DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2004.04.005
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (4): 291295, 299

具有振动位势的二阶非线性常微分方程的区间强迫振动判别准则*

Interval Oscillation Criteria for A Foced Second-order Nonlinear Ordinary Differential Equation with Oscillatory Potential

焦建军　李　刚　罗桂烈
Jiao Jianjun　Li Gang　Luo Guilie

(广西师范大学数学与计算机科学学院　桂林市育才路3号　541004)
(Coll. of Math. &Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　给出具有振动位势的二阶非线性常微分方程 $(r(t)y'(t))'+p(t)y'(t)+Q(t,y(t))=g(t)$ 区间强迫振动的判别准则和实例.

关键词　常微分方程　振动　非线性　判别
中图法分类号　O175.12

Abstract　New oscillation criteria established for a second order nonlinear ordinary differential equation with oscillatory potential $(r(t)y'(t))'+p(t)y'(t)+Q(t,y(t))=g(t)$ are different from the most known ones in the sense that they are based on the information only on a sequence of subintervals of $[t_0,+\infty)$.

Key words　ordinary differential equation, oscillation, nonlinear, judgement

1　定义

本文研究

$$(r(t)y'(t))'+p(t)y'(t)+Q(t,y(t))=g(t) \tag{1}$$

的振动状态,其中假设 $r(t)\in C'([t_0,+\infty),(0,+\infty))$, $q,g\in C([t_0,+\infty),R)$, $Q(t,y(t))\geqslant q(t)f(y(t))$, $f\in C(R,R)$, $Q\in C([t_0,+\infty)\times R,R)$.

本文假设(1)在 $[t_0,+\infty)$ 的解是存在的.

定义1　如果(1)式的一个解的零点集合是无界的,那么称这个解是振动的,否则是非振动的;如果(1)的所有解是振动的,那么称(1)是振动的,否则是称(1)是非振动的.

$$(r(t)y'(t))'+q(t)y(t)=g(t) \tag{2}$$

和

$$(r(t)y'(t))'+q(t)f(y(t))=g(t) \tag{3}$$

的振动已被许多人研究过,他们有些结论可以在文献[13]中看到.Wong[4] 和 Kong[5] 各自研究了 Ei-Sayed[6] 建立的线性方程区间振动判别准则,其结论并不十分深刻.

另一方面,Yang Qigui[7] 研究了(3)式的区间强迫振动的新的判别准则,但是他的结果却对方程(1)是无效的,而Yang[7] 的定理是本文的推论.

假设1　(C_0): $\dfrac{f(y(t))}{y(t)}\geqslant K\,|y(t)|^{v-1}$, $y\neq 0$, $K\geqslant 0$, $v\geqslant 1$.

2　主要结果

本文的主要结果是下面的定理和推论.

定理1　假设 (C_0) 和下面的条件成立:

(C_1): 对于 $T\geqslant t_0$, 存在 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$, 使得 $g(t)\leqslant 0$, $t\in[a_1,b_1]$, $g(t)\geqslant 0$, $t\in[a_2,b_2]$, 且 $r(t)>0$, $q(t)\geqslant 0$, $t\in(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)$.

(C_2): 假设 $D_1(a_i,b_i)=\{H\in C'[a_i,b_i], H(t)\geqslant 0\neq 0, H(a_i)=H(b_i)=0, \dfrac{\partial H}{\partial t}=2h(t)\sqrt{H(t)}\}$, $(i=1,2)$. 又假设,存在 $H(t)\in D_1(a_i,b_i)$, 使得

$$Q_i(H)=\int_{a_i}^{b_i}\{\frac{1}{r(s)}H(s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}\,|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\text{。}$$

2004-03-25 收稿。

*广西青年科学基金(0007002)资助项目。

$\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)-h^2(s)\cdot$
$\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\}ds>0,(i=1,2)$，则(1)是振动的.

证明　设 $y(t)$ 是(1)式的任一非振动解，不失一般性，不妨设 $y(t)>0$，对某个 $T_0\geqslant t_0$，$t\geqslant T_0$，把(1)式变形得到

$$(y'(t)\exp(\int_{a_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau))'=\frac{1}{r(t)}(g(t)-Q(t,y(t))\exp(\int_{a_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau),$$

取 $V(t)=-\dfrac{y'(t)\exp(\int_{a_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}{y(t)}$，且对 $V(t)$ 求导得到

$$V'(t)=(-\frac{g(t)}{y(t)}+\frac{Q(t,y(t))}{y(t)})\frac{1}{r(t)}\cdot\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)+V^2(t)\cdot\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\geqslant(-\frac{g(t)}{y(t)}+\frac{q(t)f(y(t))}{y(t)})\frac{1}{r(t)}\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)+V^2(t)\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\geqslant(-\frac{g(t)}{y(t)}+Kq(t)(y(t))^{v-1})\frac{1}{r(t)}\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)+V^2(t)\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau).$$

分两种情形来讨论：(i) $v>1$；(ii) $v=1$.

(i) 由假设，选取 $a_1,b_1\geqslant T_0\geqslant 0$ 于是在 $I=[a_1,b_1]$ 且 $a_1<b_1$ 有 $g(t)\leqslant 0$，在 $I=[a_1,b_1]$ 上用 Hölder 不等式得到

$$-\frac{g(t)}{y(t)}+Kq(t)(y(t))^{v-1}=\frac{|g(t)|}{y(t)}+Kq(t)(y(t))^{v-1}\geqslant\frac{v-1}{v}\{[\frac{|g(t)|}{y(t)}]^{1-\frac{1}{v}}\}^{\frac{v}{v-1}}+\frac{1}{v}\{[Kq(t)]^{\frac{1}{v}}(y(t))^{1-\frac{1}{v}}\}^{v}\geqslant[Kq(t)]^{\frac{1}{v}}|g(t)|^{1-\frac{1}{v}}.$$

在区间 I 上，$V(t)$ 满足：

$$V'(t)\geqslant[Kq(t)]^{\frac{1}{v}}|g(t)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(t)}\cdot\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)+V^2(t)\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau),\tag{4}$$

设 $H(t)\in D_1(a_1,b_1)$，满足条件假设，在上面不等式中，两边同乘以 $H(t)$，并且在 $[a_1,b_1]$ 上积分得到

$$\int_{a_1}^{b_1}H(s)V'(s)ds\geqslant\int_{a_1}^{b_1}H(s)V^2(t)\cdot\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds+\int_{a_1}^{b_1}H(s)[Kq(t)]^{\frac{1}{v}}\cdot|g(t)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(t)}\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds.$$

把上面不等式分部积分，并且利用 $H(a_i)=H(b_i)=0$，得到

$$-\int_{a_1}^{b_1}2V(s)h(s)\sqrt{H(s)}ds\geqslant\int_{a_1}^{b_1}H(s)V^2(s)\cdot\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds+\int_{a_1}^{b_1}H(s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds,$$

它与下式是等价的，

$$0\geqslant\int_{a_1}^{b_1}H(s)V^2(s)\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds+\int_{a_1}^{b_1}2V(s)h(s)\sqrt{H(s)}ds+\int_{a_1}^{b_1}H(s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds=$$
$$\int_{a_1}^{b_1}[\sqrt{H(s)\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}V(s)+h(s)\sqrt{\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}]^2ds+\int_{a_1}^{b_1}H(s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)-h^2(s)\cdot\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)})ds,$$

所以

$$0\geqslant\int_{a_1}^{b_1}[\sqrt{H(s)\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}V(s)+h(s)\sqrt{\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}]^2ds+Q_1(H),\tag{5}$$

因为 $Q_1(H)>0$，所以(5)式不成立，这个矛盾证明了 $y(t)$ 必然是振动的.

当 $y(t)<0$ 时，用 $H(t)\in D_1(a_2,b_2)$ 和给定条件 $g(t)\geqslant 0$，$t\in[a_2,b_2]$，可以得到同样结论.

(ii) 由假设，选择 $a_2,b_2\geqslant T_0$，$g(t)\leqslant 0$，$t\in[a_2,b_2]$ 且 $a_2<b_2$，于是 $V(t)$ 满足

$$V'(t)\geqslant\frac{Kq(t)}{r(t)}\exp(\int_{a_2}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)+V^2(t)\exp(-\int_{a_2}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau).$$

(ii) 的证明类似于(i)的证明.

定理 2　假设(C_0)和(C_1)及

(C_3)：$D_2(a_i,b_i)=\{u\in C'[a_i,b_i],u(t)\not\equiv 0,u(a_i)=u(b_i)=0\}$，$(i=1,2)$. 又假设存在 $u\in$

$D_2(a_i, b_i)$，使得 $Q_i(u) = \int_{a_i}^{b_i}\{[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}\ |g(s)|^{1-\frac{1}{v}}u^2(s)\cdot$
$\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)-[u(s)]^2\cdot$
$\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}\}ds \geqslant 0$,
则(1)式是振动的.

证明　前半部分的证明和定理 1 的证明一样，同样也分两种情况来讨论：(i) $v > 1$，(ii) $v = 1$.

(i) 因为 $Q_1(u) \geqslant 0$ 且 $r(s) > 0$，于是取 $H(t) = u^2(t)$ 且 $h(t) = u'(t)$，于是由(5)可得

$$\sqrt{H(s)\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}\,V(s) + h(s)\sqrt{\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)} = 0,$$

把 $V(t) = -\dfrac{y'(t)\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}{y(t)}$

代入上式得：

$$[-\frac{u(s)y'(s)}{y(s)} + u'(s)]\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau) = 0,$$

所以，$-\frac{u(s)y'(s)}{y(s)} + u'(s) = 0$，即 $y(s)\frac{d}{ds}(\frac{u(s)}{y(s)}) = 0$，因为 $y(s) > 0$，于是有 $\frac{d}{ds}(\frac{u(s)}{y(s)}) = 0$，所以有 $y(t) = cu(s)$，c 为常数.

由于 $u \in D_2(a_1, b_1)$，及 $u \not\equiv 0$，这与 $y(s) > 0$，$t \in I$ 是矛盾的，这个矛盾证明了 $y(t)$ 是振动的.

当 $y(t) < 0$ 时，用 $u \in D_2(a_2, b_2)$ 且 $g(t) \geqslant 0$，$t \in [a_2, b_2]$. 也可以同样得到矛盾.

(ii) 的证明类似(i)，定理证毕.

推论 1　当 $p(t) = 0$ 时，得到 Yang Qigui[7] 中的定理 1.

由文献[5, 8]，得到一类函数 G，$D = \{(t, s) | -\infty < s \leqslant t < \infty\}$，$H \in C(D, R)$，$H \in G$，如果 $H(t, s)$ 满足：

(H_1) $H(t, t) = 0$，$H(t, s) \geqslant 0$，$t > s$；

(H_2) H 在 D 上有偏导 $\frac{\partial H}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial H}{\partial s}$，使得

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 2h_1(t, s)\sqrt{H(t, s)}$$

和 $\frac{\partial H}{\partial s} = -2h_2(t, s)\sqrt{H(t, s)}$，

其中 $h_1, h_2 \in L_{\mathrm{loc}}(D, R)$.

定理 3　假设(C_0)，(C_1) 及

(C_4) 存在某个 $c_i \in (a_i, b_i)$，和某个 $H \in G$，使得 $T \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2$ 和下列条件之一成立.

$(C_4)^1$　$\frac{1}{H(c_i, a_i)}\int_{a_i}^{c_i}\{H(s, a_i)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}\ |g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\cdot$
$\frac{1}{r(s)}\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau) - h_1^2(s, a_i)\cdot$
$\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\}ds + \frac{1}{H(b_i, c_i)}\cdot$
$\int_{c_i}^{b_i}\{H(b_i, s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}\ |g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot$
$\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau) - h_1^2(b_i, s)\cdot$
$\exp(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\}ds > 0,$　(6)

$(C_4)^2$　设 $H(t, s) = u^2(t-s) \in G$，$(i = 1, 2)$，
$\frac{1}{u(c_i - a_i)}\int_{a_i}^{c_i}\{u^2(s-a_i)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}\ |g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\cdot$
$\frac{1}{r(s)}\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau) - [u'(s-a_i)]^2\cdot$
$\exp(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\}ds +$
$\frac{1}{u(b_i - c_i)}\int_{c_i}^{b_i}\{u^2(b_i - s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}\ |g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot$
$\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau) - [u'(b_i - s)]^2\cdot$
$\exp(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\}ds \geqslant 0,$　(7)

则(1)式是振动的.

在证明定理 3 之前，先证明 2 个引理和一个性质.

引理 1　假设存在 $c_1 < b_1 < c_2 < b_2$，使得 $t \in (c_1, b_1) \cup (c_2, b_2)$ 并且 $g(t) \leqslant 0$，$t \in (c_1, b_1)$；$g(t) \geqslant 0$，$t \in (c_2, b_2)$.

$y(t)$ 是(1)式的一个解，使得 $t \in (c_1, b_1)$ 时，$y(t) > 0$；$t \in (c_2, b_2)$ 时，$y(t) < 0$.

设 $V(t) = -\dfrac{y'(t)\exp(\int_{a_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}{y(t)}$，$t \in (c_i, b_i)$，$(i = 1, 2)$ 则有

(i) $\forall H \in G$，$\int_{c_i}^{b_i}\{H(b_i, s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}\ |g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\cdot$
$\frac{1}{r(s)}\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds \leqslant -H(b_i, c_i)V(c_i)$
$+\int_{c_i}^{b_i}h_2^2(b_i, s)\exp(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\}ds,$　(8)

(ii) 设 $H(t, s) = u^2(t-s) \in G$，且 $u(t-s) \neq 0$，$c_i \leqslant s \leqslant t \leqslant b_i$，则

$\int_{c_i}^{b_i}\{u^2(b_i - s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}\ |g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot$
$\exp(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds \leqslant -u^2(b_i - c_i)V(c_i) +$
$\int_{c_i}^{b_i}[u'(b_i - s)]^2\exp(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\}ds.$　(9)

证明 (i) 设 $y(t)$ 是(1)式的一个解，使得 $y(t)>0,\ t\in[c_1,b_1]$ 和 $y(t)<0,\ t\in[c_2,b_2]$，则和定理1的证明类似. 在(4)式的两边同乘以 $H(t,s)$，并且 s 从 c_i 到 t 积分 $t\in[c_i,b_i]$ 利用(H_1)，(H_2)，$\forall s\in[c_i,t)$，得到

$$\int_{c_i}^{t}H(t,s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot\exp\left(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds\leqslant\int_{c_i}^{t}H(t,s)V'(s)ds-\int_{c_i}^{t}H(t,s)V^2(s)\exp\left(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds=$$

$$-H(t,c_i)V(c_i)+\int_{c_i}^{t}h_2^2(t,s)\exp\left(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds-\int_{c_i}^{t}\left[\sqrt{H(s)\exp\left(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)}V(s)+h(s)\sqrt{\exp\left(\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)}\right]^2ds,\quad(10)$$

所以 $\int_{c_i}^{t}H(t,s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot\exp\left(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds\leqslant-H(t,c_i)V(c_i)+\int_{c_i}^{t}h_2^2(t,s)\exp\left(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds,$

在上式中让 $t\to b_i^-$，便得(6)式.

(ii) 由(8)式，设 $H(t,s)=u^2(t-s)$ 且 $h_2(t,s)=u'(t-s)\neq0,\ c_i\leqslant s\leqslant t\leqslant b_i$.

本文证明:

$u(t-s)V(s)-u'(t-s)\cdot\exp\left(\int_{c_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)\neq0,\ c_i\leqslant s\leqslant t\leqslant b_i,$

否则 $u(t-s)V(s)-u'(t-s)\cdot\exp\left(\int_{c_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)=0,\ c_i\leqslant s\leqslant t\leqslant b_i.$

这样把 $V(t)$ 代入上式得

$$\left[-\frac{u(t-s)y'(s)}{y(s)}+u'(s)\right]\exp\left(\int_{c_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)=0.$$

所以 $-\frac{u(s)y'(s)}{y(s)}+u'(s)=0,$

即 $y(s)\frac{d}{ds}\left(\frac{u(s)}{y(s)}\right)=0,\quad(11)$

因为 $y(s)>0$，于是有 $\frac{d}{ds}\left(\frac{u(s)}{y(s)}\right)=0$，所以有 $y(t)=cu(s)$，c 为某常数，从而 $u\in D_2(a_1,b_1)$ 及 $u(t-s)\neq0$，这与 $y(s)>0,\ t\in[c_i,b_i]$ 矛盾，这个矛盾证明 $u(t-s)V(s)-u'(t-s)\exp\left(\int_{c_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)\neq0,\ c_i\leqslant s\leqslant t\leqslant b_i,$

这样 $\int_{c_i}^{t}\left[\sqrt{u^2(t-s)\exp\left(-\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)}V(s)+h(s)\sqrt{\exp\left(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)}\right]^2ds>0.\quad(12)$

结合(8)和(10)有：$s\in[c_i,t]$，

$$\int_{c_i}^{t}u^2(b_i-s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot\exp\left(\int_{a_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds<-u^2(t-c_i)V(c_i)+\int_{c_i}^{t}[u'(t-s)]^2\exp\left(-\int_{c_i}^{s}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds,$$

在上式，当 $t\to b_i^-$ 时，得(9)式.

引理2 假设存在 $a_1<c_1<a_2<c_2$，使得 $t\in(a_1,c_1)\cup(a_2,c_2)$，并且 $g(t)\leqslant0,\ t\in(a_1,c_1)$；$g(t)\geqslant0,\ t\in(a_2,c_2)$.

$y(t)$ 是(1)式的一个解，使得 $t\in(a_1,c_1)$ 时，$y(t)>0$；$t\in(a_2,c_2)$ 时，$y(t)<0$，

设 $V(t)=-\dfrac{y'(t)\exp\left(\int_{a_i}^{t}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)}{y(t)},\ t\in(a_i,c_i),\ (i=1,2)$ 则有

(i) $\forall H\in G$，$\int_{a_i}^{c_i}\left\{H(s,a_i)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\cdot\frac{1}{r(s)}\exp\left(\int_{s}^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds\leqslant-H(c_i,a_i)V(c_i)+\int_{a_i}^{c_i}h_1^2(s,a_i)\exp\left(-\int_{s}^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)\right\}ds,\quad(13)$

(ii) 设 $H(t,s)=u^2(t-s)\in G$，且 $u(t-s)\neq0,\ a_i\leqslant s\leqslant t\leqslant c_i$，则

$$\int_{a_i}^{c_i}\left\{u^2(s-a_i)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot\exp\left(\int_{s}^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds\leqslant-u^2(c_i-a_i)V(c_i)+\int_{a_i}^{c_i}[u'(b_i-s)]^2\exp\left(-\int_{s}^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)\right\}ds.\quad(14)$$

证明 (i) 与引理1的证明类似，在(4)式的两边同乘以 $H(t,s)$，并且 s 从 t 到 c_i 积分，$t\in(a_i,c_i)$，运用分部积分，得到

$$\int_{t}^{c_i}H(s,t)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\cdot\exp\left(\int_{s}^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds\leqslant\int_{t}^{c_i}H(s,t)V'(s)ds-\int_{t}^{c_1}H(s,t)V^2(s)\exp\left(-\int_{t}^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds=$$

$$-H(c_i,t)V(c_i)+\int_{t}^{c_i}h_1^2(s,t)\exp\left(-\int_{t}^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)ds-\int_{t}^{c_i}\left[\sqrt{H(s,t)\exp\left(-\int_{t}^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)}V(s)+\right.$$

$$h_1(s,t)\sqrt{\exp(-\int_t^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)}^{\,2}ds, \qquad (15)$$

所以$\int_t^{c_i}H(s,t)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}$。

$$\exp(\int_s^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds\leqslant -H(c_i,t)V(c_i)+$$

$$\int_t^{c_i}h_1^2(s,t)\exp(-\int_t^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\}ds.$$

在上式,让 $t\to a_i^+$,得到(13)式.

(ii)与引理1的证明类似.在(13)式中,取 $H(t,s)=u^2(t-s)$ 且 $h_1(t,s)=u'(t-s)\neq 0$, $c_i\leqslant s\leqslant t\leqslant b_i$.

能够证明:

$$u(t-s)V(s)-u'(t-s)\exp(\int_{c_i}^t\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)\neq$$

0, $c_i\leqslant s\leqslant t\leqslant b_i$,

由(13)式可得:

$$\int_t^{c_i}u^2(s-a_i)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\text{。}$$

$$\exp(\int_s^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds\leqslant -u^2(c_i-a_i)V(c_i)+$$

$$\int_t^{c_i}[u'(t-s)]^2\exp(-\int_t^{c_i}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds,$$

在上式,让 $t\to a_i^+$,得到(14)式.

性质1 假设存在 $a_1<b_1<a_2<b_2$,使得 $r(t)>0\neq 0$, $t\in(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)$ 和 $g(t)\leqslant 0$, $t\in(a_1,b_1)$; $g(t)\geqslant 0$, $t\in(a_2,b_2)$.

于是存在 $c_i\in(a_i,b_i)$ 和某个 $H\in G$,使得(6)和(7)成立.则(1)式的每个非平凡解在 (a_1,b_1) 或者 (a_2,b_2) 至少有一个零.

证明 假设 $y(t)$ 是(1)的一个振动解,不失一般性,设 $y(t)>0$, $t\geqslant T_0$, T_0 依赖与 $y(t)$,从假设,能够选择 $a_1,b_1\geqslant T_0$, $g(t)\leqslant 0$, $t\in(a_1,b_1)$, $a_1<b_1$;由引理1和引理2, $i=1$ 时,得到(8)和(9)成立.

(8)式和(9)式两边分别除以 $H(b_1,c_1)$ 和 $H(c_1,a_1)$,并把它们相加得到

$$\frac{1}{H(c_1,a_1)}\int_{a_1}^{c_1}H(s,a_1)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\text{。}$$

$$\frac{1}{r(s)}\exp(\int_{a_1}^s\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)+\frac{1}{h(b_1,c_1)}\int_{c_1}^{b_1}H(b_1,s)[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}\frac{1}{r(s)}\exp(\int_{a_1}^s\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)$$

$$\leqslant\frac{1}{H(c_1,a_1)}\int_{a_1}^{c}h_1^2(s,a_1)\exp(-\int_s^{c_1}\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds$$

$$+\frac{1}{H(c_1,a_1)}\int_{c_1}^{b_1}h_2^2(b_1,s)\exp(-\int_{c_1}^s\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)ds,$$

上面不等式和(6)是不相容的.

当 $y(t)<0$ 时,选取 $a_2,b_2\geqslant T_0$, $g(t)\geqslant 0$, $t\in[a_2,b_2]$.同样能够得到矛盾.

如果(7)成立,类似可以得到(ii),性质1证毕.

定理3的证明 在 $[t_0,+\infty)$ 上取一个序列 $\{T_i\}\subset[t_0,+\infty)$,使得 $T_i\to+\infty(i\to+\infty)$,由假设 $(C_4)^1$ 对每个 $i\in N$,于是存在 $a_i,b_i,c_i\in R$,使得 $T_i\leqslant a_i<b_i<c_i$ 并且(8)成立,由性质1可知:(1)式解在 $t\in(a_i,b_i)$ 上至少有一个零, $t>a_i\geqslant T_i$, $i\in N$,可知(1)式的每个解有无穷多个零,于是(1)式是振动的.

同理可证 $(C_4)^2$ 条件满足时,(1)式也是振动的.定理3证毕.

推论2 当 $p(t)=0$ 时,得到文献[7]的定理2.

3 例子

例1 设 $a,k_i\geqslant 0$, $v>1$。于是非线性方程

$$[(1+a\sin^2t)y'(t)]'+(\beta\cos t)|y(t)^v|[1+\sum_{i=1}^m k_iy^{2i}(t)](t)]\operatorname{sgn}y(t)=\sin t \qquad (16)$$

是振动的,只要 $\beta^{\frac{1}{v}}\geqslant(1+\frac{a}{2})\pi/[2(\Gamma(3+\frac{1}{v})\Gamma(4-\frac{1}{v}))/\Gamma(7)]$.

事实上取 $k=1$, $a_1=2n\pi-\frac{\pi}{2}$, $b_1=a_2=2n\pi$, $b_2=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,且 $u(t)=-\sin 2t$, $p(t)=0$.

易见: $Q_1(u)=\int_{a_1}^{b_1}\{[Kq(s)]^{\frac{1}{v}}|g(s)|^{1-\frac{1}{v}}u^2(s)$。

$$\exp(\int_{a_1}^s\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}d\tau)-$$

$$[u(s)]^2\exp(-\int_{a_1}^s\frac{r'(\tau)+p(\tau)}{r(\tau)}\}ds=$$

$$4\beta^{\frac{1}{v}}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi}\cos^{\frac{1}{v}}s\,|\sin s|^{1-\frac{1}{v}}ds-4\int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi}(1+$$

$$a\sin^2s)\cos^2s\,ds=4\beta^{\frac{1}{v}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2+\frac{1}{v}}s\cos^{3-\frac{1}{v}}s\,ds-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+$$

$$a\sin^2s)\cos^2s\,ds=2\beta^{\frac{1}{v}}[\frac{\Gamma(3+\frac{1}{v})\Gamma(4-\frac{1}{v})}{\Gamma(7)}]-$$

$$(1+\frac{a}{2})\pi\geqslant 0.$$

同样,对于 a_2,b_2,也能得到 $Q_2(u)\geqslant 0$.

由定理2,则(16)式是振动的.

参考文献

1 Kartsatos A G. Maintance of oscillations under the effect of a periodic forcing term. Proc Amer Math Soc, 1992, 33: 377383.

2 Wong J S. Second order nonlinear forced oscillations. Siam J Math Anal, 1988, 19: 667675.

3 Elbert A. Oscillation/ nonoscillation for linear second-order differential equations. J Math Anal Appl, 1998, 226: 207219.

(下转第299页 Continue on page 299)

$\aleph_1$ 紧性与 *Lindelöf 等价, 所以只须证明 X 是 $\aleph_1$ 紧即可. 假若 X 不是 $\aleph_1$ 紧的, 则存在一个势为 ω_1 的离散子集 D, 由分离性(P)存在一个按点可数的开族 $\mathscr{U}$, 使 $D \subset \mathscr{U}^*$, 并且对每个 $U \subset \mathscr{U}$, $|U \cap D| \leqslant \omega$. 令

$$\overline{\mathscr{U}} = \mathscr{U} \cup \{X - D\},$$

则 $\overline{\mathscr{U}}$ 是 X 的按点可数开覆盖, 由于 X 是 *σ 紧的, 知存在$\{x_i\}_{i \in N}$使$\overline{\bigcup_{i \in N} \mathrm{st}(x_i, \mathscr{U})} = X$. 对每个 n 顶多有可数个 $\mathscr{U}$的元包含 x_n, 于是

$$|\mathrm{st}(x_i, \overline{\mathscr{U}}) \cap D| = |\mathrm{st}(x_i, \mathscr{U}) \cap D| \leqslant (\omega \times \omega) = \omega.$$

记为$\{x_{i,j}\}_{j \in N}$. 从而

$$|D| = |X \cap D| = |\overline{\bigcup_{n \in N} \mathrm{st}(x_n, \overline{U})} \cap D| =$$

$$\overline{|(\bigcup_{n \in N} \mathrm{st}(x_n, \overline{\mathscr{U}})) \cap D|} = |\overline{\bigcup_{n \in N} (\mathrm{st}(x_n, \overline{\mathscr{U}}) \cap D)}|$$

$$= |\overline{\bigcup_{i,j \in N} \{x_{ij}\}}| = |\{x_{ij}\}_{i,j \in N}| \leqslant \omega,$$

其中, 每个 $x_{i,j} \in D$, 而 D 为离散闭子集. 这与$|D| = \omega_1$ 矛盾, 故 X 是 $\aleph_1$ 紧的, 也就是 *Lindelöf 的.

从定义 2.2 可以看出: (1) σ 族正规性 (σCWN)(定义见文献[11]); (2) σ 按点族正规性 (σpCWN)(定义见文献[12]); (3) 族 *Hausdorff* 性 (*CWH*, 即对任意离散集 $D = \{x_\alpha\}$ 都存在互斥开族 $\mathscr{U} = \{u_\alpha\}$, 对每个 α, $x_\alpha \in u_\alpha$) 都是分离性(P)的特例. 所以对上述三类空间而言, 定理 2.13 也成立.

定理 2.14[13] 具有点可数基的正则 *σ 紧空间 X 是可度量的.

定理 2.15[7] 具有点可数基的 T_1 可数紧空间 X 是可分的.

定理 2.16 具有点可数基的 T_1 *σ 紧空间X 是可分的.

证明 设 X 是 *σ 紧空间, $C = \bigcup C_k$ 是X 的σ 紧的稠密子集. 由于每一 C_k 是紧的且点可数基是遗传的, 由定理 2.15, 则每一 C_k 是可分的. 即对每个 $k \in N$ 存在可数子集 $D_k \subset C_k$, $\overline{D_k}^{C_k} = C_k$, 所以 $D = \bigcup_{k \in N} D_k$ 稠密于 $C = \bigcup_{k \in N} C_k$, 从而 D 稠密于 X. 定理证毕.

参考文献

1 戴牧民. 一类包含 Lindelöf 空间和可分空间的拓扑空间. 数学年刊, 1983, (5): 571575.

2 E K van Douwen, Reed G M, Roscoe A W, et al. Star covering properties. Topology Appl, 1991, (39): 71103.

3 Matveev M V. A survey on star-covering properties. Topology Atlas, 1998, 330.

4 Corson H, Michael E. Metrizability of certain countable unions. Illinois J Math, 1964, (8): 351360.

5 Matveev M V. Absolutely countably compact spaces. Tapology Appl, 1994, (58): 8192.

6 Engelking R. General Topology, PWN, Warsaw, Topology Appl, 1977.

7 高国士. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 2000.

8 Marczewski E. Separabilite et mutiplication cartesian products. Fund Math, 1952, 39: 229238.

9 汪 林, 杨富春. 拓扑空间中的反例. 北京: 科学出版社, 2000.

10 蒲保明, 蒋继光, 胡淑礼. 拓扑学. 北京: 高等教育出版社, 1985.

11 刘应明. 一类包含弱仿紧空间和次仿紧空间的拓扑空间. 数学学报, 1977, 20(3): 212214.

12 戴牧民. 按点族正规性, 亚紧性和按点有限基. 数学学报, 1981, 24(5): 656667.

13 Ponomarev V. Axioms of countability and coutinuous mappings. Bull Pol Acad Math, 1960, (8): 127133.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 295 页 Continue from page295)

4 Wong J S. Criterion for forced second order linear differential equations. J Math Anal Appl, 1999, 231: 235340.

5 Philos Ch G. Oscillation theorems linear differential equations of second order. Arch Math, 1989, 53: 483492.

6 Ei-sayed M A. An oscillation criteria for a forced second-order linear differential equations. Proc Amer Math, 1993, 118: 813817.

7 Yang Qigui. Interval oscillation criterion for forced second order nonlinear ODE with oscillatory potential. Applid Mathematics and Compution, 2003, 135: 4964.

8 Kong Q. Interval criteria for oscillation of second order linear oscillation. J Math Anal Appl, 1999, 229: 285370.

(责任编辑: 黎贞崇)