磁光 Faraday效应的经典和量子理论描述* The Classical and Quantum Theory of Magneto-Optical Faraday Effect

张学龙¹,张国营²,殷春浩²,韩 奎²,程 勇²

Zhang Xuelong¹, Zhang Guoying², Yin Chunhao², Han Kui², Cheng Yong²

(1. 上海理工大学医疗器械学院,上海 200093;

2. 中国矿业大学理学院物理系,江苏徐州 221008)

(1. Medical Instrumentation Coll., Univ. of Shanghai for Sci. & Tech., Shanghai, 200093, China; 2. Dept. of Phy., Coll. of Sci., China Univ. of Mining and Tech., Xuzhou, Jiangsu, 221008, China)

摘要:分别从经典电动力学和量子力学角度对磁光 Faraday效应进行描述,给出量子理论的计算方法,讨论稀土 石榴石晶体中晶场和交换场的作用,指出产生磁光 Faraday效应的机制.

关键词:磁光 Faraday效应 经典理论 量子理论 晶体场 交换作用

中图法分类号: 0436.4,0442;0413.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)01-0022-03

Abstract The magneto-optical Faraday effect is described by classical and quantum theories separately. The calculation method of quantum theory is given and the actions of the crystal field and exchange field are analyzed. The mechanics of the magneto-optical Faraday rotation is pointed out.

Key words magneto-optical Faraday effect, classical theory, quantum theory, crystal field, exchange action

由于能产生磁光 Faraday效应的晶体可成为新 一代磁光记录材料,该类晶体受到了磁学界的高度关 注,实验和理论研究日益活跃^[1-3].磁光 Faraday效 应是指平面偏振光透过磁性材料时,偏振面根据磁化 强度发生偏转的现象,而且只有平行于光传播方向的 磁化强度分量才对偏振面的旋转起作用.对一般磁性 材料而言,在光频下可视磁导率_≈1,电导率 ≈ 0. 因而磁光效应问题可归结到介电张量 [X]来讨论.本 文给出磁光 Faraday效应的经典和量子理论描述方 法,并讨论稀土石榴石晶体中晶场和交换场的作用.

晶体的介电张量一般可表示为,

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix},$$
(1)

其中, $X_i(i, j = 1, 2, 3)$ 一般为复数.

对于对称性高于正交系的晶体,令 *a*,*b*,*c*轴分别 平行于坐标轴 *X*,*Y*,*Z*,且磁化强度平行于 *c*轴 (*Z*

收稿日期: 2004-05-17

作者简介:张学龙 (1953-),男,江苏淮安人,教授,主要从事量子理论 及其应用研究

* 上海市自然科学基金 (03ZR14071)和上海市高校科技发展基金 (03SK03)资助项目。

若晶体无吸收,则(2) 式表示的矩阵是厄米的, 此时^W是实数,对角元亦是实数.有吸收时,^W为复数.

1 Faraday转动的经典描述

1.1 偏振面的转动

対光频:_= 1,^e= 0,则光波满足

$$\begin{pmatrix}
5 \times E = - \ -0^{0} \frac{\partial H}{\partial t}, \\
5 \times H = & [X] \frac{\partial E}{\partial t},
\end{pmatrix}$$
(3)

设入射光波为线偏振波,则

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-k)} = \vec{E} e^{ik(\vec{N}\cdot\vec{s}\cdot\vec{r}-t)}, \\ \vec{H} = \vec{H} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-kt)} = \vec{H} e^{ik(\vec{N}\cdot\vec{s}\cdot\vec{r}-t)}, \end{cases}$$
(4)

其中 $\vec{k} = \frac{\tilde{N}k}{c} \vec{s_k}; \tilde{N}$ 是介质的复折射率; $\vec{s_k}$ 是波矢方 向的单位矢量.将(4)式代入(3)式得:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{N}}{c} (\vec{E} \times \vec{s}_k) = - \ _0 \vec{H}, \\ \frac{\tilde{N}}{c} (\vec{H} \times \vec{s}_k) = X [X] \vec{E}, \end{cases}$$
(5)

从 (5) 式中消去 *H*得:

$$\widetilde{N}^{2} [E - s_{k} (s_{k} \cdot E)] = [X] E, \qquad (6)$$

$$\Re \Pi \ 2 \uparrow \xi \equiv A R \dot{B} - \dot{B} \xi s^{[4]}$$

$$\vec{s}_{k} \cdot \vec{E} = \begin{cases} g_{11} s_{kx} E_{x} + g_{12} s_{kx} E_{y} + g_{13} s_{kx} E_{z}, \\ + g_{21} s_{ky} E_{x} + g_{22} s_{ky} E_{y} + g_{23} s_{ky} E_{z}, \\ + g_{31} s_{z} E_{x} + g_{32} s_{z} E_{y} + g_{33} s_{k} E_{z}, \end{cases}$$

(7)

其中,度量系数 g_{ij} 表示 2个矢量的单位矢量的点乘, $g_{11} = g_{21} = g_{31} = g_{3x}, g_{12} = g_{22} = g_{32} = g_{33} = g_{23} = g_{33} = g_{33} = g_{33} = g_{33} = g_{33} = g_{33} = g_{33}$

$$\vec{s}_{x} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} = \begin{bmatrix} s_{x} \cdot E_{x} & s_{x} \cdot E_{y} & s_{x} \cdot E_{z} \\ s_{y} \cdot E_{x} & s_{k} \cdot y \cdot E_{y} & s_{k} \cdot y \cdot E_{z} \\ s_{z} \cdot E_{x} & s_{z} \cdot E_{y} & s_{k} \cdot z \cdot E_{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x} \cdot x \\ s_{k} \cdot y \\ s_{k} \cdot z \\ s_{k} \cdot y \\ s_$$

将(8)式代入(6)式可得,

$$(X - \tilde{N}^2) E + \tilde{N}^2 (s_k \cdot E) s_k = 0,$$

$$(9)$$

$$\Re (2)$$

$$\Re (\lambda (9)$$

$$\Re (2)$$

$$\Re (\lambda (9)$$

$$\Re (2)$$

$$\Re$$

$$\begin{bmatrix} V & S_{kx} + V_{k} - V & V & N & S_{kx} S_{ky} + V & S_{kx} S_{kz} V \\ \tilde{N}^{2} S_{ky} S_{kx} - i W & \tilde{N}^{2} S_{ky}^{2} + X_{y}^{2} - \tilde{N}^{2} & S_{ky} S_{kz} \tilde{N}^{2} \\ S_{kz} S_{kx} \tilde{N}^{2} & S_{kz} S_{ky} \tilde{N}^{2} & \tilde{N}^{2} S_{kz}^{2} + X_{z}^{2} - \tilde{N}^{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{x} \\ E_{y} \\ E_{y} \\ E_{z} \end{bmatrix} = 0.$$
(10)

该式有非零解的条件是系数行列式为 0,由此得 $\tilde{N}^4 [X(1 - s_{xy}^2 - s_{xz}^2) + X(1 - s_{xx}^2 - s_{xz}^2) + X(1 - s_{xx}^2 - s_{xz}^2) + X(1 - s_{xx}^2 - s_{xy}^2) + N^2 [(XX - W)(s_{xz}^2 - 1) + XX(s_{xy}^2 - 1) + XX(s_{xy}^2 - 1) + XX(s_{xx}^2 - 1)] + (XX - W)X = 0, (11)$ 由 (11)式解出 \tilde{N}^2 ,再代入 (10)式可得到不同折射率 的传输模, (11)式是描述各种磁光效应的基础.

令波矢 $\overline{k}(s_k)$ 平行磁化强度M的方向,则 $s_{xx} = s_{xy} = 0, s_{xz} = 1,$ 对单轴晶体 X = X = X由(11)式立 即可得

 $\tilde{N}^2 = X \pm W$,或写为 $\tilde{N}_{\pm}^2 = X \pm W$. (12)

若介质无吸收,则(12)式简化为 $\tilde{N} = n, n^2_{\pm} = X \pm W.$ (13)

为简便起见,仅考虑不吸收的情况,有吸收时仅 将 *n* 换成 *Ñ* 即可.将(12)式代入(10)式可得:

$$E_y = \mp i E_x, E_z = 0. \tag{14}$$

显然,对应 $n_{+}: E_{y} = -iE_{x}$,右旋偏振光(有吸收 时是椭圆);对应 $n_{-}: E_{y} = iE_{x}$,左旋偏振光.

注意 ,利用 \pm i = $e^{\pm \pi/2}$ 加到 E_x 上 ,可知 E_x 比 E_y 落后或超前 π /2,从而判断转向 .

可见,沿M方向传播的线偏振光分解成沿相反 方向转动的圆偏振光,即

$$e^{-ik(\frac{2}{c}Z-t)}$$
 (右) 和 $e^{ik(\frac{2}{c}Z-t)}$ (右), (15)

其速度分别为<u>[。]</u>和 <u>。</u>,二者稍有不同,故产生位相 差,合成后导致偏振面旋转.

1.2 单位长度偏振面的转角

因为 sx 沿 Z(M) 方向,所以可设 E 沿 x 方向(偏 振方向),取电磁波表达式的实部有,

$$E_{x} = E_{0}\cos(\frac{n\,\mathbf{k}}{c}Z - \mathbf{k}t) = E_{0}\cos(\frac{2\mathbf{t}\,n}{\lambda_{0}}Z - \mathbf{k}t),$$
(16)

其中, k和 λ_0 是入射光的圆频率和波长.该光进入介质后可分解成 2个圆偏振光(无吸收).由(15)式得

$$E_{x}^{*} = \frac{1}{2} E_{0} \cos\left(\frac{2\pi n_{+}}{\lambda_{0}} Z - k_{t}\right), \qquad (17)$$

再由(14)式得

 $E_x = E_x^+ + E_x^- =$

$$E_{y}^{\star} = -\frac{1}{2}E_{0}\sin\left(\frac{2\mathbf{r}\,n}{\lambda_{0}}\,Z - \mathbf{k}t\right), \qquad (18)$$

同理得到

为

$$E_x = \frac{1}{2} E_0 \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} Z - kt\right)$$
(19)

和
$$E_y^- = \frac{1}{2} E_0 \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} Z - kt\right).$$
 (20)

当上述 2个圆偏振光在晶体中前进 *L* 距离 (即 *Z* = *L*) 后,合成的线偏振光为

$$E_{0}\cos\left[\frac{\pi (n_{+} - n_{-})}{\lambda_{0}}Z\right]\cos\left[\frac{\pi (n_{+} + n_{-})}{\lambda_{0}}Z - k_{t}\right], (21)$$
$$E_{y} = E_{y}^{*} + E_{y}^{-} = -E_{0}\cos\left[\frac{\pi (n_{+} + n_{-})}{\lambda_{0}}Z - k_{t}\right]$$

$$k_t] \sin\left[\frac{\pi (n_{+} - n_{-})}{\lambda_0} Z\right].$$
(22)

可见,合成光仍是线偏振光,只是电场强度相对 原来方向(x方向)转过一个角度θ.

$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_x} = - \tan \frac{\pi (n_{+} - n_{-})}{\lambda_0} L, \qquad (23)$$

$$\dot{\mathbf{t}} \quad \theta = \frac{\pi}{\lambda_0} \left(n_- - n_+ \right) L. \tag{24}$$

单位长度的 Faraday转动角(比 Faraday转动)

$$\theta_F = \frac{\theta}{L} = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) = \frac{k}{2c} (n_- - n_+).$$
(25)

该式仅对未考虑吸收 (即 $\tilde{N} = n$), 且 s_k 沿M方向 的单轴晶体成立.

$$\overline{v}_{n} = \frac{1}{2}(n + n)$$
为平均折射率,则(25)式变

$$\theta_F = \frac{\mathbf{k}}{2c} \frac{(n^2 - n^2)}{2\overline{n}}.$$
(26)

$$\theta_F = -\frac{k}{2c} \mathbf{W}.$$
(27)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{LL}\mathbf{f}\mathbf{X} & (1) & \mathbf{f}\mathbf{h} & (2) & \mathbf{I}\mathbf{L}\mathbf{f}\mathbf{h} \\ \mathbf{X}_2 &= & \mathbf{X}_{\mathbf{y}} &= & \mathbf{W}_1 \end{array}$$

所以 W= - iXy, (28) 而介电张量 X 与极化率张量的关系为

$$X_{j} = W_{j} + 4 N i_{ij},$$
 (29)

其中, $W_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, N 是单位体积中的原子或离子数.故

$$W_{=} - iX_{y} = -i4\pi N i_{xy}, \qquad (30)$$

于是 (27) 式可以写成

为

$$\theta_F = i \frac{2\pi N k}{c\bar{n}} i_{ij} . \tag{31}$$

若介质存在吸收,则圆偏振光变成椭圆偏振光, 此时有

$$\theta_F = \theta'_F + i \dot{j}, \qquad (32)$$

其中 ,θ_F 是真正的 Faraday转动 ,而 [〕]是椭偏率 (短轴 与长轴之比) .即

$$\theta'_{F} = \frac{2 N k}{c} \operatorname{Re}\left[\frac{\mathrm{i}\,\mathbf{i}_{xy}}{\overline{n}}\right]; \tag{33}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{k} N \mathbf{k}}{c} \operatorname{Im}\left[\frac{\mathbf{i} \mathbf{1}_{xy}}{\pi}\right]. \tag{34}$$

2 Faraday转动的量子理论

根据 Condon and Shortley关于极化率的量子力 学表达式^[5]

$$i_{xy} = \sum_{g} \frac{d_g}{h} \sum_{n} \left[\frac{P_{gn}^x P_{ng}^y}{k_{gn} + k - i\Gamma_{gn}} + \frac{P_{gn}^y P_{ng}^x}{k_{gn} - k + i\Gamma_{gn}} \right],$$
(35)

其中, d_{g} 是粒子基态占有几率; $h k_{ng}$ 是能级间隔;k是入射光频率; Γ_{gn} 是线宽.

$$P_{gn}^{\pm} = P_{ng}^{\mp}. \tag{37}$$

由此可得

$$P_{gn}^{x}P_{ng}^{y} = \frac{P_{ng}^{\dagger} + P_{ng}^{-}}{2} \cdot \frac{P_{ng}^{\dagger} - P_{ng}^{-}}{2i} = \frac{i}{4} \left[|P_{ng}^{-}|^{2} - P_{ng}^{\dagger}|^{2} \right], \qquad (38)$$

$$P_{gn}^{v} P_{ng}^{x} = \frac{P_{ng}^{-} - P_{ng}^{-}}{2i} \cdot \frac{P_{ng}^{+} + P_{ng}^{-}}{2} = \frac{i}{4} \left[|P_{ng}^{+}|^{2} - |P_{ng}^{-}|^{2} \right], \qquad (39)$$

$$\frac{|P_{ng}^{-}|^{2}}{k_{gn}} = \frac{i}{4\pi} \sum_{gn} \left[\frac{|P_{ng}^{-}|^{2} - |P_{ng}^{+}|^{2}}{k_{gn} + k - i\Gamma_{gn}} - \frac{|P_{ng}^{-}|^{2} - |P_{ng}^{+}|^{2}}{k_{gn} - k + i\Gamma_{gn}} \right] = \frac{i}{2\pi} \sum_{gn} \left[\left(|P_{ng}^{-}|^{2} - |P_{ng}^{+}|^{2} \right) \cdot \frac{-k(k_{gn}^{2} - k^{2} - \Gamma_{gn}^{2}) + i\Gamma_{gn}(k_{gn}^{2} + k^{2} + \Gamma_{gn}^{2})}{(k_{gn}^{2} - k^{2} + \Gamma_{gn}^{2}) + 4k^{2}\Gamma_{gn}^{2}} \right].$$

(40)

$$j = -\frac{N\pi (\bar{n}^{2} + 2)^{2}}{9\bar{n}c h}$$

$$\sum_{ng} \frac{k\Gamma_{ng} (k_{ng}^{2} + k^{2}) (|P_{ng}|^{2} - |P_{ng}^{+}|^{2})}{(k_{ng}^{2} - k^{2})^{2}} d_{g}, \qquad (44)$$

其中(43)式最常用.

在用量子理论对磁光 Faraday效应计算时,首先 根据晶体对称性计算(或拟合)晶场参数,解出晶场 能级.然后考虑外磁场(或交换场)的作用,对于 Kramers离子,该作用将使晶场能级发生 Zeeman分 裂,解除能级简并;对非 Kramers离子,外磁场(或交 换作用)将导致晶场能级的互组合^[7],晶场态发生混 合,而使晶体产生磁性.经晶场和外磁场(或交换场) 作用后的离子能级和波函数分别用 E_n , |n>和 E_g , |g>表示,由此可计算电偶极跃迁矩阵元 P_{ng} , P_{ng} 和 粒子基态占有几率 d_g.

3 结束语

计算表明^[8,9]:对稀土石榴石晶体(Re YIG),经 晶场和交换作用劈裂后的稀土离子子能级,从 4f子 能级到 5d能级间的跃迁几率对右旋和左旋偏振光是

(下转第 28页 Continue on page28)

表 1 费米型氘 D_F 结构函数的矩

Table 1 The moment of the structure function of deuteron D_F of Fermi type

$n,\Lambda^2(\text{GeV})$	² 2		3	4	6	8
2, 569	0. 319	04 0.3	3184 0.	3151	0. 3112	0.3082
4, 57. 41	0. 039	0. 0	0382 0.	0367	0. 0323	0.0278
6, 41. 75	0. 012	27 0. (0098 0.	0095	0. 0084	0.0072
$\overline{n,\Lambda^2(\text{GeV})^2}$	10	20	30	40	50	100
2, 569	0. 3061	0. 2982	0. 2924	0. 2873	0. 2824	0. 2608
4, 57. 41	0. 0272	0.0237	0.0211	0.0189	0. 0171	0. 0117
6, 41. 75	0. 0060	0.0053	0.0046	0.0041	0. 0036	0. 0024

表 2 玻色型氘 D_B结构函数的矩

Table 2 The moment of the structure function of deuteron D_B of Bose type

$n,\Lambda^2(\text{GeV})^2$	2 2		3	4	6	8
2, 569	0. 785	57 O. 1	7833 0.	. 7752	0. 7656	0.7582
4, 57. 41	0. 095	59 0. (0940 0.	. 0903	0. 0795	0.0684
6, 41. 75	0. 031	12 0. (0241 0.	. 0234	0. 0207	0.0177
$n,\Lambda^2(\text{GeV})^2$	10	20	30	40	50	100
2, 569	0. 7470	0.7336	0.7203	0.7068	0. 6948	0. 6419
4, 57. 41	0. 0669	0.0583	0.0519	0.0465	0. 0421	0. 0288
6, 41. 75	0. 0148	0.0130	0.0113	0.0101	0. 0089	0. 0059

3 结束语

本文根据超对称理论,讨论了反氢原子的结构 和计算费米型氘核 *P*^{F¹n^P},以及玻色型氘核 *P*^{S¹n⁰}结

(上接第 24页 Continue from page 24)

相同的,但各个子能级的占有几率不同,从而导致磁 光 Faraday旋转.晶场的作用使得自由稀土离子的 5d 能级产生较大的劈裂,以致 4f和 5d态的晶场能级差 与入射光子能量 h k 相差的不是太远,否则不会产生 大的磁光偏转.可见晶场的大小对磁光效应影响很 大,选择合适的晶体材料,使置入其中的稀土离子受 到较强的晶体场作用是必要的.交换作用使晶场能级 进一步劈裂或混合是产生磁光效应的关键,它导致粒 子的基态占有几率不同.所以,较强的交换作用对产 生较强的磁光效应有利.

参考文献:

- Gomi M, K Satoh H, Furuyama. et al. Sputter deposition of Ce-substituted iron garnet films with giant magnetooptical effect[J]. IEEE Trans Magn(in Japan), 1990, 5 294.
- [2] Higuchi S, Ueda K, Yahiro F, et al. Fabrications of Cerium-substituted YIG thin films for magnetic field sensor by pulsed-laser deposition [J]. IEEE Trans Magn, 2001, 37 2451.

构函数的矩,结果发现反氢原子的结构与目前观测到 费米型反氢原子不同,氘核 $P_F^{-1}n_F^{0}$ 结构函数的矩的理 论值与实验数据较好相符, $P_B^{-1}n_B^{0}$ 结构函数的矩的计 算结果比 $P_F^{-1}n_F^{0}$ 要大,这是由于 $P_B^{-1}n_B^{0}$ 除了具有 $P_F^{-1}n_F^{0}$ 的组分外, $P_{F,T}$ 粒子对结构函数的贡献不可忽 略.

参考文献:

- [1] 焦善庆,唐 敏.在亚夸克模型中的新粒子族系[J].云 南工学院学报,1990,8(2): 87-96.
- [2] 焦善庆,兰其开.亚夸克理论[M].重庆:重庆出版社, 1996.191,159.
- [3] 焦善庆,江光佐,兰其开.编内费米子反物质和"编外"玻 色子反物质对称性的讨论[J].江西师范大学学报(自然 科学版),2002,26(4):288-293.
- [4] 费米实验室.费米实验室探测到反氢原子肯定了 1996
 年 CERN对反氢的观测实验[J]. CERN Courier, 1997,
 1 21.
- [5] 焦善庆.价.海亚夸克混合模型的 U-分布, Γ 分布 [J]. 云南大学学报(自然科学版), 2002, 24(1): 34-37.
- [6] 焦善庆.夸克集团的形状因子和结构函数[C].全国高能物理会议文集.济南:山东大学出版社,1980.64-67.

(责任编辑:黎贞崇)

- [3] Zhang G Y, Xu Y, Yang J H. The influence of the admixing of different multiples on the spin magnetic moment and Faraday effect of rare earth ions in garnets [J]. Acta Phys Sinica, 1994, 3 608.
- [4] 丁石孙.解析几何 [M].北京:人民教育出版社,1978. 151.
- [5] Condon E U, Shortley G H. The Theory of Atomic Spectra[M]. Cambridge Cambridge University, 1951.
- [6] Freiser M J. A Survey of Magneto optic Effects [J].
 IEEE Trans Magn, 1968, MAG-4(2): 152.
- [7] 张国营,杨杰惠,徐 游.稀土石榴石晶体磁光效应微观 机制研究[J].南京大学学报,1993,29 586.
- [8] Xu Y, Zhang G Y, Duan M Q. Calculations of the Faraday rotation in Re-substituted iron garnets [J]. J Appl Phys, 1993, 73: 6133.
- [9] Xu Y, Yang J H, Zhang G Y. A theoretical investigation on the magneto-optical spectra of Ce-substituted yttrium aluminium garnet [J]. J Phys Condense Matter, 1995, 7 6151.

(责任编辑:黎贞崇)