

## 小波图像去噪研究方法概述\*

## A Survey of the Research of Wavelet Image Denoising

罗忠亮

王修信

胡维平

Luo Zhongliang Wang Xiuxin Hu Weiping

(广西师范大学物理与信息工程学院 桂林市育才路 3号 541004)

(Coll. of Phy. &amp; Info. Engi., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要** 阐述小波图像去噪方法的发展历程和小波去噪的机理, 概括目前小波图像去噪的主要方法及其应用, 对小波图像去噪方法的发展和应用进行展望.

**关键词** 小波去噪 模极大值 小波萎缩 多小波 小波系数模型 脊波 曲波

**中图分类号** TP391.41

**Abstract** This article describes the development of wavelet image denoising and the principal of wavelet image denoising as well as generalizing several main methods of wavelet image denoising. It also predicts the further development of image denoising and application in the future.

**Key words** wavelet denoising, modulus maximum, wavelet shrinkage, multiwavelet, wavelet coefficient model, ridgelet, curvelet

如何消除图像中的噪声是图像处理中古老的课题. 长期以来, 人们根据图像的特点、噪声的统计特征和频谱分布的规律, 提出和发展了不同的去噪方法<sup>[1]</sup>. 图像去噪存在一个如何兼顾降低图像噪声和保留细节的难题. 用滤波器对非平稳信号处理时不能有效地将信号高频和由噪声引起的高频干扰加以区分.

具有“数字显微镜”之称的小波变换在时频域具有多分辨率的特性, 可同时进行时频域的局部分析和灵活地对信号局部奇异特征进行提取以及时变滤波. 利用小波对含噪信号进行处理时, 可有效地达到滤除噪声和保留信号高频信息, 得到对原信号的最佳恢复. 目前, 小波图像去噪方法已成为去噪的一个重要分支和主要研究方向, 在过去的十多年, 小波方法在信号和图像去噪方面的应用引起学者广泛的关注<sup>[2]</sup>. 本文阐述小波图像去噪方法的发展历程和小波去噪机理, 概括目前的小波图像去噪的主要方法以及应用, 最后对小波图像去噪方法的发展和应用进行展望.

## 1 小波图像去噪的发展

小波图像去噪方法大体经过了 5 个阶段: 第一阶

段早在 1992 年, Mallat 提出奇异性检测的理论, 从而可以利用小波变换模极大值的方法结合边缘检测来去除噪声. 第二阶段是小波图像萎缩法: 将含噪信号做正交小波变换, 然后对其系数进行阈值操作得到去噪信号. 1992 和 1995 年, Donoho 等<sup>[3]</sup>提出非线性小波变换阈值去噪法, James S. Walker<sup>[4]</sup>提出自适应树小波萎缩法, 去噪效果相当好. 1995 年, Coifman & Donoho<sup>[5,6]</sup>在阈值法的基础上提出了平移不变量小波去噪法, 它是对阈值法的一种改进. 第三阶段是多小波去噪法. 1994 年 Geronimo, Hardin & Massopus 构造了著名的 GHM 多小波, 它既保持了单小波所具有的良好时域与频域的局部化特性, 又克服了单小波的缺陷. 第四阶段是基于小波系数模型的去噪法: 将小波与隐式马尔可夫、多尺度随机过程、上下文 Bayes 等模型结合起来, 可获得满意的去噪效果. 第五阶段是最近提出的脊波、曲波去噪法.

## 2 小波去噪的机理

噪声去噪问题一般采用模型:

$$s(i) = f(i) + e(i), i = 0, 1, \dots, n-1,$$

其中,  $f(i)$  是期望图像;  $s(i)$  是观测的含噪图像;  $e(i)$  是噪声;  $e$  是噪声方差. 去噪目的就是从小波图像  $s(i)$  中恢复原始图像的同时保持图像  $s(i)$  的特征, 优化均方差, 即在一组正交基  $B = \{g_m\}, (0 \leq m \leq N)$  下通

2003-05-27 收稿, 2004-02-16 修回.

\* 广西教育厅科研基金资助项目.

过分解  $s(i) = f(i) + e(i)$  得到

$$\langle s(i), g_m \rangle = \langle f(i), g_m \rangle + \langle e(i), g_m \rangle.$$

由于小波函数在时频域都具有较好的局域性,其变尺度特性使小波变换对确定信号具有一种“集中”的能力,且能较好地表示信号的局部结构特征.所以小波变换去噪主要是利用信号和噪声的 Lipschitz 指数在局部结构特征下所表现的奇异性对小波系数进行处理.

### 3 小波去噪的方法

#### 3.1 基于模极大值的图像去噪法

1992年, Mallat 提出用奇异点 模极大值法检测信号的奇异点,根据有用信号和噪声的小波变换在奇异点的模极大值的不同特性,采用多分辨率理论,由粗即精地跟踪各尺度  $j$  下的小波变换极大值来消除噪声.其去噪算法是:

步骤 1 对含噪图像进行小波变换.

步骤 2 提取小波分解中第一层的低频图像,跟踪该尺度下的小波变换极值点.

步骤 3 令  $j = 1$ ,对第一层低频图像进行小波变换,提取第二层低频图像信号,且以步骤 2 中的小波变换极值点为参考,清除幅值减小的极值点,保留幅值增加的极值点.

步骤 4 令  $j = 2, 3, \dots$ , 重复步骤 3.

步骤 5 重构图像,得到去噪后的图像.

模极大值法主要适于图像中混有白噪声且图像中含有较多奇异点的情况,去噪后的图像没有多余振荡,能获得较高的信噪比,保持较高的时间分辨率.另外模极大值法要利用复杂的交替投影法来进行重构小波系数,因而计算速度非常慢且有时不稳定<sup>[7]</sup>.

#### 3.2 小波萎缩法

##### 3.2.1 阈值萎缩法

阈值萎缩法去噪的算法为:

步骤 1 选择合适的小波基并确定小波分解的层次  $N$  对含噪图像进行小波变换,得到小波分解系数.

步骤 2 在小波变换域设定阈值对小波系数进行处理,获得新的小波系数.

硬阈值处理法:

$$\hat{X} = T_h(w_{j,k}, t_n) = \begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}| \geq t_n, \\ 0, & |w_{j,k}| < t_n. \end{cases}$$

软阈值处理法:

$$\hat{X} = T_s(w_{j,k}, t_n) = \begin{cases} |w_{j,k}| - t_n, & |w_{j,k}| \geq t_n, \\ 0, & |w_{j,k}| < t_n. \end{cases}$$

半软阈值处理法:

$$\hat{X} = T_{semi}(w_{j,k}, t_n) =$$

$$\begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}| > t_2, \\ t_2(|w_{j,k}| - t_1) / (t_2 - t_1), & t_1 < |w_{j,k}| \leq t_2, \\ 0, & |w_{j,k}| \leq t_1. \end{cases}$$

步骤 3 通过小波逆变换,重构图像,得到去噪图像.

阈值法去噪的应用具体有以下几个方面:

(1) 通用阈值去噪法.这是应用最广泛的一种小波去噪方法,

$$T = e^{-\frac{2 \log(M \times N)}{[8]}}$$

其中  $e$  是噪声标准方差;  $M \times N$  为图像尺寸,实际应用时根据图像的特点选取硬、软、半软阈值处理法.

(2) 自适应阈值去噪法. 阈值过大或过小都不能达到在去噪的同时保留图像细节和边缘信息.通过对阈值函数进行修改<sup>[2]</sup>, Maarten Jansen 等<sup>[9]</sup>提出能提高去噪效率的不同阈值选取法,诸如水平相关阈值去噪法, Mario 等<sup>[10]</sup>提出基于贝叶斯估计的小波收缩阈值的图像降噪方法, Mario 和胡海平等<sup>[10,11]</sup>通过最小 Bayes 风险的方法对图像小波变换后的小波系数进行估计,尚晓清等<sup>[12]</sup>提出基于子带的自适应阈值, Huang X 等<sup>[13]</sup>利用统计学中的毕达哥斯定理选取小波阈值进行图像去噪, Grace Chang S 和 Detlev Marpe 等<sup>[14,15]</sup>自适应小波阈值图像去噪法,同时给出相应阈值优化的公式,通过选取最佳的阈值来达到理想的效果.

(3) 小波包阈值去噪法. 小波包分析能为信号提供一种更精细的分析方法,它将频带进行多层次划分,对多分辨率没有细分的高频部分进一步分解,并能根据被分析信号的特征,自适应地选择相应频带,提高时频分辨率.基于小波包变换的阈值法去除图像斑点噪声效果很好且保持了边缘特征信息<sup>[16]</sup>.在贝叶斯结构中自动估计阈值采用复小波包来去噪,其实实验表明,它比小波包变换具有计算速度快等特点<sup>[6]</sup>.

(4) 平移不变小波去噪法. 它在阈值法的基础上加以改进<sup>[5,6]</sup>,其方法是:对含噪图像进行  $n$  次循环平移,对平移后的图像进行阈值去噪处理,再对去噪的结果进行平均<sup>[17,18]</sup>.它不仅能有效抑制阈值去噪法产生的伪 Gibbs 现象,而且能减小原始信号和估计信号之间的 MSE 和提高 SNR.缺点是计算复杂度太高. Tien 等人<sup>[19]</sup>则进一步利用平移不变多小波变换进行去噪, Cohen 等人将小波包和平移不变法结合起来<sup>[1]</sup>,避免了一些特征模糊化的现象.

(5) 迭代小波阈值法. Coifman & Wickerhauser 提出迭代去噪算法, R. Ranta 等<sup>[20]</sup>提出固定点的小波阈值迭代算法,大大提高计算效率. Detlev Marpe<sup>[15]</sup>提出通过对基于上下文的自适应阈值进行

迭代运算,可取得更准确的重构,图像视觉质量大增, MSE 较低.

### 3.2.2 比例萎缩法

它是将每一个带噪系数乘以一个比例系数来对原系数进行估计.目前最具代表性的比例萎缩法是利用最大似然准则的 LAWML 和利用最大后验概率准则的 LAWMAP<sup>[8]</sup>.

相对来说,比例萎缩去噪后的重建误差比阈值萎缩法小,但重建的信号没有阈值萎缩那样光滑且不利于信号的压缩.谢杰成等<sup>[8]</sup>提出一些改进措施.

### 3.2.3 自适应树小波萎缩法

信号在各层相应位置上的小波系数往往具有很强的相关性,而噪声具有弱相关或不相关的特点,根据对小波系数树结构及在边缘处呈现的所谓“父子”相关性<sup>[4,12,21]</sup>,将小波尺度的相关信息和阈值结合起来,能较好的将边缘结构从噪声中区分开来<sup>[22]</sup>,这样可对图像进行去噪. Walker JS 等<sup>[4]</sup>提出一种将小波变换二叉树的统计特性和小波收缩结合起来的图像去噪新方法.

## 3.3 多小波去噪法

在信号去噪中多小波优于标量波<sup>[9,23]</sup>. Jean-Luc Starck 提出通过合并邻域系数的办法来进行多小波阈值化处理图像噪声,去噪效果超过了单小波,优于传统的方法<sup>[23]</sup>.多小波去噪算法<sup>[23,24]</sup>为:

步骤 1 运用一个预滤波器将含噪图像转变成多流数据.

步骤 2 对预处理后多流数据执行多小波变换,得到多小波系数.

步骤 3 对多小波系数阈值化.

步骤 4 对阈值化后的多流数据 IDMWT.

步骤 5 对 IDMWT 后的数据进行后滤波处理,得到去噪图像.

## 3.4 基于小波系数模型的去噪法

小波去噪中,小波系数模型非常重要,只有在成功的小波系数模型上,才可能提出成功的去噪方案<sup>[8]</sup>. S. Grace Chang<sup>[25]</sup>提出基于上下文模型的空间自适应小波去噪法,结果表明图像质量好. Grouse 等提出一种基于小波域隐式马尔可夫模型的统计信号处理结构, Hua Xie 和 Aleksandra Pizurica<sup>[17,26]</sup>运用有关小波系数空间族的先验知识,采用马尔可夫随机场模型进行图像去噪.利用多尺度随机过程对小波图像系数进行建模,通过阈值判断和邻域判断相结合的方法区分对应边缘处的系数,然后对边缘区和非边缘区的小波系数进行不同的估计<sup>[27]</sup>,达到图像去噪的目的.文献 [28] 将层内和层外统计模型联合起来去

噪,效果相当好.

## 3.5 脊波 曲波去噪法

Candes & Donoho 应用现代调和概念和方法,并在使用在小波分析和群展开理论中发展的技术,针对具有较多突变边缘的问题,构造特殊结构的小波基,如 ridgelets 和 curvelets,以修正小波变换减少在不连续的边缘附近高频系数产生的数量<sup>[29]</sup>.为了将脊波变换应用到数字图像中,Do 提出一种可逆变换的正交的、重构性相当好的有限脊波变换,其实现机制是 Radon 变换<sup>[30]</sup>.脊波分析<sup>[34]</sup>等效于目标函数的 Radon 变换域的小波分析,即若令函数的脊波变换为  $R(f)(V) = \langle f, h \rangle$ .

单尺度脊波是在一个基准尺度  $s$  进行脊波变换,对应于单尺度脊波, Candes 和 Donoho 构造了曲线波或者称为多尺度脊波,它是在所有可能的尺度  $s \geq 0$  进行脊波变换,曲波变换是可逆变换的二维各向同性的小波变换、分割 Radon 变换 1D 小波变换的结合<sup>[30]</sup>.在二维情况,当图像具有奇异曲线,并且曲线是二次可微的,则曲线波可以自适应地“跟踪”这条奇异曲线,并且他们构造曲线波的紧的框架,对于具有光滑奇异性曲线的目标函数,曲线波提供稳定的、高效的和近于最优的表示<sup>[34]</sup>.

## 3.6 综合法

小波图像去噪效果比经典的方法要好,实际应用中将小波和经典的方法结合起来,去噪效果往往会更好,本人对 B 超图像做过试验,去噪效果优于单独的小波去噪或经典方法.小波图像去噪与经典方法的结合主要有以下几种:

(1) 小波变换与维纳滤波器或中值滤波等结合起来<sup>[13]</sup>.

(2) 将小波变换 小波收缩、小波压缩与广义验证法结合起来去噪<sup>[31,32]</sup>.

(3) 利用聚类分析和小波变换结合起来进行去噪<sup>[33]</sup>.

(4) 将小波与 PDE 结合起来去噪,在去噪的同时较好的解决了突变边缘的问题<sup>[29]</sup>.

## 4 展望

目前小波去噪方法已成为去噪一个重要分支和主要研究方向<sup>[1]</sup>,小波阈值萎缩法的研究仍非常活跃,小波在 Gaussian 噪声的滤除方面收到了很好的效果.由于非 Gaussian 噪声还没有找到理想的小波系数模型,故对斑点噪声的去噪效果总是不太理想.抑制斑点噪声仍然是 SAR 和医学超声图像的一个研究重点.近两年来应用多小波去噪也日益成熟<sup>[7,9]</sup>.如何建立非高

斯噪声的分布模型,根据获得的先验知识和已有先验知识进行准确的建模,对于对非高斯噪声的去噪非常重要.寻找理想的小波系数模型已成为目前小波去噪研究的一个方向<sup>[27]</sup>,如何使用高斯噪声分布的去噪方法对非高斯噪声进行延拓都是值得进一步探讨的课题.随着脊波和曲波的出现,提高了模型的准确性,改善了小波的去噪性能,脊波、曲波、边缘波也会成为当前研究的一大趋势.实践证明,根据具体图像选择恰当的结合方法往往比任一单独去噪方法要好.

当前小波去噪方法几乎是针对灰度图像的,对彩色图像的研究不多.随着小波去噪方法的不断完善和发展,对彩色图像去噪的研究是一个很有研究潜力的领域,它在图像去噪领域将会有更广阔的前景.

### 参考文献

- 1 谢杰成,张大力,徐文立.小波图象去噪综述.中国图象图形学报,2002,7(3A): 209~ 217.
- 2 Jean-Luc Starck, Emmanuel J Candès, David L Donoho. The curvelet transform for image denoising. IEEE Trans on Image Processing, 2002, 11(6): 670~ 684.
- 3 Donoho D L. Denoising by soft-thresholding. IEEE Trans Inform Theory, 1995, 5(41): 613~ 627.
- 4 Walker J S, Chen Ying Jui. Image denoising using tree-based wavelet subband correlation and shrinkage. Opt Eng, 2000, 11: 2900~ 2908.
- 5 Bruce A Thomas, Jeffrey J Rodriguez. Wavelet-based color image denoising. IEEE International Conference on Image Processing Proceedings, 2000, (2): 804~ 807.
- 6 Andre Jalobeanu, Laure Blanc-Feraud, Josiane Zerubia. Satellite image deconvolution using complex wavelet packets. IEEE International Conference on Image Processing Proceedings, 2000, (3): 809~ 812.
- 7 Wang Ling. Orthogonal multiwavelets transform for image denoising. IEEE Proceedings of ICSP, 2000. 987~ 991.
- 8 谢杰成,张大力,徐文立.一种小波去噪方法的几点改进.清华大学学报(自然科学版),2002,42(9): 1269~ 1272.
- 9 Maarten Jansen, Adhemar Bultheel. Multiple wavelet threshold estimation by Generalized Cross Validation for images with correlated noise. IEEE Trans Image Processing, 1999, 8(7): 947~ 953.
- 10 Mario A T Figueiredo, Robert D Nowak. Wavelet-based image estimation an empirical Bayes approach using Jeffreys' noninformative prior. IEEE Trans on Image Processing, 2001, 10(9): 1322~ 1331.
- 11 胡海平,莫玉龙.基于贝叶斯估计的小波阈值图像降噪方法.红外与毫米学报,2002,21(1): 74~ 76.
- 12 尚晓清,王军锋,宋国乡.一种基于自适应阈值的图像去噪新方法.计算机科学,2003,30(9): 70~ 71.

- 13 Huang X, Woolsey G A. Image denoising using Wiener filtering and wavelet thresholding. IEEE International Conference on, 2000, 3 1759~ 1762.
- 14 Grace Chang S, Bin Yu, Martin Vetterli. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 9(9): 1532~ 1546.
- 15 Detlev Marpe, Hans L Cycon, Gunther Zander. Context-based denoising of images using iterative wavelet thresholding. Visual Communications and Image Proc, 2002, 4671: 907~ 914.
- 16 刘永昌,张平,严卫东,等.小波包阈值法去除合成孔径雷达图像斑点噪声.红外与激光工程,2001,30(3): 160~ 167.
- 17 Hua Xie, Leland E Pierce, Fawwaz T. Ulaby. SAR speckle reduction using wavelet denoising and Markov random field modeling. IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing, 2002, 40(10): 2196~ 2211.
- 18 Pavel Mrazek, Joachim Weickert. Rotationally invariant wavelet shrinkage. DAGM, 2003, 2781: 156~ 163.
- 19 Bui T D, Chen G. Translation-invariant denoising using multiwavelets. IEEE Trans Signal Processing, 1998, 46(12): 3414~ 3420.
- 20 Ranta R, Heinrich C, Valérie Louis-Dorr, et al. Interpretation and improvement of an iterative wavelet-based denoising method. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(8): 239~ 241.
- 21 Levent endur, Ivan W Selesnick. Bivariate shrinkage with local variance estimation. IEEE Signal Processing Letters, 2002, 9(12): 438~ 441.
- 22 Lei Zhang, Paul Bao. Denoising by spatial correlation thresholding. IEEE Trans on Circuits & Systems for Video Technology, 2003, 13(6): 535~ 538.
- 23 Chen G Y, Bui T D. Multiwavelets denoising using neighboring coefficients. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(7): 211~ 214.
- 24 李红,林富春,金亮.基于SA4向量小波的图像去噪.信号处理,2002,18(4): 345~ 348.
- 25 Grace Chang S, Bin Yu, Martin Vetterli. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 9(9): 1522~ 1531.
- 26 Aleksandra PIZURICA, Wilfried PHILIPS. A wavelet-based image denoising technique using spatial priors. IEEE International Conference on Image Processing Proceedings, 2000, (3): 296~ 299.
- 27 谢杰成,张大力,徐文立.基于小波系数多尺度随多尺度随机过程模型的去噪方法.清华大学学报(自然科学版),2003,43(9): 1222~ 1225.
- 28 Aleksandra Pizurica, Wilfried Philips, Ignace Lemahieu. A

joint inter-and intrascale statistical model for Bayesian wavelet based image denoising. *IEEE Trans on Image Processing*, 2002, 11(5): 545~ 557.

29 高鑫. 基于小波变换和 PDE 模型噪声与模糊图像恢复: [博士论文]. 北京: 北京师范大学, 2001.

30 Jean-Luc Starck, Fionn Murtagh, Emmanuel J Candès, et al. Gray and color image contrast enhancement by the curvelet transform. *IEEE Trans on Image Processing*, 2003, 12(6): 706~ 717.

31 Norman Weyrich, Gregory T Warhola. Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denoising. *IEEE*

*Trans on Image Processing*, 1998, 7(1): 82~ 90.

32 Carl Taswell. The What, How, and Why of Wavelet shrinkage denoising. *IEEE Computing in Science & Engineering*, 2000. 12~ 19.

33 甘祥超, 武栓虎. 谈正. 基于小波四叉树的图像去噪方法. *计算机研究与发展*, 2001, 38(3): 341~ 343.

34 焦李成, 侯彪, 刘芳. 脊函数网络逼近: 进展与展望. *工程数学学报*, 2002, 19(1): 2~ 36.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 206 页 Continue from page 206)

等效 M-C 准则.

(2) 当  $\alpha$  取某一值时, 由  $F_1$  和  $F_2$  屈服函数可知,  $r$  为常数 (即  $J_2$  等于某个常数), 而  $J_2$  与中间应力  $\sigma_2$  有关, 所以双圆锥屈服准则考虑了中间应力  $\sigma_2$  对屈服面的影响. 可见, 双圆锥屈服准则推广了 M-C 准则.

(3) 相似角的引入, 揭示了 M-C 准则与双圆锥屈服准则的内在对应关系. 利用 M-C 准则与双圆锥屈服准则屈服点的转换关系或者  $\alpha$ Or 平面上 M-C 准则与双圆锥屈服准则屈服线的几何关系, 均可证明任何一个圆锥屈服面都不能取代 M-C 准则.

(4) 算例分析表明, 双圆锥屈服准则所得的边坡稳定系数与极限平衡法十分接近, 双圆锥屈服准则的其他应用有待进一步研究和验证.

#### 致谢

感谢许靖、邹存俊两位硕士研究生为本文所做的部分工作及宝贵建议.

#### 参考文献

1 郑颖人, 赵尚毅, 张鲁渝. 用有限元强度折减系数法进行边坡稳定分析. *中国工程科学*, 2002, 4(10): 57~ 61.

2 赵尚毅, 郑颖人, 邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析. *岩石力学与工程学报*, 2003, 22(2): 254~ 260.

3 时卫民, 郑颖人, 张鲁渝. 岩质高边坡的有限元分析及其简化分析方法. *地下空间*, 2001, 21(5): 455~ 460.

4 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究. *水利学报*, 2003, 1: 21~ 27.

5 Ugai K. A method of calculation of total factor of safety of slopes by elasto-plastic FEM. *Soils and Foundations*, 1989, 29(2): 190~ 195.

6 Ugai K, Leshchinsky D. Three dimensional limit equilibrium

and finite element analysis: a comparison of results. *Soils and Foundations*, 1995, 35(4): 1~ 7.

7 Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite elements. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387~ 403.

8 Manzari M T, Nour M A. Significance of soil dilatancy in slope stability analysis. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 2000, 126(1): 75~ 80.

9 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数. *岩土工程学报*, 2002, 24(3): 343~ 346.

10 G. 哥德赫编 [西德]. 有限元法在岩土力学中的应用. 张清, 张弥译. 北京: 中国铁道出版社, 1983.

11 李泳偕, 施泽华. 塑性力学. 北京: 水利电力出版社, 1987.

12 Drucker D C, Prager W. Soil mechanics and plastic analysis in limit design. *Quart Appl Math*, 1952, 10: 157~ 165.

13 Zienkiewicz O C, Pande G N. Finite elements in geomechanics. In: Gudehus G. *ASM E*, 1978. 175~ 190.

14 Humpheson C, Naylor D J. The importance of the form of the failure criterion. *C/R/243/75*, Swansea, 1975.

15 Meek J L. Excavation in Rock. Theory and practice in F E Structural Analysis. Yamada Y, Gallagher R H, eds. *Univ of Tokyo Press*, 1973. 195~ 214.

16 徐干成, 郑颖人. 岩土工程中屈服准则应用的研究. *岩土工程学报*, 1990, 12(2): 93~ 99.

17 戴自航, 沈蒲生. 摩尔-库仑等面积圆屈服准则的简化形式及应用. *福州大学学报*, 2003, 31(4): 454~ 459.

18 张鲁渝, 时卫民, 郑颖人. 平面应变条件下土坡稳定有限元分析. *岩土工程学报*, 2002, 24(4): 487~ 490.

19 余同希. 塑性力学. 北京: 高等教育出版社, 1989.

20 朱伯芳. 有限单元法原理与应用. 第 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.

(责任编辑: 邓大玉 路存涛)