $a_{ii} \neq 0$; $i = 1, 2, \cdots, n$,则 A 为 H-阵的充分必要条件是 $\rho(|B|) < 1$,其中 $B = I - D^{-1}A$, I 是单位矩阵, $D = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

引理 2.6 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 为对角占优矩阵,如果 A 不存在对角均势主子阵,则 $\rho(B) \leqslant \rho(|B|) < 1$,其中 $B = I - D^{-1}A$, $D = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$, I 是单位矩阵.

证明 如果 A 为严格对角占优矩阵,则 A 是 H-阵[1].由引理 2.5 知, $\rho(B) \leqslant \rho(|B|) < 1$.故设 A 不是严格对角占优矩阵,即(1.1)式中有等式成立,又因 A 不存在对角均势主子阵,则(1.1)式有严格不等式成立,并且, $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$,故 D^{-1} 存在.设 $B = I - D^{-1}A = (b_{ij})$,则

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \qquad (2.2)$$

由引理 2.3 知, $\rho(B) \leqslant \rho(|B|)$,故只需证明 $\rho(|B|) < 1$.从(2.1)和(2.2)式可得

$$\| |B| \|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |b_{ij}|\right\} =$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\right\} = 1, \tag{2.3}$$

由引理2.4及(2.3)式知 $\rho(|B|)\leqslant \| |B| \|_\infty = 1$, 所以只需证 $\rho(|B|)\neq \| |B| \|_\infty = 1$.

假设 $\rho(|B|) = \| |B| \|_\infty = 1$, 因 $|B|$ 是非负矩阵, 由著名的 Perron-Frobenius 定理知[4], 1 为 $|B|$ 的一个特征值, 即 $I-|B|$ 为奇异矩阵. 现在考察矩阵 $I-|B|$, 由 $B = I-D^{-1}A = (b_{ij})$ 知, $I-|B|$ 的绝对矩阵 $|I-|B||$ 与 $D^{-1}A$ 的绝对矩阵 $|D^{-1}A|$ 相等, 即:

$$|I-|B||=\begin{bmatrix} 1 & |b_{12}| & \cdots & |b_{1n}| \\ |b_{21}| & 1 & \cdots & |b_{2n}| \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ |b_{n1}| & |b_{n2}| & \cdots & 1 \end{bmatrix} =$$

$|D^{-1}A|$.

又因 A 对角占优且不存在对角均势主子阵, 故 $D^{-1}A$ 也对角占优且不存在对角均势主子阵, 从而其绝对矩阵 $|D^{-1}A| = |I-|B||$ 也对角占优且不存在对角均势主子阵. 因此, $I-|B|$ 对角占优且不存在对角均势主子阵. 由引理 2.2 知, $I-|B|$ 非奇异, 这与 $I-|B|$ 奇异矛盾. 此矛盾说明 $\rho(|B|)\neq \| |B| \|_\infty = 1$.

引理2.7[5] 设 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为H-阵, 则至少存在一个 $i\in N$ 使得

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

引理2.8 设 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为对角均势矩阵, 则 A 一定不是H-阵.

证明 由对角均势矩阵的定义和引理2.7可直接推证.

引理2.9[6] 设 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$, 则 A 为H-阵的充分必要条件为 A 的各阶主子阵都是H-阵.

引理2.10 设 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为H-阵, 则 A 不存在对角均势主子阵.

证明 假设 A 存在对角均势主子阵 $A_{kk} = A(i_1, i_2, \cdots, i_k)$. 因为 A 为H-阵, 由引理 2.9 知, A_{kk} 是H-阵, 这与引理 2.8 矛盾. 所以, A 不存在对角均势主子阵.

引理2.11[4] 设 $a = (a_{ij})\in R^{n\times n}$ 满足:

$a_{ij}\leqslant 0,\ i\neq j;\ a_{ii} > 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, n,$

则 A 为M-阵的充分必要条件是 $\rho(B)\leqslant \rho(|B|) < 1$, 其中 $B = I-D^{-1}A$, I 是单位矩阵, $D = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

定理2.1 设 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为对角占优矩阵, 则 A 为H-阵的充分必要条件是A不存在对角均势主子阵.

证明 充分性 由引理2.6和引理2.5直接推证.

必要性 由引理 2.10 直接推证.

定理2.2 设 $A = (a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为对角占优矩阵, 并且

$a_{ij}\leqslant 0,\ i\neq j;\ a_{ii} > 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, n,$

则 A 为M-阵的充分必要条件是A不存在对角均势主子阵.

证明 充分性 由引理 2.6 和引理 2.11 可直接推证.

必要性 由定义 1.6 知, M-阵一定是H-阵. 故由引理 2.10 知, A 不存在对角均势主子阵.

由以上结论可知: 根据是否存在对角均势主子阵, 可将对角占优矩阵类分为 H-阵和具有对角均势主子阵两类. 所以, 存在对角均势主子阵是对角占优矩阵不是 H-阵的根本原因; 而不存在对角均势主子阵的对角占优矩阵就是 H-阵, 并且当其主对角元为正, 非主对角元非正时, 它又是 M-阵.

3 *H*-阵和*M*-阵的判定算法

由对角占优矩阵和对角均势主子阵的定义易知, 若对角占优矩阵 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$ 有对角均势主子阵, 则 A 必有阶数最大的对角均势主子阵. 于是由定理 2.1 直接得到如下定理.

定理3.1 设 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为对角占优矩阵, 则 A 为H-阵的充分必要条件为A不存在阶数最大的对角均势主子阵.

由定理3.1可得到对角占优矩阵为 H-阵的如下算法.

算法3.1 给定对角占优矩阵 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$.

步骤1 令 $A^{(m)} = (a_{ij})$, 并且取 $m = 0$.

步骤2 若 $\exists i\in N$, $a_{ii} = 0$, 则 A 不是H-阵, 停止, 输出“A 不是H-阵”; 否则, 转入步骤 3.

步骤3 计算集合 K. 若 $K = \emptyset$, 则 A 是H-阵, 停止, 输出“A是H-阵”; 若 $K = N$, 则A 不是H-阵, 停止, 输出“A 不是H-阵”; 否则, 转入步骤 4.

步骤4 计算集合 $\Omega = N-K$. 对于集合 Ω 中的每一个元素 i, 对应着矩阵 $A^{(m)}$ 的第 i 行和第 i 列. 划掉这些行和列, 得矩阵 $A^{(m+1)}$, 转入步骤 3.

例1 判定矩阵 A 是否为H-阵.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & n & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & n+1 \end{bmatrix}$$

我们取 $n=50$, 利用算法 3.1 在 MATLAB 6.1 上经过 102 步运算, 得矩阵 A 是 H- 阵. 事实上, 矩阵 A 为下半强对角占优矩阵, 显然是 H- 阵. 可见, 该算法对高阶对角占优矩阵是否为 H- 阵的判定是很有效的.

同理, 由定理 2.2 可得定理 3.2.

定理 3.2 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为对角占优矩阵, 并且

$$a_{ij}\leqslant 0,\ i\neq j;\ a_{ii}>0,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

则 A 为 M- 阵的充分必要条件为 A 不存在阶数最大的对角均势主子阵.

证明 由定理 2.1 可以得证.

算法 3.2 给定对角占优矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$.

步骤 1 令 $A^{(m)}=(a_{ij})$, 并且取 $m=0$.

步骤 2 若 $\exists i\in N$, $a_{ii}=0$, 则停止, 输出"A 不是 M- 阵"; 否则转入步骤 3.

步骤 3 若 $a_{ij}>0$, $i,j\in N$, $i\neq j$, 则停止, 输出"A 不是 M- 阵"; 否则, 转入步骤 4.

步骤 4 计算集合 K. 若 $K=\varnothing$ 则 A 是 M- 阵, 停止, 输出"A 是 M- 阵"; 若 $K=N$, 则 A 不是 M- 阵, 停止, 输出"A 不是 M- 阵"; 否则, 转入步骤 5.

步骤 5 计算集合 $\Omega=N-K$. 对于集合 Ω 中的每一个元素 i, 对应着矩阵 $A^{(m)}$ 的第 i 行和第 i 列. 划掉这些行和列, 得矩阵 $A^{(m+1)}$, 转入步骤 4.

例 2 判定矩阵 A 是否为 M- 阵.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & n & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & n+1 \end{bmatrix}$$

同样, 取 $n=50$, 利用算法 3.2 在 MATLAB 6.1 上经过 103 步运算, 得矩阵 A 是 M- 阵. 事实上, 矩阵 A 为下半强对角占优矩阵且满足 $a_{ii}\leqslant 0$, $i\in N$; $a_{ij}>0$, $i\neq j$, $i,j\in N$, 显然 A 是 H- 阵. 可见, 该算法对高阶对角占优矩阵是否为 M- 阵的判定也是很有效的.

参考文献:

[1] 游兆永. 非奇 M- 矩阵[M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1981. 20, 89-93, 99-108.

[2] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1962. 22-23, 84-85.

[3] 徐成贤, 徐宗本. 矩阵分析[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1991. 215.

[4] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. 130-241, 633-634.

[5] 逄明贤. 广义对角占优矩阵的判定及其应用[J]. 数学年刊(A 辑), 1985, 6(3): 323-330.

[6] 高益明. 矩阵广义对角占优和非奇的判定(Ⅱ)[J]. 工程数学学报, 1988, 5(3): 12-16.

(责任编辑: 韦廷宗 邓大玉)

哈萨克斯坦培育出新型益生菌

哈萨克斯坦微生物学与病毒学研究所研究人员最近培育出一种新型益生菌, 可以部分替代抗生素来对付沙门氏菌和大肠杆菌。

人们通常使用抗生素治疗沙门氏菌和大肠杆菌感染引起的疾病, 但抗生素在杀死病菌的同时, 也会破坏人体肠道内正常微生物群落的功能, 导致对抗生素具有抗药性的病原体数量增加, 进一步引发疾病。哈萨克斯坦研究人员新近合成的益生菌可以部分替代抗生素来治疗这类病菌感染。这种益生菌利用乳酸菌和丙酸菌培育而成, 乳酸菌本身可以杀死沙门氏菌和大肠杆菌, 而丙酸菌能够大量合成维生素 B_{12}, 增强机体抵抗肠道感染的能力, 还能增强宿主的免疫能力。新培育出的益生菌同时具有乳酸菌和丙酸菌的上述功能, 而且没有副作用。

与单种培育的益生菌相比, 在两种细菌基础上培育出的益生菌作用范围更广, 并且受营养环境的限制更小。新培育出的益生菌使用 3h 后, 沙门氏菌和大肠杆菌的数量降低到原来的千分之一。但是, 这种益生菌只能抑制数量不大的有害细胞, 因而不能完全替代抗生素。此外, 由于病原体菌株可能发生变异, 益生菌的抑杀效果会不断减弱, 因而科研人员需要不断培育新的益生菌。

据《科学时报》