

# 多重魔梯的一个数值例证<sup>\*</sup>

## An Numerical Evidence of Multiple Devil's Staircase

王旭明

Wang Xuming

(宁夏大学物理电气信息学院 宁夏银川 750021)

(Coll. of Phys. & Elec. Info. Sci., Ningxia Univ., Yinchuan, Ningxia, 750021, China)

**摘要** 介绍在电子张弛振荡器中观察到的对称多重魔梯, 它实际只有两个不连续点, 但所谓的特征周期点随参数变化的移动方向在其中的一个锁相台阶内发生了改变, 由此导致 3 个碰撞模式, 其中 2 个完全对称. 在此基础上, 构造和解析多重魔梯的简化模型, 结果说明映象函数斜率的非线性变化能够导致类似的现象.

**关键词** 对称多重魔梯 碰撞模式 不连续系统

中图分类号 O322

**Abstract** An occurrence of a symmetric multiple Devil's staircase in an electronic relaxation oscillator was reported. In this system, there actually are two discontinuous points. However, the changing of moving direction of the so-called characteristic periodic point inside one of the phase-locked plateaus lead to three modes. Two of them are exactly symmetric. A simplified model to show that a nonlinear variation of mapping function slope can induce this phenomenon were constructed.

**Key words** symmetric multiple Devil's staircase, collision mode, discontinuous system

锁相行为广泛存在于各种物理系统<sup>[13]</sup>, 可由绕数-参数空间的魔梯描述, 它依据几何结构的不同, 分为传统魔梯和多重魔梯两类. 传统魔梯以锁相台阶分布的单调性和自相似性为特征, 表现为台阶分布遵从 Farey 树法则. 1998 年首次在一个不连续映象中发现多重魔梯<sup>[4]</sup>, 其显著特点是台阶分布失掉单调性和自相似性, 并通常显示许多相似的塔形结构, 每座塔由两支传统魔梯构成, 称此为多重魔梯的谐和结构. 它的失谐结构最近相继在不连续一维映象<sup>[5]</sup>和不连续二维映象中发现<sup>[6]</sup>. 这意味着多重魔梯及其失谐结构是不连续耗散系统的普遍特征.

研究表明: 产生多重魔梯的决定性因素在于不连续系统中周期轨道与系统不连续边界之间边界碰撞分岔的碰撞模式<sup>[4,7]</sup>的多重性. 碰撞模式是一个周期轨道在其锁相台阶两端点的参数下与系统不同边界(或不连续点)碰撞的方式. 这是因为一个周期轨道会因边界碰撞分岔而产生, 也因边界碰撞分岔而失稳. 一维系统台阶的碰撞模式可用与相应轨道碰撞的系统的 2 个不连续点表示. 多重魔梯通常连接着 V 型阵发<sup>[8]</sup>, 所以多重魔梯是 V 型阵发的前奏<sup>[6]</sup>. 同传统魔

梯相比, 多重魔梯也有非常重要的理论意义.

然而, 迄今尚未见有关实际系统中观察到多重魔梯的报道. 我们幸运地在对一个电子张弛振荡器的数值模拟中观察到了一个单一对称的塔结构的多重魔梯. 本文报道作为多重魔梯数值例证的这个结果, 并运用一个简化模型讨论相关机制.

### 1 电子张弛振荡器模型

图 1 是一个电子张弛振荡器的电路图<sup>[9]</sup>.  $T$  是闸流管, 它和附加的信号源  $g(t)$  相当于一个可控电子开关. 电容  $C$  分别通过电阻  $R_1$ 、 $R_2$  充、放电. 它所产生张弛振荡的几何模型, 即累积-触发模型, 是在一个正弦调制的上阈值  $U_{upper} = U_{max} - U_0 \sin \omega t$  和一个常下阈值  $U_{lower} = U_{min}$  之间的张弛过程. 若把上阈值上张弛转变点的调制信号的相位当作  $x_n$ , 即得 Poincaré 映

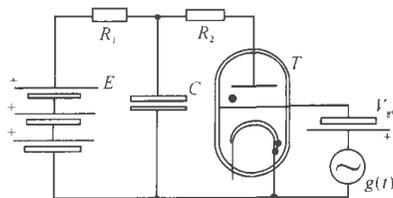


图 1 一种电子张弛振荡器原理

Fig 1 The principal circuit of an electronic relaxation oscillator

2004-04-27 收稿.

\* 宁夏大学科研基金资助.

象为

$$x_n + A_1 + B_1 \ln(C_1 + \sin(x_n)) = x_{n+1} + A_2 + B_2 \ln(C_2 + \sin(x_{n+1})) \bmod [2\pi]. \quad (1)$$

显然  $x_n, x_{n+1}$  分别为相邻两次张弛振荡达到上阈值处相应的上阈值调制信号的位相。

$$A_1 = \omega RC \ln(v_0 / U_{\min} - (R/R_1)E), B_1 = \omega RC, C_1 = (U_{\max} - (R/R_1)E) / U_0,$$

$$A_2 = \omega R_1 C \ln(U_0 / (E - U_{\min})), B_2 = \omega R_1 C, C_2 = (E - U_{\max}) / U_0, R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2),$$

其中  $\omega, U_0$  作为控制参数分别为上阈值正弦调制信号的圆频率与振幅, 电路的其他参数为:

$$E = 99.0V, R_1 = 200k\Omega, R_2 = 170k\Omega, C = 1.65 \times 10^{-8}F, U_{\max} = 64V, U_{\min} = 51.2V.$$

映象(1) 随参数  $\omega, U_0$  变化在连续与不连续、可逆与不可逆间转变. 转变的临界条件为

$$U_0 = \frac{(U_{\max} - RE/R_1)}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (2)$$

$$\text{和 } U_0 = \frac{(E - U_{\max})}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad (3)$$

其中(2) 式是不可逆的临界条件, (3) 式是不连续的临界条件. 两条临界线(交点记作  $U_{0c}, \omega_c$ ) 把  $U_0 - \omega$  参数平面划分为 4 个性质完全不同的区域:

(I) 低于两临界线的区域, 映象连续且可逆, 系统可能具有周期或准周期行为;

(II)  $\omega < \omega_c$  时, 两临界线之间的映象连续但不可逆, 系统可能有混沌或周期吸引子;

(III)  $\omega < \omega_c$  时, 两临界线之间的映象可逆但不连续, 系统可能仅有周期吸引子;

(IV) 高于两临界线的区域映象既不连续又不可逆. 系统行为强烈依赖于不连续与不可逆的相互作用.

本文讨论(III)(IV) 两情形下系统的锁相行为.

## 2 对称魔梯与对称碰撞模式

对周期轨道, 可采用圆映象中绕数的传统定义

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x_0) - x_0}{n} = \frac{P}{Q}, \quad (4)$$

其中,  $Q$  为轨道在一个周期内的迭代次数;  $P$  为一个周期内迭代扫过的圈( $2\pi$ ) 数. 图 2 为本文通过数值搜索计算得到的多重魔梯. 依据 Lyapunov 指数的传统定义

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f^{(i)}(x_0 + \epsilon) - f^{(i)}(x_0)}{\epsilon} \right|, \quad (5)$$

计算了对应图 2a 参数区的 Lyapunov 指数谱以区分某

些极短台阶与混沌. 结果由图 2b 显示. 图 2a 显示的多重魔梯只有一个对称的塔结构. 一些具有相同绕数  $W$  的台阶对称地分布在上升枝和下降枝上. 台阶分布的单调性在塔顶上发生了改变. 本文称之为对称魔梯. 在参数  $U_0$  减小的方向上, 上升枝与准周期区相接, 而参数  $U_0$  增大的方向上, 下降枝进入混沌区. 因而, 本文认为这个单塔结构的多重魔梯是完全锁相区内最后一个台阶相应的周期轨道经由边界碰撞分岔向混沌转变的 V 型阵发前奏. 混沌的时间序列显示了阵发特征. 但限于篇幅, 这里不做详细说明.

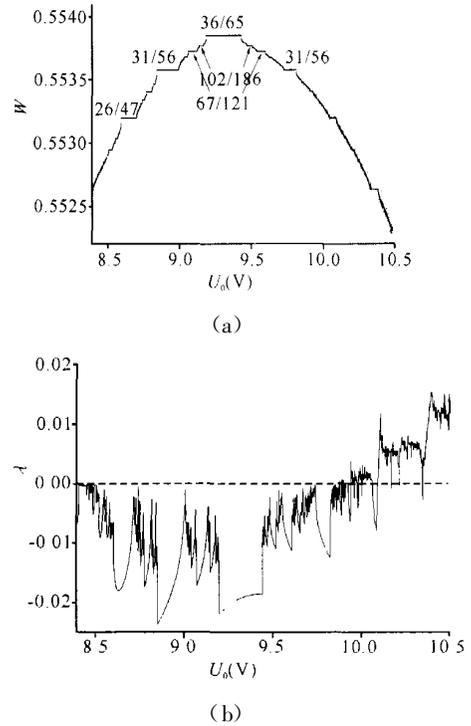


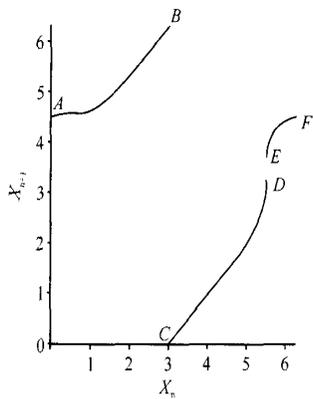
图 2 单塔对称魔梯和相应参数区间的 Lyapunov 指数谱  
Fig. 2 The one-tower symmetric MDS and the corresponding Lyapunov exponent spectrum

(a) 是系统(1) 在  $\omega = 1210$  Hz,  $x_0 = 2.0$  时的计算结果. 每个  $W$  均去掉前 50000 次迭代以避免瞬态. (b) 中每个  $\lambda$  由去掉  $x_0 = 2.0$  的前次后记录 10000 次迭代计算得到.

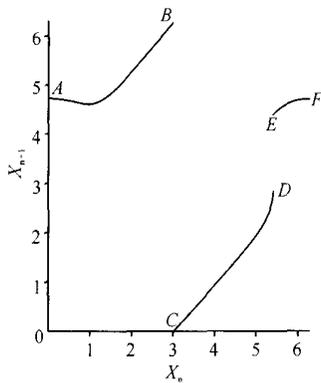
(a) Show the result computed by Equ. (1) with parameter values  $\omega = 1210$  Hz and  $x_0 = 2.0$ . For each  $W$  value the first 50000 iterations were ignored to avoid the transients; (b)  $x_0 = 2.0$  for each exponent value the first 50000 iterations were ignored to avoid the transients, and then 10000 were recorded.

多重魔梯由多种碰撞模式所产生, 而图 3 显示的系统只有 2 个不连续点(一个不连续区), 据此本文猜想可能是对称的碰撞模式导致对称的多重魔梯. 为验证这一猜想, 首先对任一周期轨道定义 2 个特征周期点  $P_D, P_E$ , 其中  $P_D$  为距不连续点  $D$  最近的周期点,  $P_E$  是距不连续点  $E$  最近的周期点. 然后计算  $\Delta P_D = |x_D - x_{P_D}|$  和  $\Delta P_E = |x_E - x_{P_E}|$ . 图 4 显示分别在上升枝和下降枝上台阶 103/186 和台阶 67/121 之间参数区内的计算结果. 图 4a 和 4b 中, 上升枝上每个台阶

参数内的  $\Delta P_D$  单调下降而  $\Delta P_E$  单调上升. 在每个台阶的左端点处  $\Delta P_D = 0$ , 而在右端点处  $\Delta P_E = 0$ . 说明产生上升枝上台阶的碰撞模式确为  $E, D$ . 图 4c 和 4d 显示的下降枝上的情形正好相反, 说明产生下降枝上台阶的碰撞模式确为  $D, E$ . 图 4e 和 4f 显示塔顶台阶 36/65 两个端点处都有  $\Delta P_E = 0$ , 碰撞模式为  $E, E$ . 显然  $E, D$  与  $D, E$  是一对称的碰撞模式. 造成这种模式的唯一可能是参数变化时周期轨道在塔顶台阶参数区内的移动方向突然发生转变.



(a)



(b)

图 3  $\omega = 1210\text{Hz}$  时系统(1)的映象

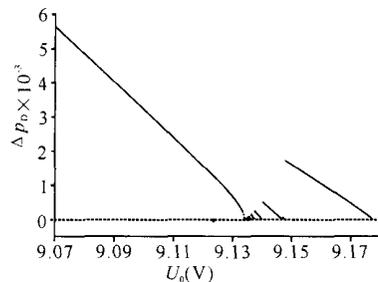
Fig 3 Mapping functions of Equ (1) with parameter value  $\omega = 1210\text{Hz}$

(a)  $U_0 = 8.608\text{V}$ , 对应图 2a 上升枝上台阶 26/47 的左端点; (b)  $U_0 = 9.820\text{V}$ , 对应图 2a 下降枝上台阶 31/56 的右端点.

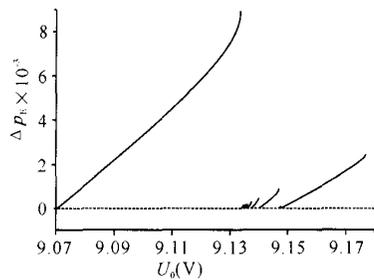
(a)  $U_0 = 8.608\text{V}$ , corresponding to the parameter value at the left end of the plateau 26/47 in the ascent branch of the MDS shown in Fig 2a; (b)  $U_0 = 9.820\text{V}$ , corresponding to the parameter value at the right end of the plateau 31/56 in the descent branch of the MDS shown in Fig 2a.

导致这种改变的因素对于实验科学家可能很重要, 因为可以由此判断什么样的系统能演示多重魔梯. 然而, 由于映象函数特别复杂, 加之影响该现象的因素很多, 使我们无法解析地回答这个问题. 比较魔梯不同位置的映象函数, 如图 3a 和 3b 有 2 个显著差别: 前者显示系统可逆但不连续, 而后者显示系统不可逆, 表现在图像出现最大值和最小值, 而且  $E$  点附近的函数斜率有显著下降. 容易证明周期轨道永远不

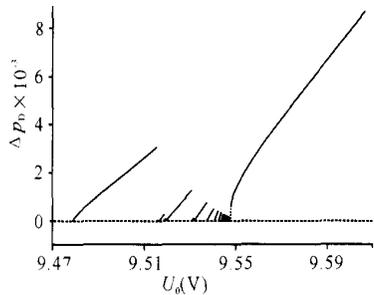
访问映象的负斜率区, 因为这部分被映象的不连续区的像遮蔽了. 因此, 影响特征周期点移动方向的唯一因素可能是映象关键部位斜率的改变. 为证实这个推测, 本文构造了一个简化模型来展示和解释有关现象.



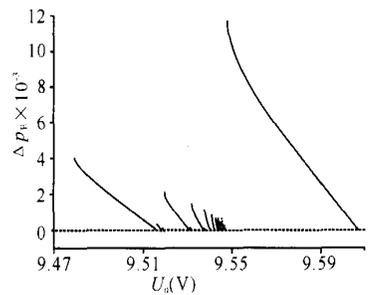
(a)



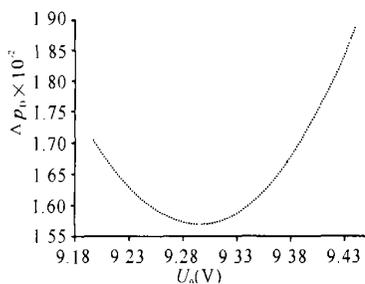
(b)



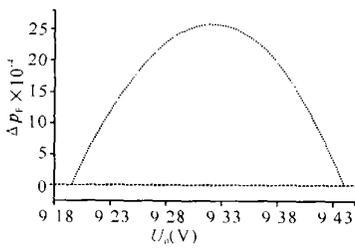
(c)



(d)



(e)



(f)

图4  $\Delta P_D = |x_D - x_{pD}|$  和  $\Delta P_E = |x_E - x_{pE}|$  随参数  $a$  变化而变化的情形

Fig. 4 The figure shows the numerical results on the relationship of  $\Delta P_D = |x_D - x_{pD}|$  and  $\Delta P_E = |x_E - x_{pE}|$

$\omega = 1210\text{Hz}$ ,  $x_0 = 2.0$  忽略初始 50000 次迭代以避免瞬态。(a)和(b)分别显示上升枝上台阶 67/121 与 103/186 之间参数区内  $\Delta P_D$  和  $\Delta P_E$ ; (c)和(d)分别显示下降枝上台阶 67/121 与 103/186 之间参数区内  $\Delta P_D$  和  $\Delta P_E$ ; (e)和(f)分别显示塔顶 36/65 的参数区内  $\Delta P_D$  和  $\Delta P_E$ 。

When  $\omega = 1210\text{ Hz}$  and  $x_0 = 2.0$ , the first 50000 iterations were ignored to avoid the transients. (a) and (b) show  $\Delta P_D$  and  $\Delta P_E$  respectively in the parameter interval between the plateaus 67/121 and 103/186 in the ascent branch; (c) and (d) show  $\Delta P_D$  and  $\Delta P_E$  respectively in the parameter interval between the plateaus 67/121 and 103/186 in the descent branch; (e) and (f) shows  $\Delta P_D$  and  $\Delta P_E$  respectively in the parameter interval occupied by the top plateau 36/65.

### 3 简化模型与解析

基于所讨论的系统构造一个模型, 其映象函数为

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = k_1x + b_1, & x \in [0, x_C], \\ f_2(x) = k_2x + b_2, & x \in (x_C, x_E), [\text{mod } 1] \\ f_3(x) = k_3x + b_3, & x \in [x_E, 1] \end{cases} \quad (6)$$

其中  $k_1 = k_{10} + d_1a$ ;  $k_2 = k_{20} + d_2a^2$ ;  $k_3$  为常数;  $b_1 = 1 - k_1x_C$ ;  $b_2 = -k_2x_C$  以及  $b_3 = b_1 - k_3$ . 参数间的这些关系使的模型满足以下条件:  $y_A = y_F = x_E$ ;  $x_B = x_C$ ;  $x_D = x_E$  以及  $\Delta = y_E - y_D = (k_3x_E + b_3) - (k_2x_D + b_2) > 0$ .  $a$  作为控制参数。

本文取  $k_{10} = 0.9$ ,  $k_{20} = 1.3$ ,  $k_3 = 0.85$ ,  $d_1 = 0.28$ ,  $d_2 = 0.52$ ,  $x_C = 0.372$ , 系统如图 5 所示. 自函数  $AB$  段任何位置出发的轨道, 在其上迭代仅一次便立即离开. 之后仅访问一次  $EF$  段后进入  $CD$  段. 如果轨道到达  $CD$  段的  $[x_{g1}, x_D]$  区, 将连续访问  $CD$  段两次 (这里  $x_{g1} = f_2^{-1}(x_C)$ ). 继续往前的迭代在访问  $AB$  段一次后到达  $EF$  段的  $[x_E, x_{g2}]$  区 (其中  $x_{g2} = f_3^{-1}f_2^{-1}(x_C)$ ). 这样轨道在  $(x_C, x_{g1})$  区再次回到  $CD$  段. 如果轨道访问  $CD$  段的  $(x_C, x_{g1})$  区, 则在  $CD$  段上访问仅此一次后访问  $AB$  段。

定义 2 个迭代的“基本函数单元”以便描述周期轨道。

$$u(x) = f_1f_2f_3(x), x \in [x_E, x_{g2}], \quad (7)$$

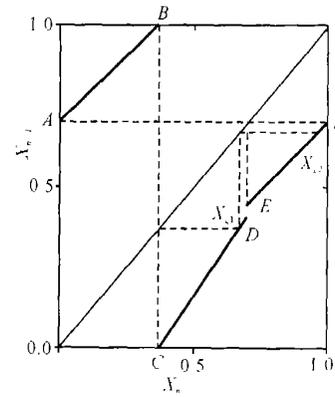


图 5 简化模型(6)的映象

Fig. 5 A schematic drawing of the simplified model map (6)

——: 映象函数; ——: 显示  $x_{g1}$  为  $x_B$  和  $x_C$  的一次逆,  $x_{g2}$  为  $x_{g1}$  的一次逆,  $F$  为  $E$  的一次逆, 且有  $f(x_A) = f(x_F)$ .

——: denote the mapping function; ——: show that point  $x_{g1}$  is the first backward image of both the points  $x_B$  and  $x_C$  and that point  $x_{g2}$  is the first backward image of point  $x_{g1}$ . Also they show that point  $F$  is the first backward image of point  $E$  and that  $f(x_A) = f(x_F)$ .

$$v(x) = f_1f_2^{(2)}f_3(x), x \in [x_{g2}, x_F], \quad (8)$$

其中,  $u(x)$ ,  $v(x)$  分别表示自  $EF$  段的  $[x_E, x_{g2}]$  区和  $[x_{g2}, x_F]$  区出发的迭代在访问其他两段后再次回到  $EF$  段的迭代单元. 任何一个周期轨道都由这两个基本的迭代单元的组合来表示. 从前面的讨论可知  $u(x)$  单元是自身可重复的, 而  $v(x)$  单元不被允许自身重复。

考虑模型成立的基本条件  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $\Delta > 0$ , 容易确定参数  $a$  的合理取值范围为  $(-1.58, 0.0)$ . 本文只讨论  $[-0.8, 0.0)$ . 当  $a$  在这个范围内变化时,  $f_1$ ,  $f_2$  的斜率  $k_1$ ,  $k_2$  随之变化, 这基本能够模拟电子张弛振子随参数变化所作的变化。

在简化模型中, 重新定义绕数

$$W = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x_0) - x_0}{n} = 1 - \frac{P}{Q}, \quad (9)$$

从图 6 显示的此定义下的多重魔梯的特征可见, 定义绕数的目的仅在于便于同上节给出的魔梯进行比较讨论。

先讨论塔顶台阶 11/16. 定义特征周期点  $x^*$  为  $EF$  段上将与不连续点  $E$  或  $F(x_F = f^{-1}(x_D))$  碰撞的周期点. 数值观察发现塔顶台阶对应的周期轨道在  $[x_E, x_{g2}]$  区的特征周期点可表示为

$$x^*_{l1} = vu^{(4)}(x^*_{l1}), \quad (10)$$

而  $[x_{g2}, x_F]$  区的特征周期点表示为

$$x^*_{r1} = u^{(4)}v(x^*_{r1}), \quad (11)$$

如果碰撞模式与原系统类似, 则特征周期点  $x^*_{l1}$  与不

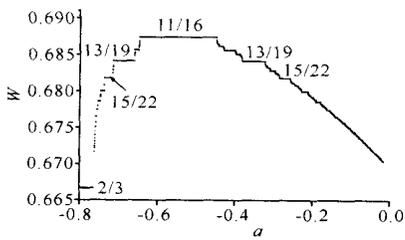


图6 简化模型中单塔对称魔梯

Fig. 6 The numerically obtained one-tower symmetric MDS in the simplified model.

$x_0 = 0.3$ , 每个  $W$  均忽略初始 50000 次迭代以避免瞬态  
 $x_0 = 0.3$ . For each  $W$  value the first 50000 iterations were ignored to avoid the transients

连续点  $E$  的碰撞条件为  $x_{*l} = x_E$ . 由此式可得到塔顶台阶的 2 个端点. 本文得到  $a \in (-1.58, 0.0)$  有 2 个实数解:  $-0.647546, -0.446955$ , 它们与塔顶台阶的左右端点完全相符. 与此相似, 上升枝台阶 13/19 对应的周期轨道在  $[x_E, x_{g2})$  区的特征周期点可以表示为

$$x_{*l} = v u^{(5)}(x_{*l}), \quad (12)$$

而  $[x_{g2}, F]$  区的特征周期点表示为

$$x_{*r} = u^{(5)}v(x_{*r}), \quad (13)$$

特征周期点  $x_{*l}$  与不连续点  $E$  的碰撞条件  $x_{*l} = x_E(a = a_l)$  可确定相应台阶的左端点. 而特征周期点  $x_{*r}$  与不连续点  $F$  的碰撞条件  $x_{*r} = x_F(a = a_r)$  可确定相应台阶的右端点. 对于下降枝上的台阶 13/19, 对应周期轨道的特征周期点的方程与方程 (12) 和 (13) 完全相同. 只是碰撞条件变为  $x_{*l} = x_E(a = a_r)$  和  $x_{*r} = x_F(a = a_l)$ , 这意味着同一方程可确定相应台阶的右端点. 对于下降枝上的台阶 13/19, 对应周期轨道的特征周期点的方程  $x_{*l} = x_E$  决定上升枝上台阶的左端点和下降枝上台阶的右端点. 在合理的参数范围  $a \in (-1.58, 0.0)$  内有 2 个实数解:  $-0.715272, -0.320854$ . 同样, 同一方程  $x_{*r} = x_F$  决定上升枝上台阶的右端点和下降枝上台阶的左端点. 在合理的参数范围  $a \in (-1.58, 0.0)$  内有 2 个实数解:  $-0.381403, -0.660280$ . 这 4 个数与台阶的端点符合得极好. 显然, 方程的 4 个解确实限定相应的台阶.

类似地, 可以提出对应所有台阶的周期轨道在  $[x_E, x_{g2})$  区特征周期点的一般表示式

$$x_{*l} = \prod_{j=1}^m [v u^{(n_j)}(x_{*l})], \quad (14)$$

其中  $m, n_j, j$  均为整数. 同样,  $[x_{g2}, x_F]$  区特征周期点的一般表示式为

$$x_{*r} = \prod_{j=1}^m [u^{(n_j)}v(x_{*r})], \quad (15)$$

碰撞条件与上面给出的相同. 通过检查其它台阶对应周期轨道可知, 这个表示式是正确的, 于是单塔的对称魔梯即可被解析确定.

由特征周期点的一般表示式可以求出  $dx_{*l}/da$ . 如果  $dx_{*l}/da > 0$ , 图 5 中的特征周期点  $x_{*l}$  将向右移动, 产生台阶的碰撞模式应当为  $E, D$ ; 如果  $dx_{*l}/da < 0$ ,  $x_{*l}$  将向左移动, 产生台阶的碰撞模式应当为  $D, E$ ; 如果在参数  $a_c$  有  $dx_{*l}/da = 0$ , 则  $x_{*l}$  的移动方向在该点发生改变, 产生  $a_c$  所在台阶的碰撞模式可能为  $E, E$  或  $D, D$ . 我们编制程序对每个台阶计算了  $dx_{*l}/da$ , 结果显示在参数增大的方向,  $dx_{*l}/da$  的符号在塔顶台阶 11/16 的参数区间内由正转负. 表明简化模型中的碰撞模式与原系统相同.

## 4 结束语

本文尝试简化模型函数的多种形式, 结果使我们相信产生对称多重魔梯的决定性因素是一段映象函数的斜率在适当参数范围内的非线性变化. 因而也是电子张弛振子系统产生对称多重魔梯的决定性因素. 由于这种机制简单, 它应该能在实际系统中被观察到. 据我们所知, 这是多重魔梯在实际系统中的第一个例证.

## 参考文献

- Bak P, Buinisma R. One-dimensional ising model and the complete Devil's staircase. *Phy Rev Lett*, 1982, 49(4): 249251.
- Gilbert T, Gammon R W. Stable oscillations and Devil's staircase in the Van der Pol oscillator. *I J Bif and Chaos*, 2000, 10(1): 155-164.
- Lacis S, et al. Frequency locking and Devil's staircase for a two-dimensional ferrofluid droplet in an elliptically polarized rotating magnetic field. *Phy Rev E*, 1997, 55(3): 26402648.
- Shi Xianqi, Wu Shunguang, He da-Ren. Multiple devil's staircase and type V intermittency. *Phys Rew E*, 1998, 57(1): 110.
- Wang X-M, He D-R, et al. Dissonant structure of multiple staircase in one-dimensional discontinuous map. *Phys Lett A*, 2002, 293(1): 151155.
- Wang X-M, Zhao J-G, He D-R. A prelude staircase to a type V intermittency in two-dimensional discontinuous maps. *Commun Theor Phys*, 2003, 39(6): 657662.
- Shunguang Wu, Ding E J, Da Ren He. The Lyapunov Exponent near the criticality of type V intermittency. *Phys Lett A*, 1995, 197: 287292.
- Lamba H, Budd C J. Scaling of Lyapunov exponents at non-smooth bifurcation. *Phys Rev E*, 1994, 50(1): 8490.
- Da Ren He, Bing Hong Wang, et al. Interaction between discontinuity and non-invertibility in a relaxation oscillator. *Physica D*, 1994, 79: 335347.

(责任编辑: 黎贞崇)