DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.01.004

全稳定广义生-灭最小 Q过程的构造*

The Minimal Q-Process for a Stable Extended Birth-Death Q-Matrix

吴群英,林 亮

Wu Qunying, Lin Liang

(桂林工学院数理系,广西桂林 541004)

(Dept. of Math.& Phy., Guilin Univ. of Tech., Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 结合分解定理,研究全稳定广义生-灭最小 Q过程的具体构造.最小 Q过程对所有 Q过程的构造以及研究 Q过程的性质起到极其重要的作用.

关键词: 全稳定广义生-灭过程 最小 Q 过程 分解定理

中图法分类号: O211.62 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)01-0010-04

Abstract A new structure with special catastrophe property is imposed to ordinary Birth-Death processes. The minimal Q-process for a stable extended birth-death Q-matrix with catastrophes is established. The minimal Q-process is very important for the constructions and the properties of all kinds of Q-process.

Key words stable extended birth-death Q-process, minimal Q-process, construction theorem

设状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$, Q-矩阵具有形式

$$Q=\begin{pmatrix} -q_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ d_1 & U_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ d_2 & \__2 & U_2 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ d_3 & 0 & \__3 & U_3 & \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad (0.1)$$

其中, $U_1=-(\lambda_1+d_1)$; $U_i=-(\lambda_i+\__i+d_i)$, $i\geqslant 2$; $\lambda_i>0$, $d_i\geqslant 0$, $c_i\geqslant 0$, $i\geqslant 1$; $\__i>0$, $i\geqslant 2$.如 $q_0<\infty$,则 Q是全稳定的, Q过程一定存在,例如 Feller最小 Q过程[1~4];否则 Q是单瞬时的,这时, Q过程不一定存在[4~8]. (0.1)式的 Q-矩阵可以看成具有突变率 d_i的广义生-灭过程(特别当 $d_1>0$, $c_1>0$; $d_i=0$, $c_i=0$, $i\geqslant 2$时, Q即为通常的生-灭过程).有关生-灭过程的研究已获得许多深刻的理想结果,其主要结果被总结在侯振挺等[4]的专著.近几年我们系统研究具有(0.1)式的(拟)Q-矩阵,取得了一系列的结果,关于单瞬时情形 Q过程存在的充分必要条件, Q过程的构造及其性质的结果见文献[5~8],全稳定广义生-灭 Q过程的收敛性质见文献[9,10].本文在文献[11]的基础上,结合分解定理研究全稳定广义生-灭最小 Q过程的具体构造.由于最小 Q过程在 Q过程理论中占据重要位置,所以具体构造出最小 Q过程很有意义.

收稿日期: 2004-03-25

作者简介: 吴群英(1961-),女,广西柳州人,教授,博士,主要从事概率论与数理统计研究.

* 广西自然科学基金(桂科基 0339071)和广西教育厅(桂教科研[2003]22号)资助项目.

1 若干引理

设 E为可列集, M_E表示定义在 E上的有界列向量的全体, L_E表示定义在 E上的可和行向量的全体.设 Q是给定的一个定义在 E上的 Q-矩阵, $J(\lambda)$是一个相应的 Q过程.

定义 1.1 称定义在 E上的行向量 $Z(\lambda)$, $\lambda>0$ 是关于 $J(\lambda)$的一个广义行协调族(简称广行族),如果下列 2条满足:

$$0\leqslant Z(\lambda)\in L_E, \lambda>0;$$

$$Z(\lambda)-Z(\_)=(\_-\lambda)Z(\lambda)J(\_), \lambda,\_>0.$$

关于 $J(\lambda)$的广义行协调族的全体记作 $L_{J(\lambda)}$.特别,当 Q全稳定, $J(\lambda)$为最小 Q过程 $H(\lambda)$时,相应的广义行协调族称为标准行协调族,简称为行协调族,行协调族的全体记作 $L_{H(\lambda)}$.

称定义在 E上的列向量 $a(\lambda)$, $\lambda>0$是关于 $J(\lambda)$的一个广义列协调族(简称广列族),如果下列 2条满足:

$$0\leqslant a(\lambda)\in M_E, \lambda>0;$$

$$a(\lambda) - a(\mu) = (\mu - \lambda) J(\lambda) a(\mu), \lambda, \mu > 0.$$

关于 $J(\lambda)$ 的广义列协调族的全体记作 $M_{J(\lambda)}$. 同样有 $M_{H(\lambda)}$ 的含义.

从定义可知,广义协调族与 $J(\lambda)$ 关于参数 λ 可交换,即恒有

$$Z(\lambda) J(\mu) = Z(\mu) J(\lambda)$$

及 $$J(\lambda) a(\mu) = J(\mu) a(\lambda).$$

定义 1.2 称 $Z(\lambda)$ 及 $a(\lambda)$ 是关于 $J(\lambda)$ 的广义共轭协调对,如果下列 2条满足

$Z(\lambda) \in L_{J(\lambda)}$, $a(\lambda) \in M_{J(\lambda)}$;

$a(\lambda) \leqslant \mathbf{1} - \lambda J(\lambda) \mathbf{1}$.

关于 $J(\lambda)$ 的广义共轭协调对全体记作 $D_{J(\lambda)}$. 同样可理解共轭协调对 $D_{H(\lambda)}$.

记 $E_0 = E - \{0\}$, $Q_{E_0} = \{q_{ij}; i, j \in E_0\}$ 是 Q 在 E_0 上的限制, Q_{E_0} 是无限非保守广义生灭矩阵,它具有下形式

$$Q_{E_0} = \begin{pmatrix} U_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ \mu_2 & U_2 & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & \mu_3 & U_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

其中, $U_1 = -(\lambda_1 + d_1)$; $U_i = -(\lambda_i + \mu_i + d_i)$, $i \geqslant 2$.

引理 1.1[11] 记

$$z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{\lambda_1}, \cdots, z_n = \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{n-1}}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}},$$

$$n \geqslant 3, z \triangleq \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{n-1}}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n};$$

$$c_1 = 1, c_n = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}, n \geqslant 2.$$

则方程 $Q_{E_0} u = \mathbf{0}$ 的解 u 存在且解为

$$u_i = u_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (z_i - z_j) d_j u_j c_j. \qquad (1.1)$$

方程 $(\lambda I - Q_{E_0}) u = \mathbf{0}, \lambda > 0$

的解 $u(\lambda)$ 存在且解为

$$u_i(\lambda) = u_1(\lambda) + \sum_{j=1}^{i-1} (z_i - z_j)(\lambda + d_j) u_j(\lambda) c_j. \qquad (1.2)$$

引理 1.2[11] 设 $u(\lambda)$ 是方程 $(\lambda I - Q_{E_0}) u = \mathbf{0}$, $\lambda > 0$ 的解,即由 (1.2) 式给出,令

$$v_i(\lambda) = u_i(\lambda) \sum_{j=i}^{\infty} \frac{z_{j+1} - z_j}{u_j(\lambda) u_{j+1}(\lambda)}, i \geqslant 1,$$

$$h^*_{ij}(\lambda) = \begin{cases} u_i(\lambda) v_j(\lambda) c_j, j > i, \\ v_i(\lambda) u_j(\lambda) c_j, j \leqslant i. \end{cases} \qquad (1.3)$$

则 $H^*(\lambda) = \{h^*_{ij}(\lambda); i, j \in E_0\}$ 是最小 Q_{E_0} 过程.

引理 1.3[4] (分解定理) 设给定了 E 上的一个拟 Q-矩阵 Q, $b \in E$, 令 $E_1 = E \setminus \{b\}$, 如果存在一个 Q_{E_1} 过程 $J(\lambda)$ 及一个关于 $J(\lambda)$ 的共轭广义协调对

$$(Z(\lambda), a(\lambda)) \in D_{J(\lambda)},$$

满足以下 3条.

$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda (Z(\lambda), a(\lambda)) = (\boldsymbol{e}, \varepsilon)$; $\boldsymbol{e} = (q_{bj}; j \in E_1)$, $X = (q_{jb}; j \in E_1)^{T}$;

$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda [Z(\lambda), \mathbf{1} - a] < +\infty$;

当 $q_b < +\infty$ 时,要求 $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda [Z(\lambda), \mathbf{1}] \leqslant q_b$;

当 $q = +\infty$ 时,要求 $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda [Z(\lambda), \mathbf{1}] = +\infty$ 或等价地 $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda [Z(\lambda), a] = +\infty$, 则 Q 是 E 上的 Q-矩阵. 换而言之,必存在 E 上的 Q 过程. 其 Q 过程可如下构造:

如 $q_b < +\infty$, 取常数 $c = q_b - \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda [Z(\lambda), a]$.

如果 $q_b = +\infty$, 取常数 $c \geqslant \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda [Z(\lambda), \mathbf{1} - a]$. 然后,令

$$r_{bb}(\lambda) = (c + \lambda + \lambda [Z(\lambda), a])^{-1},$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ a(\lambda) \end{pmatrix} (1, Z(\lambda)),$$

则 $R(\lambda)$ 就是一个 Q 过程. 且 $R(\lambda)$ 诚实的充分必要条件是

$$a(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda J(\lambda) \mathbf{1}, r_{00}(\lambda) = (\lambda + \lambda Z(\lambda) \mathbf{1})^{-1}.$$

定义 1.3 Q-矩阵 $Q = \{q_{ij}; i, j \in E\}$ 称为不可约的,若对每一个 i 和 $j \neq i$, 存在逐个不同的 $i_0 = i$, $i_1, \cdots, i_{n-1}, i_n = j$, 使得 $q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_{n-1} i_n} \neq 0$.

显然,形如 (0.1) 的 Q-矩阵不可约的充分必要条件是存在 i, j, 使 $c_i > 0, d_j > 0$, 本文设 Q 是不可约的,否则, Q 可转化为一般生灭 (拟) Q-矩阵来处理.

引理 1.4 设 Q 不可约, 则

$$h^*_{ij} \triangleq \lim_{\lambda\to 0} h^*_{ij}(\lambda) < \infty, \forall i, j \geqslant 1. \qquad (1.4)$$

证明 由 $v_i(\lambda)$, $u_i(\lambda)$ 的定义及 (1.3) 有

$$h^*_{ij} = \begin{cases} u_i u_j c_j \sum_{k=j}^{\infty} \frac{z_{k+1} - z_k}{u_k u_{k+1}}, j > i, \\ u_i u_j c_j \sum_{k=i}^{\infty} \frac{z_{k+1} - z_k}{u_k u_{k+1}}, j \leqslant i. \end{cases}$$

所以要证 $h^*_{ij} < \infty, \forall i, j \geqslant 1$, 只要证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{n+1} - z_n}{u_n u_{n+1}} < \infty$ 即可,因 Q 不可约,即 d_i 不全为零,不妨设 $d_1 \neq 0$, 由 (1.1) 知 $u_n \geqslant z_n d_1$, 由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{n+1} - z_n}{u_n u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{d_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{n+1} - z_n}{z_n z_{n+1}} \leqslant \frac{1}{d_1^2} < \infty.$$

2 最小 Q 过程的构造及其性质

本节通过引理 1.2给出的最小 Q_{E_0} 过程 $H^*(\lambda)$, 以及引理 1.3给出的分解定理构造出最小 Q 过程.

定理 2.1 设 $H(\lambda)$ 是最小 Q 过程,则 $H(\lambda)$ 可如下构造

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H^*(\lambda) \end{pmatrix} + r_{00}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ a(\lambda) \end{pmatrix} (1 \quad Z(\lambda)),$$

$$(2.1)$$

其中 $H^*(\lambda)$ 是最小 Q_{E_0} 过程,即由(1.3)给出,

$$Z(\lambda)=\boldsymbol{e}H^*(\lambda),\ \boldsymbol{e}=(q_{0j};j\in E_0)=(c_1,c_2,\cdots),$$

$$a(\lambda)=\boldsymbol{1}-\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1},$$

$$r_{00}(\lambda)=(c+\lambda+\lambda Z(\lambda)\boldsymbol{1})^{-1},$$

$$c=q_0-\sum_{i=1}^{\infty}c_i. \tag{2.2}$$

证明 因 $\boldsymbol{e}H^*(\lambda)\boldsymbol{1}\leqslant \boldsymbol{e1}/\lambda<\infty$,所以 $Z(\lambda)\in L_{H^*(\lambda)}$,从而由文献[4]引理4.1.4得

$$(Z(\lambda),a(\lambda))\in D_{H^*(\lambda)},$$

以及 $\lambda Z(\lambda)(\boldsymbol{1}-a)<\infty$ 且与 λ 无关,这里

$$a\triangleq\lim_{\lambda\to 0}a(\lambda).$$

又因 $\sum_{i=1}^{\infty}c_i\lambda h^*_{ij}(\lambda)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}c_i<\infty$,

所以由控制收敛定理及标准性条件得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda Z_j(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\lambda h^*_{ij}(\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda h^*_{ij}(\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}c_iW_{ij}=c_j.$$

又因 $H^*(\lambda)$ 是 B 型的,所以

$$(\lambda I-Q_{E_0})(\boldsymbol{1}-\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1})=\lambda\boldsymbol{1}-Q_{E_0}\boldsymbol{1}-\lambda\boldsymbol{1}=-Q_{E_0}\boldsymbol{1}=(d_1,d_2,\cdots)^{\mathrm{T}}=(q_{j0};j\in E_0)^{\mathrm{T}}\triangleq\boldsymbol{d}.$$

所以

$$\lambda(\boldsymbol{1}-\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1})=\boldsymbol{d}+Q_{E_0}(\boldsymbol{1}-\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1}),$$

故

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda a(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\boldsymbol{1}-\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1})=\boldsymbol{d}+\lim_{\lambda\to+\infty}Q_{E_0}(\boldsymbol{1}-\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1}). \tag{2.3}$$

由 Q 条件,以及因

$$\sum_{k\neq i}q_{ik}\sum_{j=1}^{\infty}h^*_{kj}(\lambda)\leqslant\sum_{k\neq i}q_{ik}/\lambda\leqslant q_i/\lambda<\infty,$$

$$h^*_{ij}(\lambda)\downarrow 0,\ \lambda\to+\infty,$$

由控制收敛定理,单调收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda h^*_{ij}(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(W_{ij}+\sum_{k=1}^{\infty}q_{ik}h^*_{kj}(\lambda))=$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(1+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\neq i}q_{ik}h^*_{kj}(\lambda)-\sum_{j=1}^{\infty}q_ih^*_{ij}(\lambda))=1+$$

$$\sum_{k\neq i}\sum_{j=1}^{\infty}q_{ik}\lim_{\lambda\to+\infty}h^*_{kj}(\lambda)-\sum_{j=1}^{\infty}q_i\lim_{\lambda\to+\infty}h^*_{ij}(\lambda)=1,$$

所以

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1}=\boldsymbol{1}. \tag{2.4}$$

再由控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}Q_{E_0}(\boldsymbol{1}-\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1})=Q_{E_0}\lim_{\lambda\to+\infty}(\boldsymbol{1}-\lambda H^*(\lambda)\boldsymbol{1})=\boldsymbol{0}.$$

代入(2.3)即得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda a(\lambda)=\boldsymbol{d}.$$

由文献[4]引理4.1.3知 $\lambda Z(\lambda)(\boldsymbol{1}-a)=\lim_{\mu\to 0}\mu Z(\mu)\boldsymbol{1}$,下证

$$\lim_{\mu\to 0}\mu Z(\mu)\boldsymbol{1}=0. \tag{2.5}$$

先证

$$Y(\lambda)\triangleq\boldsymbol{e}-\lambda\boldsymbol{e}H^*(\lambda)\in L_{H^*(\lambda)}. \tag{2.6}$$

显然 $Y(\lambda)\boldsymbol{1}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}c_i<\infty$,即 $Y(\lambda)$ 是可和的.又由 $H^*(\lambda)$ 的预解方程得

$(\lambda-\mu)Y(\lambda)H^*(\mu)=(\lambda-\mu)(\boldsymbol{e}-\lambda\boldsymbol{e}H^*(\lambda))H^*(\mu)=(\lambda-\mu)\boldsymbol{e}H^*(\mu)-(\lambda-\mu)\lambda\boldsymbol{e}H^*(\lambda)H^*(\mu)=(\lambda-\mu)\boldsymbol{e}H^*(\mu)-\lambda\boldsymbol{e}(H^*(\mu)-H^*(\lambda))=\boldsymbol{e}-\mu\boldsymbol{e}H^*(\mu)-(\boldsymbol{e}-\lambda\boldsymbol{e}H^*(\lambda))=Y(\mu)-Y(\lambda)$.

故(2.6)成立,由此得出 $Y(\mu)$ 关于 μ 单调下降,从而

$\mu\boldsymbol{e}H^*(\mu)$ 关于 μ 单调上升,即 $\mu\boldsymbol{e}H^*(\mu)$ 的每一个分量 $\sum_{i=1}^{\infty}c_ih^*_{ij}(\mu)$ 关于 μ 单调上升,由单调收敛定理得

$$\lim_{\mu\to 0}\mu Z(\mu)\boldsymbol{1}=\lim_{\mu\to 0}\mu\boldsymbol{e}H^*(\mu)\boldsymbol{1}=$$

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\mu h^*_{ij}(\mu)=\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\mu h^*_{ij}(\mu),$$

又由 $\sum_{i=1}^{\infty}c_ih^*_{ij}(\mu)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}c_i<\infty$,

所以在上式用控制收敛定理,且由引理1.4,即(1.5)式得

$$\lim_{\mu\to 0}\mu Z(\mu)\boldsymbol{1}=\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\mu h^*_{ij}(\mu)=$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\lim_{\mu\to 0}\mu h^*_{ij}(\mu)=0.$$

故(2.5)成立,从而得

$$\lambda Z(\lambda)(\boldsymbol{1}-a)=0,$$

由上式,控制收敛定理及(2.4)得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda Z(\lambda)a=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda Z(\lambda)\boldsymbol{1}=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\boldsymbol{e}H^*(\lambda)\boldsymbol{1}=$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i\sum_{j=1}^{\infty}\lambda h^*_{ij}(\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda h^*_{ij}(\lambda)=$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_i,$$

所以

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda Z(\lambda)a=q_0-c,$$

且

$$c=q_0-\sum_{i=1}^{\infty}c_i\geqslant 0=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda Z(\lambda)(\boldsymbol{1}-a).$$

故由分解定理知由(2.1)式定义的 $H(\lambda)$ 是 Q 过程.又因 $H^*(\lambda)$ 是 B 型和 F 型的,由文献[4]引理4.1.7,引理4.1.8知在 $H(\lambda)$ 构造中的 $Z(\lambda)$,$a(\lambda)$ 的取法是最小的,故 $H(\lambda)$ 是最小 Q 过程.定理证毕.

定理 2.2 $H(\lambda)$ 诚实的充分必要条件是 $q_0=\sum_{i=1}^{\infty}c_i$.充分必要条件是 Q 是保守的.

证明 由引理1.3给出的分解定理及定理2.1的证明过程知,$H(\lambda)$ 诚实的充分必要条件是

$c = 0,$

由(2.2),上式等价于

$$q_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i.$$

显然这又等价于 Q 是保守的.定理证毕.

参考文献:

[1] Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains. Springer, Series in Statistics [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[2] Feller W. On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes [J]. Trans Ann Math Soc, 1940, 48: 488-515.

[3] Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on L[J]. Acta Math, 1957, 97: 1-46.

[4] 侯振挺,刘再明,张汉君,等.生灭过程[M].长沙:湖南科学技术出版社,2000.

[5] Wu Q Y, Zhang H J, Hou Z T. An extended birth-death Q-matrix with instantaneous state (I) [J]. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 2003, 24(2): 159-168.

[6] 吴群英,张汉君,侯振挺.具有突变率、含瞬时态的广义生灭矩阵(I)[J].数学年刊(A辑),2003,24(2):187-192.

[7] Wu Q Y, Zhang H J, Hou Z T. An extended birth-death Q-matrix with instantaneous state (II) [J]. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 2003, 24(4): 317-328.

[8] 吴群英,张汉君,侯振挺.具有突变率、含瞬时态的广义生灭矩阵(II)[J].数学年刊(A辑),2003,24(5):555-564.

[9] 吴群英.广义全稳定生-灭过程[J].系统科学与数学,2003,23(4):517-528.

[10] 吴群英.广义生灭过程—强遍历性[J].工程数学学报,2002,19(1):104-108.

[11] Wu Qunying. The minimal Q-process and its properties for an extended birth-death Q-matrix [J]. Mathematica Applicata, 2002, 15(4): 79-84.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第9页 Continue from page 9)

参考文献:

[1] 刘木兰.数学在密码学中的某些应用[J].数学的实践与认识,1986,3:47-55.

[2] Ribenboim. On the factorization of $x^n + Bx - A$ [J]. Enseign Math, 1991, 37: 191-200.

[3] 陈宏基.关于三项式 $x^n - x - a$ 的二次因式[J].数学杂志,2002,22(3):319-322.

[4] 杨仕椿.关于 $x^n - bx - a$ 的二次整系数因式[J].长沙铁道学院学报,2003,(4):77-81.

[5] 乐茂华. $x^n - x - a$ 的不可约二次因式[J].黄岗师范学院学报,2003,(23)3:1-2.

[6] Rabinowitz S. The factorizations of $x^5 \pm x + n$ [J]. Math Mag, 1968, 61: 191-193.

[7] Y Bilu, G Hanrot, P M Voutier. Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers [J]. J Reine Angew Math, 2001, 529: 75-122.

[8] P M Voutier. Primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers[J]. Math Comp, 1995, 64: 869-888.

(责任编辑:黎贞崇)