DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2004.04.009
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (4): 306308

索赔为稀疏过程的风险模型
The Risk Model about that Claims Is Thinning Process

罗建华[1]　　方世祖[2]
Luo Jianhua[1]　Fang Shizu[2]

(1. 中南林学院理学院　湖南株洲　412006;
2. 广西大学数学与信息科学学院　南宁市大学路 100 号　530004)
(1. Sci. Coll., Central South Forestry Univ., Zhuzhou, Hunan, 412006, China;
2. Coll. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　保费收取过程为 Poisson 过程时, 利用 Poisson 过程在随机选择下的不变性, 讨论索赔为稀疏过程的风险模型的破产概率, 并证明 Lundberg 不等式和破产概率的一般公式.

关键词　风险模型　稀疏过程　复合 Poisson 过程　鞅　调节系数　破产概率
中图法分类号　O211.67

Abstract　Based on the Poisson premium process, we utilize the property which Poisson process maintains under the ramdon selection. The ruin probability is discussed with respect to which the claims are thinning process. The Lundberg inequality and the common formula for the ruin probability are proved.

Key words　risk model, thinning process, compound Poisson process, martingale, adjustment coefficient, ruin probability

经典的 Lundberg-Cramér 风险模型:

$$R_t^0 = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

其中, $u \geqslant 0$; c 是一正值常数; $\{Y_i, i \geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列(简记为 $i.\ i.\ d.\ r.\ v.'s$), 具有共同的分布函数 $F(y)$, $F(0) = 0$, $EY_i = \mu > 0$, 且 $\mu < \infty$. $\{N_t, t \geqslant 0\}$ 是一具有强度 λ 的齐次 Poisson 过程 ($EN_t = \lambda t$). 假定 $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ 与 $Y = \{Y_i, i \geqslant 1\}$ 相互独立.

实际背景:

(Ⅰ) u 表示保险公司的初始资本, c 表示保险公司单位时间征收的保险费率;

(Ⅱ) $Y_i \geqslant 0$, $i \geqslant 1$ 为个体索赔额;

(Ⅲ) N_t, $t \geqslant 0$ 表示至时刻 t 止索赔总次数;

(Ⅳ) $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ 表示至时刻 t 止索赔总额;

(Ⅴ) R_t^0 表示保险公司在时刻 t 的盈余.

经典风险模型通常假定保险公司经营环境为常值环境而建立, 而保费收取过程是时间 t 的线性函数, 保费率 c 是一恒定不变的常数, 而且索赔过程与保费收取过程是相互独立进行. 由于任何风险事业都是在随机环境中进行, 个体的经济情况、保险观念的转变以及可能发生的自然灾害等等决定了保费率应是随机变量. 另外, 气候等生活环境因素决定着保费收取过程也应是随机过程, 并且索赔过程与保费收取过程应有一定的相依关系. 假定每个保单持有者索赔与否为相互独立, 持保人以相同概率索赔, 那么索赔计数过程是一稀疏过程, 且具有 Poisson 过程在随机选择下的不变性[1]. 根据上述情况, 本文对经典模型(1)进行推广, 即考虑把保费收取过程看成 Poisson 过程, 而索赔计数过程为稀疏过程, 并在此基础上加以研究.

下面首先建立模型并准备一些预备引理, 接着证明 Lundberg 不等式和破产概率的一般公式. 除特别说明外, 本文沿用文献[2, 3]的术语和记号, 基本的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 假定是完备的, 以下涉及的所有随机过程(变量)都定义于 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上.

1　风险模型

为简便起见, 记 $M = \{M_t, t \geqslant 0\}$ 的 p-稀疏过程为 $M^p = \{M_t^p, t \geqslant 0\}$, 现改变模型(1)中的一些术语,

2004-04-26 收稿。

考虑下面的风险过程：

$$R_t = u + \sum_{i=1}^{M_t} c_i - \sum_{i=1}^{M_t^p} Y_i \equiv u + S_t^p,\ t \geqslant 0, \quad (2)$$

其中，$M = \{M_t, t \geqslant 0\}$ 是一具有强度 α 的齐次 Poisson 过程，即 $EM_t = \alpha t$；M_t 表示至时刻 t 止收到的保单数；$C = \{c_i, i \geqslant 1\}$ 是 $i.i.d.r.v.'s$，其共同分布函数为 $G(x)$，$G(0) = 0$，记 $Ec_i = \upsilon > 0$，c_i 表示每张保单的保费，$\sum_{i=1}^{M_t} c_i$ 表示至时刻 t 的总保费收入. 假定过程 M 与 C 相互独立，并与 Y 也相互独立. $M^p = \{M_t^p, t \geqslant 0\}$ 是一具有强度 $p\alpha$ 的齐次 Poisson 过程[1]，即 $EM_t^p = p\alpha t$，M_t^p 表示至时刻 t 止索赔总次数，$\sum_{i=1}^{M_t^p} Y_i$ 表示至时刻 t 止索赔总额. R_t，S_t^p 分别表示保险公司在时刻 t 的盈余资本和盈利，并称 $\{R_t, t \geqslant 0\}$、$\{S_t^p, t \geqslant 0\}$ 分别为盈余过程、盈利过程. 模型(2)中其他术语的含义同模型(1)，此时称模型(2)为索赔为稀疏过程的风险模型.

2 相关引理和定义

引理1 (Ⅰ)$X(t) = \sum_{i=1}^{M_t} c_i$，$Y(t) = \sum_{i=1}^{M_t^p} Y_i$ 均为复合 Poisson 过程；

(Ⅱ)$EX(t) = EM_t Ec_i$，$EY(t) = EM_t^p EY_i$；

(Ⅲ)$\{S_t^p, t \geqslant 0\}$ 具有平稳独立增量性.

证明 证明过程见文献[4].

保险公司为运作上的安全，要求 $ES_t^p > 0$，即 $EM_t Ec_i - EM_t^p EY_i = (\upsilon\alpha - p\alpha\mu)t > 0$.

定义1 相对安全负载

$$\rho = \frac{\upsilon}{p\mu} - 1,\ \rho > 0.$$

引理2 $\lim_{t\to\infty} R_t = \infty$, a.s..

证明 显然 $t \to \infty$ 时，$M_t \to \infty$，$M_t^p \to \infty$，所以据强大数定律和文献[6]知，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{M_t} c_i}{t} - \frac{\sum_{i=1}^{M_t^p} Y_i}{t}\right) =$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{M_t} c_i}{M_t} \cdot \frac{M_t}{t}\right) - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{M_t^p} Y_i}{M_t^p} \cdot \frac{M_t^p}{t}\right) =$$

$$\alpha Ec_i - p\alpha EY_i = \alpha\upsilon - p\alpha\mu > 0, \text{a.s.}.$$

故 $\lim_{t\to\infty} R_t = \infty$, a.s..

但是，这并不排除在某一瞬时，盈余过程有可能取负值，这时称保险公司"破产". 以下恒记 T_u 为保险公司首次破产的时刻，简称为破产时刻，即令

$$T_u = \inf\{t: R_t < 0\},\ \inf \phi = \infty.$$

本文研究的是保险公司的最终破产的概率

$$\Psi(u) = P(T_u < \infty \mid R_0 = u),\ \forall u \geqslant 0.$$

定义2 根据模型(2)的假定，定义 c_i 的 Laplace 变换

$$\phi(r) = Ee^{-rc_i} = \int_0^\infty e^{-rx} dG(x),\ r > 0.$$

定义 Y_i 的矩母函数

$$M_Y(r) = Ee^{rY_i} = \int_0^\infty e^{ry} dF(y),$$

并令 $h(r) = M_Y(r) - 1$.

假设 $\phi(r) < \infty$，并存在 $r^* > 0$，使得 $r \to r^*$ 时，$h(r) \to \infty$，当然也允许 $r^* = \infty$[2].

设 $g(r) = \alpha\phi(r)(ph(r) + 1) - \alpha$.

引理3 对于盈利过程 $S^p = \{S_t^p, t \geqslant 0\}$，有 $E(e^{-rS_t^p}) = e^{tg(r)}$.

证明 由模型的假定及全期望(条件数学期望)公式，得

$$E(e^{-rS_t^p}) = E[\exp(-r\sum_{i=1}^{M_t} c_i + r\sum_{i=1}^{M_t^p} Y_i)] =$$

$$E\{E[\exp(-r\sum_{i=1}^{M_t} c_i + r\sum_{i=1}^{M_t^p} Y_i) \mid M_t]\} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E[\exp(-r\sum_{i=1}^{n} c_i)] \cdot E[\exp(r\sum_{i=1}^{M_t^p} Y_i)] \cdot P(M_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (Ee^{-rc_i})^n \cdot \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} \cdot \sum_{k=0}^{n} E[\exp(r\sum_{i=1}^{k} Y_i)] \cdot$$

$$P(M_t^p = k) = \sum_{n=0}^{\infty} (Ee^{-rc_i})^n \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{n} (Ee^{rY_i})^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n(r) \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} \cdot$$

$$(ph(r) + 1)^n = \exp\{\alpha[\phi(r)(ph(r) + 1) - 1]t\} = e^{tg(r)}.$$

引理4 方程 $g(r) = 0$ 存在唯一的正解 R，称之为调节系数.

证明 容易证明 $g(r)$ 在 $(0, r^*)$ 内是凸函数，$g(0) = 0$，$g'(0^+) < 0$，又 $r \to r^*$ 时，$g(r) \to \infty$，所以必存在唯一的正数 r 使得 $g(r) = 0$，此时称方程 $g(r) = 0$ 的唯一正解 r 为调节系数，记之为 R，并称方程 $g(r) = 0$ 为调节方程.

引理5 设 $M_u(t) = \exp(-rR_t - tg(r))$，那么 $\{M_u(t), \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ 是鞅，其中 $\mathscr{F}_t = \sigma\{S_v^p, v \leqslant t\}$.

证明 设 $t \geqslant s$，则

$E[M_u(t)\mid \mathscr{F}_s] = E[\exp(-rR_t - tg(r))\mid \mathscr{F}_s] = E[\exp(-rR_s - sg(r) - r(R_t - R_s) - (t-s)g(r))\mid \mathscr{F}_s] = M_u(s)E[\frac{e^{-r(R_t-R_s)}}{e^{(t-s)g(r)}}\mid \mathscr{F}_s] = M_u(s)$.

由$\{S_t^p, t\geqslant 0\}$具有平稳独立增量性及引理3可知最后一个等式成立.

引理6 T_u 关于 $\mathscr{F}$是停时.

3 主要结果

定理1 在模型(2)中, Lundberg 不等式成立: $\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$, 其中 $R = \sup_{r>0}\{r: g(r)\leqslant 0\}$.

证明 任意选定 $t_0 > 0$, 则 $t_0\wedge T_u$ 为有界停时, 由有界停时定理及全期望公式, 得

$e^{-ru} = M_u(0) = E[M_u(t_0\wedge T_u)] = E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\} + E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u > t_0]P\{T_u > t_0\}\geqslant E[M_u(T_u)\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\}$. (3)

因为在$\{T_u<\infty\}$上 $u + S_{T_u}^p\leqslant 0$, 所以

$$P\{T_u\leqslant t_0\}\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[M_u(T_u)\mid T_u\leqslant t_0]}\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[e^{-T_u g(r)}\mid T_u\leqslant t_0]}\leqslant e^{-ru}\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}e^{tg(r)}. \quad (4)$$

在(4)式中令 $t_0\to\infty$, 得

$$\Psi(u)\leqslant e^{-ru}\sup_{t\geqslant 0}e^{tg(r)}.$$

为了获得尽可能满意的不等式, 在限制条件 $\sup_{t\geqslant 0}e^{tg(r)}<\infty$下, 选择尽可能大的 r, 并记之为 R. 很明显 $R = \sup_{r>0}\{r: g(r)\leqslant 0\}$. 此时称 R 为Lundberg 指数. 根据前面调节系数的定义, 此处的 R 也就是调节系数. 因此

$$\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}.$$

推论1 在模型(2)中, 若 $G(x) = 1 - e^{-ax}$, $F(y) = 1 - e^{-by}$, $(a, b > 0)$, 则有

$$\Psi(u)\leqslant e^{(ap-b)u}.$$

证明 由相对安全负载条件可得 $1/a - p/b > 0$, 即 $b > ap$. 在保费额、索赔额各自服从指数分布的情况下, Lundberg 指数 R 满足的调节方程为 $\alpha\phi(R)[ph(R)+1] - \alpha = 0$, 即

$$\alpha\int_0^\infty e^{-Rx}\cdot ae^{-ax}dx[p(\int_0^\infty e^{Ry}\cdot be^{-by}dy - 1) + 1] - \alpha = 0, \frac{a}{a+R}(\frac{pR}{b-R}+1) = 1,$$

解得 $R = b - ap$, ($R = 0$ 略去).

因此由定理得 $\Psi(u)\leqslant e^{(ap-b)u}$.

定理证毕.

定理2 在模型(2)下, 设 R 为调节系数, 则最终破产概率为

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[\exp(-R\cdot R_{T_u})\mid T_u<\infty]}.$$

证明 在(3)式中, 取 $r = R$ 得

$e^{-Ru} = E[(e^{-R\cdot R_{T_u}}\mid T_u\leqslant t_0)]P(T_u\leqslant t_0) + E[(e^{-R\cdot R_{t_0}})\mid T_u > t_0]P(T_u > t_0)$. (5)

以 1_A 表示集合 A 的示性函数, 有

$0\leqslant E[(e^{-R\cdot R_{t_0}})\mid T_u > t_0]P(T_u > t_0) = E(e^{-R\cdot R_{t_0}}\cdot 1_{\{T_u > t_0\}})\leqslant E(e^{-R\cdot R_{t_0}}\cdot 1_{\{R_{t_0}\geqslant 0\}})$.

由于 $0\leqslant e^{-R\cdot R_{t_0}}\cdot 1_{\{R_{t_0}\geqslant 0\}}\leqslant 1$, 根据引理2及控制收敛定理, 有

$$\lim_{t_0\to\infty}E[(e^{-R\cdot R_{t_0}})\mid T_u > t_0]P(T_u > t_0) = 0, \text{ a.s.}.$$

于是在(5)式两端令 $t_0\to\infty$, 便得

$$\Psi(u) = P(T_u<\infty) = \frac{e^{-Ru}}{E[\exp(-R\cdot R_{T_u})\mid T_u<\infty]}.$$

定理证毕.

参考文献

1 邓永录, 梁之舜. 随机点过程及其应用. 北京: 科学出版社, 1998.

2 Grangell J. Aspects of Risk Theory. New York: Springer Verlag, 1991.

3 Si Jiandong, Wang Zhenyu, Wang Guojing. Ruin problem for a class of risk processes perturbed by diffusion. Appl Math J Chinese Univ (Ser B), 2002, 17(4): 435441.

4 何声武. 随机过程引论. 北京: 高等教育出版社, 1996.

5 Chen Shanping, Wang Guojing, Wang Zhenyu. The applications of thinning process in risk problems. Application of Statistics and Management, 2001, 20(5): 2630.

6 Boikov A V. The Cramér-Lundberg model with stochastic premium process. Theory Proba Appl, 2002, 47(3): 489493.

(责任编辑: 黎贞崇)