DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.02.003
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(2): 89~ 91

微分代数系统在结构扰动下的平稳振荡*

The Stationary Oscillation of Differential-Algebraic Systems Under Structural Perturbations

龚文振[1],梁家荣[2]
Gong Wenzhen[1], Liang Jiarong[2]

(1. 玉林师范学院数学与计算机科学系,广西玉林 537000; 2. 广西大学计算机与电子信息学院,广西南宁 530004)
(1. Dept. of Math. & Comp. Sci., Yulin Normal Univ., Yulin, Guangxi, 537000, China; 2. Coll. of Comp. & Elec. Info., Guangxi Univ., Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要: 利用广义 Liapunov 函数方法,研究一类时变微分代数系统,得到该类变微分代数大系统在结构扰动下的平稳振荡定理.
关键词: 微分代数系统 平稳振荡 结构扰动
中图法分类号: O175.13 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)02-0089-03
Abstract The method of Liapunov function is employed to study a class of time-varying differential-algebraic systems, the stationary oscillation theorem is obtained under structural perturbations.
Key words differential-algebraic systems, stationary oscillation, structural perturbations

研究周期解存在性的首要工作是保证系统有一有界解,微分代数系统也不例外.所谓存在平稳振荡是指系统不但有周期解存在,而且这个周期解稳定且唯一[1].由于平稳振荡在实际系统中有着很强的应用背景,因而受到人们的广泛重视[1~4].微分代数系统亦称广义系统,它首先由控制学家 Rosenbrock 在1974年研究电网系统中提出[5],其后人们对微分代数系统进行了广泛的研究.关于周期解方面,文献[6]研究了微分代数系统的概周期解问题,文献[7]讨论了离散微分代数系统的平稳振荡问题,文献[8]研究了一类广义非线性系统的平稳振荡问题.但关于具有结构扰动的微分代数系统的平稳振荡问题,目前尚未见文献报道.由于绝大多数系统都或多或少的会受到外界的扰动,因而具有结构扰动的微分代数系统更符合实际,研究具有结构扰动的微分代数系统不仅有实际意义,亦有学术价值.本文主要研究具有如下分解的复合微分代数系统的平稳振荡问题:

$$E_i\dot{x} = A_{ii}x_i + \sum_{j\neq i, j=1}^{r} e_{ij}A_{ij}(t)x_j + f_i(t), (i = 1, 2, \cdots, r), \quad (1)$$

这里 $x_i \in R^{n_i}, \sum_{i=1}^{r} n_i = n, E_i \in R^{n_i \times n_i}, A_i \in R^{n_i \times n_i}, rank\, E_i < n_i$,而 $f_i(t) \in R^{n_i}, A_{ij}(t) \in R^{n_i \times n_i}, e_{ij} = 0$ 或 $1, i, j = 1, 2, \cdots, r$ 都是连续函数.

考虑如下的微分代数系统

$$E\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (2)$$

其中,$E \in R^{n \times n}, A(t) \in C(J, R^{n \times n}), f(t) \in C(J, R^n)$, $rank\, E < n$.假设 $A(t)$ 和 $f(t)$ 都是以 k 为周期的周期连续函数.

1 相关定义和引理

定义 1 称微分代数系统(2)是 E 稳定的,如果对于任意的 $X > 0$,存在 $W > 0$ 使得当 $\| Ex_0 \| < W$ 时,恒有 $\| Ex(t) \| < X$,其中 $x(t)$ 是满足初始条件 $Ex(0) = Ex_0$ 的系统(2)的解.

定义 2 称微分代数系统(2)是 E 渐近稳定的,如果微分代数系统(2)是 E 稳定的,且对于系统(2)的任一解 $x(t)$ 都有 $\lim_{t\to\infty} Ex(t) = 0$.

定义 3 称微分代数系统(2)是 *Liapunov* 意义下稳定的,如果对于任意 $X > 0$,存在 $W > 0$ 使得当 $\| x_0 \|$

收稿日期: 2004-11-18
作者简介: 龚文振(1982-),男,广西玉林人,讲师,主要从事微分代数系统理论,稳定性与镇定理论研究.
* 广西高校百名学科带头人基金(桂教人[2003]97号)、国家教育部留学回国人员科研启动基金(教外司留[2004]527号)和广西自然科学基金(桂科回 0448001)资助项目.

$< W$时，恒有 $\| x(t) \| < X$，其中 $x(t)$ 是满足初始条件 $x(0) = x_0$ 的系统(2)的解.

定义 4 称微分代数系统(2)是 Liapunov 意义下渐近稳定的，如果微分代数系统(2)是 Liapunov 意义下稳定的，且对于系统(2)的任一解 $x(t)$ 都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

引理 1 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{PEQ} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{PA}(t)\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}(t) & \boldsymbol{A}_{12}(t) \\ \boldsymbol{A}_{21}(t) & \boldsymbol{A}_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

满足 $\boldsymbol{A}_{22}(t)$ 可逆，则微分代数系统(2)存在周期解的充要条件是系统(2)有一有界解.

证明 必要性显然，现证充分性.

令 $\boldsymbol{Q}^{-1} x = y = \mathrm{col}(y_1^T, y_2^T)$，则微分代数系统(2)等价于如下系统

$$\dot{y}_1(t) = \boldsymbol{A}_{11}(t) y_1(t) + \boldsymbol{A}_{12}(t) y_2(t) + f_1(t), \quad (4)$$

$$0 = \boldsymbol{A}_{21}(t) y_1(t) + \boldsymbol{A}_{22}(t) y_2(t) + f_2(t), \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{P} f(t) = \mathrm{col}(f_1^T(t), f_2^T(t))$. 若系统(2)有一有界解 $x(t)$，则 $y(t) = \boldsymbol{Q}^{-1} x(t)$ 是有界的，从而由系统(5)可得

$$y_2(t) = -\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(t) \boldsymbol{A}_{21}(t) y_1(t) - \boldsymbol{A}_{22}^{-1}(t) f_2(t), \quad (6)$$

把系统(6)代入系统(4)可得

$$\dot{y}_1(t) = (\boldsymbol{A}_{11}(t) - \boldsymbol{A}_{12}(t)\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(t)\boldsymbol{A}_{21}(t)) y_1(t) + (f_1(t) - \boldsymbol{A}_{12}(t)\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(t) f_2(t)), \quad (7)$$

由 $y_1(t)$ 有界及系统(7)可知，$y_1(t)$ 是系统(7)的 k-周期解，再由系统(6)可知，$y_2(t)$ 亦是系统(5)的 k-周期解.

定义 5 称微分代数系统(2)是强正则的，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得系统(3)中的 $\boldsymbol{A}_{22}(t)$ 可逆.

引理 2 设 $a > 0$，b 为一实数，则 $\forall x \in \boldsymbol{R}$，有

$$-ax^2 + bx \leqslant -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b^2}{2a}.$$

证明略.

2 主要结果及证明

考虑在结构扰动下，具有分解系统(1)的时变微分代数大系统(2). 易知系统(1)的齐次系统为：

$$\boldsymbol{E}_i \dot{x} = \boldsymbol{A}_{ii} x_i + \sum_{j\neq i, j=1}^{r} e_{ij} \boldsymbol{A}_{ij}(t) x_j, \ (i = 1, 2, \cdots, r). \quad (8)$$

定理 1 对于具有分解系统(1)的复合微分代数大系统(2)，假设系统(2)是强正则的，且 $\boldsymbol{A}(t)$ 和 $f(t)$ 都是以 k 为周期的连续函数，存在正定矩阵对 $\boldsymbol{V}_i$，$\boldsymbol{W}_i$ 满足：

$$\boldsymbol{E}_i^T \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{A}_{ii} + \boldsymbol{A}_{ii}^T \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{E}_i = -\boldsymbol{E}_i^T \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{E}_i, \quad (9)$$

如果存在正常数 T，使 $\| \boldsymbol{A}_{ij}(t) x_j \| \leqslant T \| \boldsymbol{E}_j x_j \|$，$\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M > 0$，其中 $\lambda_m = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant r} \{\lambda_m(\boldsymbol{W}_i)\}$，$\lambda_M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r} \{\lambda_M(\boldsymbol{V}_i)\}$，则复合微分代数系统(2)存在 k-周期解.

证明 因为 $f(t)$ 是以 k 为周期的连续函数，所以 $f(t)$ 有界. 因此存在常数 $F > 0$ 使得 $\| f_i(t) \| \leqslant F$. 对于孤立子系统(1)，取广义 Liapunov 函数 $v_i(\boldsymbol{E}_i x_i) = (\boldsymbol{E}_i x_i)^T \boldsymbol{V}_i (\boldsymbol{E}_i x_i)$，则沿(1)的解求导可得

$$\dot{v}_i(\boldsymbol{E}_i x_i)|_{(1)} = x_i^T \boldsymbol{A}_{ii}^T \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{E}_i x_i + x_i^T \boldsymbol{E}_i^T \boldsymbol{V}_i \boldsymbol{A}_{ii} x_i + 2\sum_{j\neq i, j=1}^{r} (\boldsymbol{E}_i x_i)^T e_{ij} \boldsymbol{A}_{ij}(t) x_j + 2(\boldsymbol{E}_i x_i)^T \boldsymbol{V}_i f_i(t) \leqslant$$

$$-(\boldsymbol{E}_i x_i)^T \boldsymbol{W}_i (\boldsymbol{E}_i x_i) + 2T\lambda_M \| \boldsymbol{E}_i x_i \| \sum_{j\neq i, j=1}^{r} \| \boldsymbol{E}_j x_j \| + 2\lambda_M F \| \boldsymbol{E}_i x_i \|,$$

令 $v(\boldsymbol{E}x) = \sum_{i=1}^{r} v_i(\boldsymbol{E}_i x_i)$ 作为系统(2)的 Liapunov 函数，则有

$$\dot{v}(\boldsymbol{E}x)|_{(2)} = \sum_{i=1}^{r} \dot{v}_i(\boldsymbol{E}_i x_i)|_{(1)} \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{r} (-\lambda_m \| \boldsymbol{E}_i x_i \|^2 + 2T\lambda_M \| \boldsymbol{E}_i x_i \| \sum_{j\neq i, j=1}^{r} \| \boldsymbol{E}_j x_j \| + 2\lambda_M F \| \boldsymbol{E}_i x_i \|) \leqslant \sum_{i=1}^{r} (-\lambda_m \| \boldsymbol{E}_i x_i \|^2 +$$

$$T\lambda_M \sum_{j\neq i, j=1}^{r} (\| \boldsymbol{E}_i x_i \|^2 + \| \boldsymbol{E}_j x_j \|^2) +$$

$$2\lambda_M F \| \boldsymbol{E}_i x_i \|) \leqslant \sum_{i=1}^{r} ((-\lambda_m + (V-1)T\lambda_M) \| \boldsymbol{E}_i x_i \|^2 + T\lambda_M \sum_{j\neq i, j=1}^{r} \| \boldsymbol{E}_j x_j \|^2 +$$

$$2\lambda_M F \| \boldsymbol{E}_i x_i \|) \leqslant \sum_{i=1}^{r} ((-\lambda_m + 2(r-1)T\lambda_M) \| \boldsymbol{E}_i x_i \|^2 + 2\lambda_M F \| \boldsymbol{E}_i x_i \|) =$$

$$\sum_{i=1}^{r} (-(\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M) \| \boldsymbol{E}_i x_i \|^2 + 2\lambda_M F \| \boldsymbol{E}_i x_i \|) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{r} \left(-\frac{(\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M)}{2} \| \boldsymbol{E}_i x_i \|^2 + \frac{2F^2\lambda_M^2}{(\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M)}\right) =$$

$$-\frac{(\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M)}{2} \| \boldsymbol{E}x \|^2 + \frac{2rF^2\lambda_M^2}{(\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M)}.$$

考虑如下区域：

$$K = \left\{ x \,\middle|\, \| \boldsymbol{E}x \|^2 \leqslant \frac{8rF^2\lambda_M^2}{\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M} \right\},$$

在这个区域的补域与 $I(t_0 \leqslant t \leqslant +\infty)$ 所确定的乘积空间上有

$$\dot{v}(\boldsymbol{E}x)|_{(2)} \leqslant -\frac{\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M}{4} \| \boldsymbol{E}x \|^2,$$

于是，系统(2)的解 $x(t)$，$\boldsymbol{E}x(t)$ 是最终一致有界的.

下面证明 $x(t)$ 也是最终一致有界的. 事实上，作变换 $\boldsymbol{Q}^{-1} x = y = \mathrm{col}(y_1^T, y_2^T)$，则系统(2)等价于系统(4)和系统(5)，由 $\boldsymbol{E}x(t)$ 最终一致有界可知，$y_1(t)$ 是最终一致有界的，又由系统(6)可得

$$\| y_2(t) \| \leqslant \| \boldsymbol{A}_{22}^{-1}(t) \| \| \boldsymbol{A}_{21}(t) \| \| y_1(t) \| + \| \boldsymbol{A}_{22}^{-1}(t) \| \| f_2(t) \|,$$

由 $A_{22}(t)$可逆、连续且是周期函数可知, $\| A_{22}^{-1}(t)\|$ 有界,再由 $A_{21}(t)$, $f_2(t)$是连续的周期可知, $\| A_{21}(t)\|$, $\| f_2(t)\|$ 都是有界的,从而 $y_2(t)$是最终一致有界.由引理 1可知,微分代数系统(2)存在一 k-周期解 h(t).此外,由定理的证明可知,对(1)的齐次系统(3),有

$$\dot{v}(Ex)|_{(3)} \leqslant -\frac{(\lambda_m - 2(r-1)T\lambda_M)}{2}\| Ex\|^2,$$

从而有 $\lim_{t\to\infty} Ex(t) = 0$,即系统(3)是 E渐近稳定的.仿有界性的证明,易证,对齐次系统(3)的解 $x(t)$,有 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.也就是说,微分代数系统(3)是 Liapunov 意义下渐近稳定的.

下证微分代数系统(2)周期解的唯一性.设系统(2)还有另一 k-周期解 J(t),容易看出 h(t) − J(t)是系统(3)的解,从而有 $\lim_{t\to\infty}(h(t) - J(t)) = 0$,由 h(t) − J(t)的周期性及连续性可知 h(t) − J(t) = 0.所以系统(2)存在平稳振荡.定理证毕.

3 数值实例

考虑如下的微分代数系统:

$$E\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{10}$$

其中 $E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}\cos^2 t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16}(\cos t + 1) \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(\sin t + 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$,

$f(t) = \mathrm{col}(\sin t, \cos t, \sin t, \sin 2t, \cos^2 t, \sin t)$,

取 $V_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$, $W_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$r = 2$, $T = 1/8$,容易验证,系统(10)满足了定理 1的条件,从而可知存在以 2c为周期的平稳振荡.

参考文献:

[1] 王慕秋,李黎明.非线性周期大系统的平稳振荡[J].应用数学学报,1991,14(2):220-228.

[2] Lakshm, Kantham V, Leela S. Differential and integral inequalities[M]. New York Academic Press,1969.

[3] 王 联,王慕秋.高维周期耗散系统的一平稳振荡定理[J].中国科学(A辑),1982,12(7):607-614.

[4] 王美娟.一类线性时变大系统的平稳振荡[J].应用数学学报,1985,8(4):489-497.

[5] Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamical systems[J]. Int J of Control,1974,20(2):191-202.

[6] 梁家荣,刘永清.广义系统的概周期解[J].科学通报,1998,43(3):325-328.

[7] 梁家荣,刘永清.离散广义系统的平稳振荡[J].数学学报,2002,45(3):551-556.

[8] 梁家荣.一类广义非线性系统的渐近稳定性与平稳振荡[J].数学研究与评论,2002,22(1):141-146.

(责任编辑:黎贞崇)

日本发现新的抗癌基因

日本名古屋大学一个研究小组近日宣布,他们新发现了一个与膀胱癌、胃癌、乳腺癌等多种癌症相关的抗癌基因,分析这一基因是否受到损伤,可更好地预测病情发展和后果。

新发现的抗癌基因名为“ATBF1”,由这一基因控制合成的蛋白质在细胞中穿梭于细胞质和细胞核之间,其作用相当于控制细胞增殖的开关。因此,如果这一基因受到损伤,细胞就会发生异常增殖,甚至癌变。

研究小组和美国艾莫里大学科研人员合作,对66名前列腺癌患者的基因进行了分析。结果表明,这一基因受到损伤的概率很高。研究小组又和日本新潟劳灾医院合作,对膀胱癌患者的基因进行了认真研究。结果发现,如果膀胱癌患者癌组织中含有的“ATBF1”和另外一种基因 P21都未受到损伤的话,治疗中预后(即预测病情发展和后果)效果要好得多,患者10年以上的生存率可达百分之百。

据《科学时报》