DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.01.006
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(1): 18~21

解线性互补问题的多重分裂乘性 Schwarz算法

A Multi-Splitting and Multiplicative Schwarz Algorithm for Solving Linear Complementarity Problems

段班祥[1],李郴良[2],徐安农[2]
Duan Banxiang[1], Li Chenliang[2], Xu Annong[2]

(1. 广东省科技干部学院软件工程系,广东珠海 519090;
2. 桂林电子工业学院计算科学与数学系,广西桂林 541004)
(1. Dept. of Software Engi., Guangdong Provincal College for Technical Personnel, Zhuhai, Guangdong, 519090, China; 2. Dept. of Comp. Sci.& Math., Guilin Univ. of Elec. Tech., Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 运用矩阵多重分裂理论并考虑并行计算,建立求解线性互补问题的多重分裂乘性 Schwarz迭代算法,给出算法的收敛性定理,应用加权最大模获得了算法的收敛速度.数值结果表明,多重分裂乘性 Schwarz迭代算法具有很好的有效性.

关键词: Schwarz算法 线性互补问题 多重分裂 加权最大模
中图法分类号: O241.6 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)01-0018-04

Abstract A multi-splitting and multiplicative Schwarz algorithm for solving linear complementarity problems was given. In particular, we establish the convergence theory of the algorithm and estimate weighted max-norm bounds for iteration errors. The simulation examples show that this algorithm is efficient.

Key words Schwarz algorithm, linear complementarity problem, multi-splitting, weighted max-norm

互补问题是一类重要的优化问题,它在线性规划、凸二次规划、双矩阵对策及经济与交通平衡等科学与工程中有着广泛的应用.本文考虑如下有限维线性互补问题: 求 $x\in R^n$ 使得

$$x\geqslant \Phi,\ Ax-F\geqslant 0,\ (x-\Phi)^T(Ax-F)=0, \qquad (0.1)$$

其中, $A\in R^{n\times n}$ 为一已知 M-矩阵,$\Phi,F\in R^n$ 为已知向量. 矩阵分裂理论已经被广泛应用于各种加性和乘性算法,这类方法具有良好的并行性能[1~6].针对方程情形,文献[7]分析了乘性 Schwarz迭代算法,并在加权最大模下获得了误差的几何收敛速度.本文将文献[7]中的 Schwarz迭代算法进一步推广,得到一类求解线性互补问题的高效数值算法,数值结果表明该算法的有效性.

1 算法的建立

定义 1.1[2,3] 设 $A\in R^{n\times n}$,如果① $M\in R^{n\times n}$是非奇异的且 $M^{-1}\geqslant 0$,② $N\in R^{n\times n}$且 $N\geqslant 0$,称 $A=M-N$为矩阵 A的正则分裂;如果 $M^{-1}\geqslant 0$且 $M^{-1}N\geqslant 0$,则称 $A=M-N$为矩阵 A的弱正则分裂.若 $M^{-1}\geqslant 0$,$N\geqslant 0$,且 M为 M-矩阵,则称 $A=M-N$为矩阵 A的 M-分裂.

显然 M-分裂一定为正则分裂.

算法 1.1(多重分裂乘性 **Schwarz**迭代算法)

步骤 1 取初值 $x^0\in R^n$,置 $k=0$;

步骤 2 令 $\tilde{x}^{k,0}=x^k$,对 A的多重 M-分裂 $A=M_i-N_i\ (i=1,2,\cdots,m)$,从 $i=1$到 $i=m$依次求解:

$$\begin{cases} x^{k,i}\geqslant \Phi^{k,i}, \\ M_i x^{k,i}-F^{k,i}\geqslant 0, \\ (x^{k,i}-\Phi^{k,i})^T(M_i x^{k,i}-F^{k,i})=0, \end{cases} \qquad (1.1)$$

收稿时间: 2004-09-23
修回日期: 2005-01-04
作者简介: 段班祥(1971-),男,湖南武冈人,助教,硕士,主要从事数值计算、应用软件开发等研究

其中，$O^{k,i} = O - \tilde{x}^{k,i-1}$，$F^{k,i} = F - A\tilde{x}^{k,i-1}$，并令 $\tilde{x}^{k,i} = \tilde{x}^{k,i-1} + \boldsymbol{E}_i x^{k,i}$，$\boldsymbol{E}_i$ 为非负对角阵，且 $0 \leqslant \boldsymbol{E}_i \leqslant \boldsymbol{I}$，$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵）；

步骤 **3** 令 $x^{k+1} = \tilde{x}^{k,m}$；

步骤 **4** $k := k + 1$，转步骤 2，直至收敛．

注 **1** 将 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 划分为一些子集的并：$S_i \subseteq S\ (i = 1, 2, \cdots, m)$，$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$，其中各子集可以是重叠的，也可以是非重叠的，定义

$$\boldsymbol{E}_i = (e_{kj}) = \begin{cases} \mathrm{T}_i, & k = j \in S_i \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \ \mathrm{T}_i > 0, \ \sum_{i=1}^{m} \mathrm{T}_i = 1.$$

因此，在计算中只须计算对应于 $(\boldsymbol{E}_i)_j \neq 0$ 的分量 $(x^{k,i})_j$，因而减少了计算量，提高了计算效率．

2 收敛性分析

先引入问题 (0.1) 的可行性集合的定义．

定义 **2.1**[5] 称 $Fea = \{z \in R^n : z \geqslant O, Az - F \geqslant 0\}$ 为问题 (0.1) 的可行性集合．

引理 **2.1**[6] 若 $\boldsymbol{A}$ 为一已知 M-矩阵，则线性互补问题 (0.1) 有唯一解 x^*．

引理 **2.2** 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分裂 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_i - \boldsymbol{N}_i$ 中，令 $\boldsymbol{M}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_i & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix}$，其中，$\bar{\boldsymbol{A}}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 相应于子标集 S_i 所对应的主子式矩阵，$\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 相应于子标集 $S - S_i$ 所对应的主子式矩阵或相应的对角阵，则 $\boldsymbol{M}_i$ 为 M-矩阵，且有 $\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{E}_i$．

证明 由引理的条件及 $\boldsymbol{A}$ 为 M-矩阵可知，$\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \bar{\boldsymbol{A}}_i$ 均为 M-矩阵，则 $\boldsymbol{M}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\boldsymbol{A}}_i & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix}$ 也为 M-矩阵，$\boldsymbol{E}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，直接计算可得 $\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{E}_i$．

引理 **2.3** 设 x^* 为问题 (0.1) 的解，如果 $\tilde{x}^{k,i-1} = x^*\ (1 \leqslant i \leqslant m)$，则有 $x^{k,i} = 0$．

证明 因为 $x^* \in Fea$ 为问题 (0.1) 的唯一解，故 $x^* \geqslant O$，$\boldsymbol{A}x^* - F \geqslant 0$，$(x^* - O)^T(\boldsymbol{A}x^* - F) = 0$．从而 $0 - O^{k,i} = (x^* - O) \geqslant 0$，$\boldsymbol{M}_i \cdot 0 - F^{k,i} = (\boldsymbol{A}x^* - F) \geqslant 0$．两式相乘，有

$0 \leqslant (0 - O^{k,i})^T(\boldsymbol{M}_i \cdot 0 - F^{k,i}) = (x^* - O)^T(\boldsymbol{A}x^* - F) = 0$．这说明 0 是问题 (1.1) 的解，由于 $\boldsymbol{M}_i$ 为 M-矩阵，问题 (1.1) 只有唯一解，故 $x^{k,i} = 0$．

引理 **2.4** 设 $x^{k,i}$ 为 (1.1) 的解，如果 $\tilde{x}^{k,i-1} \in Fea$，则 $x^{k,i} \leqslant 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$．

证明 因为 $\tilde{x}^{k,i-1} \in Fea$，所以 $\tilde{x}^{k,i-1} \geqslant O$，$\boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F \geqslant 0$，即 $0 \geqslant O - \tilde{x}^{k,i-1} = O^{k,i}$，$\boldsymbol{M}_i \cdot 0 \geqslant F - \boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} = F^{k,i}$，这说明 0 是 (1.1) 可行集合中的 1 个元，由于 $\boldsymbol{M}_i$ 是 M-矩阵，故子问题 (1.1) 的解 $x^{k,i}$ 是其可行性集合中的最小元，从而有 $x^{k,i} \leqslant 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$．

引理 **2.5** 如果 $\tilde{x}^{k,i-1} \in Fea$，则 $\tilde{x}^{k,i} \in Fea$；从而若 $x^k \in Fea$，则 $x^{k+1} \in Fea$．

证明 因为 $\tilde{x}^{k,i-1} \in Fea$，所以 $\tilde{x}^{k,i-1} \geqslant O$，$\boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F \geqslant 0$，于是有

$\tilde{x}^{k,i} = \tilde{x}^{k,i-1} + \boldsymbol{E}_i x^{k,i} \geqslant \tilde{x}^{k,i-1} + \boldsymbol{E}_i(O - \tilde{x}^{k,i-1}) = O + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_i)\tilde{x}^{k,i-1} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_i)O = O + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_i)(\tilde{x}^{k,i-1} - O) \geqslant O$，

$\boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i} - F = \boldsymbol{A}(\tilde{x}^{k,i-1} + \boldsymbol{E}_i x^{k,i}) - F = \boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F + \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i x^{k,i} = \boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F + \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{E}_i x^{k,i} - \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{E}_i x^{k,i} = \boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F + \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{M}_i x^{k,i} - \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{E}_i x^{k,i} \geqslant \boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F - \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F) - \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{E}_i x^{k,i} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_i)(\boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F) - \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{E}_i x^{k,i} \geqslant 0$，

其中最后一个不等式利用了 $\boldsymbol{I} \geqslant \boldsymbol{E}_i$，$(\boldsymbol{A}\tilde{x}^{k,i-1} - F) \geqslant 0$，$x^{k,i} \leqslant 0$ 及 $\boldsymbol{N}_i \geqslant 0$．这就证明了 $\tilde{x}^{k,i} \in Fea$．

此外，如果 $x^k \in Fea$，则由算法 1.1 可知 $\tilde{x}^{k,0} = x^k \in Fea$，由上面的证明可得：$\tilde{x}^{k,i} \in Fea$，$i = 1, 2, \cdots, m$，所以 $x^{k+1} = \tilde{x}^{k,m} \in Fea$．证毕．

定理 **2.6** 如果 $x^0 \in Fea$，则由算法 1.1 产生的序列 $\{x^k\}$ 收敛于问题 (0.1) 的唯一解 x，而且对 $\forall k \geqslant 0$，有 $x^k \in Fea$，$x \leqslant x^{k+1} \leqslant x^k$．

证明 如果 $x^0 \in Fea$，则由引理 2.5 可知，$\forall k \geqslant 0$，有 $x^k \in Fea$；又由 $\tilde{x}^{k,i} = \tilde{x}^{k,i-1} + \boldsymbol{E}_i x^{k,i}$ 及引理 2.4 可知 $x^{k+1} = \tilde{x}^{k,m} \leqslant \tilde{x}^{k,m-1} \leqslant \cdots \leqslant \tilde{x}^{k,0} = x^k$．由于 $\{x^k\}$ 单调递减有下界，故收敛．设 $x^k \to x^*\ (k \to \infty)$，则显然 $x^* \leqslant x^k\ (\forall k \geqslant 0)$．

另由引理 2.4 知 $x^{k,i} \leqslant 0$，故 $\lim_{k\to\infty} x^{k,i} \leqslant 0$，$\tilde{x}^{k,i} = \tilde{x}^{k,i-1} + \boldsymbol{E}_i x^{k,i}\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 及 $x^{k+1} = \tilde{x}^{k,m}$，两边分别取极限，可得 $\lim_{k\to\infty} x^{k,i} = 0$．于是由 (1.1) 可推出

$x^* - O \geqslant 0$，$\boldsymbol{A}x^* - F \geqslant 0$，$(x^* - O)^T(\boldsymbol{A}x^* - F) = 0$．

这说明 x^* 是问题 (0.1) 的解，由于 $\boldsymbol{A}$ 是 M-矩阵，因而可知 (0.1) 的解是唯一的，所以 $x = x^*$．

3 收敛速度分析

采用加权最大模分析迭代算法 1.1 的迭代误差．

定义 **3.1**[8] 设 $w \in R^n$ 是一正向量，对任意的向量 $y \in R^n$，称 $\|y\|_w = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left|\frac{y_j}{w_j}\right|$ 为向量 y 的加权

最大模;称 $\| A\|_w = \sup_{\|y\|_w = 1} \{ \| Ay\|_w | y \in R^n \}$为矩阵 A的加权最大模.

引理 3.1[7] 令 $A = M_i - N_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$是 A的正则分裂,E_i 为前面所定义的对角阵,令 $T = (I - E_m M_m^{-1} A)(I - E_{m-1} M_{m-1}^{-1} A)\cdots(I - E_1 M_1^{-1} A)$, 那么对任意满足 $e > 0$的向量 $w = A^{-1} e > 0$, $d(T) \leqslant \| T \|_w < 1$,而且 $I - E_i M_i^{-1} A \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$,其中 $d(T)$表示 T的谱半径.

引理 3.2[9] 设 P是一矩阵,w是一个正向量,r为一个正数,使得 $|P| w \leqslant rw$,则有 $\| P\|_w \leqslant r$,而且对任意的 x,有 $\| Px\|_w \leqslant r \| x\|_w$. 如果上述不等式严格成立,则有 $\| P\|_w < r$.

引理 3.3 设 $y^{k,i} = x^{k,i} + \tilde{x}^{k,i-1}$,那么 $y^{k,i}$是下述线性互补问题的解:

$$\begin{cases} y \geqslant O, \\ M_i y - \tilde{F}^{k,i} \geqslant 0, \\ (y - O)^T (M_i y - \tilde{F}^{k,i}) = 0, \end{cases}$$

其中,$\tilde{F}^{k,i} = F + N_i \tilde{x}^{k,i-1}$.

证明 由 $y^{k,i}$的定义可知: $y^{k,i} - O = x^{k,i} + \tilde{x}^{k,i-1} - O = x^{k,i} - O^{k,i}$;且

$M_i y^{k,i} - \tilde{F}^{k,i} = M_i x^{k,i} + M_i \tilde{x}^{k,i-1} - \tilde{F}^{k,i} = M_i x^{k,i} + M_i \tilde{x}^{k,i-1} - (F + N_i \tilde{x}^{k,i-1}) = M_i x^{k,i} + (M_i - N_i)\tilde{x}^{k,i-1} - F = M_i x^{k,i} + (A\tilde{x}^{k,i-1} - F) = M_i x^{k,i} - F^{k,i}$.

由(1.1)式知结论成立.

引理 3.4 设 x^* 是问题(0.1)的唯一解,记 $y^{k,i} = x^{k,i} + \tilde{x}^{k,i-1}$,则有

$$M_i | y^{k,i} - x^* | \leqslant N_i | \tilde{x}^{k,i-1} - x^* |.$$

证明 分 3种情况证明.

(1) 若 $(y^{k,i})_j > (x^*)_j$,由于 $x^* \geqslant O$,则有 $(y^{k,i})_j > (O)_j$. 由引理 3.3可得 $M_i y^{k,i} - \tilde{F}^{k,i} = 0$;由于 x^* 为(0.1)的解,故 $Ax^* - F \geqslant 0$. 将上两式相减,可得 $(M_i y^{k,i} - \tilde{F}^{k,i}) - (Ax^* - F) \leqslant 0$. 所以

$(M_i y^{k,i} - F - N_i \tilde{x}^{k,i-1}) - (Ax^* - F) = M_i y^{k,i} - N_i \tilde{x}^{k,i-1} - (M_i - N_i) x^* = M_i (y^{k,i} - x^*) - N_i (\tilde{x}^{k,i-1} - x^*) \leqslant 0$,

即 $M_i | y^{k,i} - x^* | \leqslant N_i (\tilde{x}^{k,i-1} - x^*) \leqslant N_i | \tilde{x}^{k,i-1} - x^* |$.

(2) 若 $(y^{k,i})_j < (x^*)_j$,这说明 $(x^*)_j > (O)_j$. 由引理 3.3可得 $M_i y^{k,i} - \tilde{F}^{k,i} \geqslant 0$,且 x^* 是问题(0.1)的解,故 $Ax^* - F = 0$,以下类似(1)的证明方法可知结论成立.

(3) 若 $(y^{k,i})_j = (x^*)_j$,此时由于 M_i 为 M-矩阵,则 M_i 的非对角元非正,所要求证明的不等式左边非正,且其右边是非负的,显然不等式成立.

引理 3.5 设 $X^{k,i} = \tilde{x}^{k,i} - x^*$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$,其中,x^* 为(0.1)的唯一解,那么有 $|X^{k,i}| \leqslant (I - E_i M_i^{-1} A) | X^{k,i-1}|$, $i = 1, 2, \cdots, m$.

证明 根据算法 1.1可知

$0 \leqslant | X^{k,i}| = |\tilde{x}^{k,i} - x^*| = |\tilde{x}^{k,i-1} + E_i x^{k,i} - x^*| \leqslant | X^{k,i-1} - E_i X^{k,i-1}| + | E_i (X^{k,i-1} + x^{k,i})| = | (I - E_i) \| X^{k,i-1}| + |E_i \| \tilde{x}^{k,i-1} - x^* + x^{k,i}| = (I - E_i) | X^{k,i-1}| + E_i | y^{k,i} - x^* | \leqslant (I - E_i) | X^{k,i-1}| + E_i M_i^{-1} N_i |\tilde{x}^{k,i-1} - x^*| = (I - E_i) | X^{k,i-1}| + E_i M_i^{-1} N_i | X^{k,i-1}| = (I - E_i + E_i M_i^{-1} N_i) | X^{k,i-1}| = (I - E_i (M_i^{-1} (M_i - N_i)))| X^{k,i-1}| (I - E_i M_i^{-1} A) | X^{k,i-1}|$.

上面的第三个不等式是根据引理 3.3及引理 3.4得到的.

定理 3.1 设 $X^k = x^k - x^*$ 为算法 1.1的迭代误差,x^* 是问题(0.1)的唯一解,则

$$0 \leqslant | X^{k+1}| \leqslant T | X^k|,$$

其中,$T = (I - E_m M_m^{-1} A)(I - E_{m-1} M_{m-1}^{-1} A)\cdots(I - E_1 M_1^{-1} A)$为一非负矩阵,并且存在 1个正向量 w和一个正数 $r \in (0, 1)$,使得 $\| T\|_w \leqslant r$,于是有

$$\| X^{k+1}\|_w \leqslant \| T X^k\|_w \leqslant r \| X^k\|_w.$$

证明 由引理 3.1知 $T = (I - E_m M_m^{-1} A)(I - E_{m-1} M_{m-1}^{-1} A)\cdots(I - E_1 M_1^{-1} A)$为一非负矩阵,由引理 3.5及算法 1.1,有

$| X^{k+1}| = | x^{k+1} - x^* | = |\tilde{x}^{k,m} - x^* | = | X^{k,m}| \leqslant (I - E_m M_m^{-1} A) | X^{k,m-1}| \leqslant (I - E_m M_m^{-1} A)(I - E_{m-1} M_{m-1}^{-1} A) | X^{k,m-2}| \cdots\cdots \leqslant (I - E_m M_m^{-1} A)(I - E_{m-1} M_{m-1}^{-1} A)\cdots(I - E_1 M_1^{-1} A) | X^{k,0}| = T | X^k|$.

因此,再由引理 3.1及 3.2引理可知结论成立.

推论 3.1 对任意的初始值 x^0,算法 1.1产生的迭代解序列 $\{x^k\}$ 收敛于问题(0.1)的解.

推论 3.1说明了算法的全局收敛性.

4 算例分析

以下两个算例考虑两重分裂情形:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & \bar{A}_2 \end{pmatrix}.$$

其中,$\bar{A}_1, \bar{A}_2, D_1, D_2$ 的定义同引理 2.2,算法的迭代终止原则为 $\| x^{n+1} - x^n\|_\infty \leqslant 10^{-6}$.

例 1 考虑如下线性互补问题:

$$x \geqslant 0, \; Ax - F \geqslant 0, \; x^T (Ax - F) = 0,$$

其中,$F = (1, 1, \cdots, 1)^T$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}_{n\times n};$$

本文的乘性 Schwarz算法 (MSA)与投影逐次超松弛的迭代次数的数值比较如表 1所示.

表 1 乘性 Schwarz方法与投影 SOR方法的比较

Table 1 The comparison of multiplicative Schwarz algorithm and projected SOR algorithm

维数 Dimensionality	PSOR(ω = 0. 85) (ω = 0. 85)	MSA
n = 10	31	8
n = 50	32	3
n = 100	40	2
n = 500	41	3

例 2 考虑如下线性互补问题[10]: $z\geqslant 0, q+Mz\geqslant 0, z^T(q+Mz)=0$.

其中, $q=(-1,-1,\cdots,-1)^T$.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & \cdots & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 9 & \cdots & 10 & 10 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 6 & 10 & \cdots & U_1 & U_2 \\ 2 & 6 & 10 & \cdots & U_3 & U_4 \end{pmatrix}_{n\times n};$$

其中, $U_1=4((n-1)-1)+1$; $U_2=4n-2$; $U_3=4n-2$; $U_4=4(n-1)+1$.

该问题的精确解为 $z^*=(1,0,\cdots,0)^T$, 本文提出的乘性 Schwarz方法与 PJacobi (投影雅可比)、PSOR(投影逐次超松弛)的数值比较如表 2所示.

这 2个算例很好地说明乘性 Schwarz算法具有很好的有效性.

表 2 乘性 Schwarz方法与 PJacobi 投影 SOR方法的比较

Table 2 The comparison of multiplicative Schwarz algorithm, projected Jacobi algorithm and projected SOR algorithm

维数 Dimensionality	PJacobi	PSOR(k = 0. 85)	MSA
n = 6	16	20	7
n = 13	63	20	5
n = 50	150	28	4

参考文献:

[1] 曾金平. 求解线性互补问题的乘性 Schwarz算法的收敛速度估计 [J]. 计算数学, 1997, 3: 225-232.

[2] Varga R. Matrix Iterative Analysis [M]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.

[3] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[4] Bai Z Z, Evans D J. Chaotic iterative methods for linear complementarity problems [J]. J Comput Appl Math, 1998, (96): 127-138.

[5] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. The Linear Complementarity Problem [M]. San Diedo: Academic Press, 1992.

[6] Zeng J P, Li D H, Fukushima M. Weighed max-norm estimate of additive Schwarz iteration scheme for solving linear complementarity problems [J]. J Comput Appl Math, 2001, (131): 1-14.

[7] Benzi M, Frommer A, Nabben R, Szyld D B. Algebraic theory of multiplicative schwarz methods [J]. Numer Math, 2001, (89): 605-639.

[8] Householder A S. The Theory of Matices in Numerical Analysis [M]. Blaisdell, Waltham, MA, 1964.

[9] Frommer A, Szyld D B. Weighed max norm, splitting, and overlapping additive Schwarz iterations [J]. Numer Math, 1999, (83): 259-278.

[10] Frield A, Martinez J M, Stantos S A. A new strategy for solving variational inequalities in bounded polytopes [J]. Numer Funct and Optimiz, 1995, 16(5~6): 653-668.

(责任编辑: 黎贞崇)

氮化硅陶瓷性能增强的原因

过去 20年中,氮化硅陶瓷的高温应用被广泛研究。添加稀土元素能改进氮化硅陶瓷的机械和物理性能,但是人们不了解这是为什么,以及为什么有些稀土元素比其他元素的效果更好。Alexander Ziegler和同事研究指出,这些原子的位置在氮化硅基体晶粒和薄粒间相的界面。他们表示,氮化硅晶粒有许多空悬键,稀土原子就附着到这些键上。附着的位置取决于稀土原子的大小、电子位形以及界面是否有氧,最后影响到陶瓷的强度。Alexander zxiegler和同事的研究帮助解释了为什么某些稀土原子比其他原子能更好地改进氮化硅陶瓷的机械性能。

(据《科学时报》)