

# 双圆锥屈服准则理论及其工程应用\*

## The Double-conic Yield Criterion Theory and Its Application in Engineering

谢肖礼<sup>1,2</sup>Xie Xiaoli<sup>1,2</sup>

(1. 广西大学土木建筑工程学院 南宁市大学路 100号 530004;

2. 大连理工大学海岸与近海工程国家重点实验室 辽宁大连 116024)

(1. College of Civil Architectural Engineering, Guangxi University, 100 Daxue Road, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning, 116024, China)

**摘要** 引入相似角并利用非关联流动法则,在空间状态下基于 M-C准则导出一种新的屈服准则——双圆锥准则.该准则与 M-C准则所得的塑性体应变增量完全相等,其特定的 12条子午线与 M-C准则等效,并体现了中间应力对屈服的影响.把双圆锥准则与有限元强度折减系数法结合,通过对  $\alpha$ - $\varphi$  的等效替换,利用 ANSYS通用程序进行边坡稳定分析,所得结果与极限平衡法吻合良好.

**关键词** M-C准则 双圆锥屈服准则 非关联流动法则 塑性体应变增量 有限元强度折减系数法 D-P准则  
中图分类号 TU432

**Abstract** A new yield criterion in 3-D space—the double-conic yield criterion based on the Mohr-Coulomb criterion by inducing similar angle and using non-associated flow rule was deduced. The plastic volume strain increments obtained by the Mohr-Coulomb criterion and the conic yield criterion are completely equal. The twelve given meridians of the latter equal the former, furthermore, the latter embodies the influence of medial stress to yield. Connecting the conic yield criterion with strength reduction FEM, the safety factors obtained by FEM are fairly close to the results of conventional equilibrium method.

**Key words** Mohr-Coulomb criterion, double-conic yield criterion, non-associated flow rule, plastic volume strain increment, strength reduction by FEM, Drucker-Prager criterion

西部开发是我国实现地区平衡发展和可持续发展的重大战略举措.然而,我国西部地区山高坡陡、沟壑纵横,城市建筑依山而立,公路、铁路翻山越岭,复杂多变的地形地貌决定了我国西部开发将面临大量滑(边)坡工程.滑(边)坡稳定性问题是西部开发中的热点与难点问题<sup>[1]</sup>.

边坡稳定分析是经典土力学最早试图解决而至今仍未圆满解决的课题,各种稳定分析方法在国内外水平大致相当.对于均质土坡,传统稳定分析方法主要有极限平衡法、极限分析法和滑移线场法等,就目前工程应用而言,主要还是极限平衡法.极限平衡法需要事先知道滑动面的位置和形状,且可以通过各种

优化方法来搜索危险滑动面.但是,对于岩质边坡,由于实际岩体中含有大量不同构造、产状和特性等不连续结构面(如层面、节理、裂隙、软弱夹层、岩脉和断层破碎带等),给岩质边坡的稳定分析带来了巨大的困难.传统极限平衡方法尚不能搜索出岩质边坡的危险滑动面以及相应的稳定安全系数.而目前的各种数值分析方法,一般只是得出边坡应力、位移、塑性区,也无法得到边坡危险滑动面以及相应的安全系数<sup>[2,3]</sup>.随着计算机技术的发展,有限元强度折减系数法<sup>[4]</sup>近年来在国内外<sup>[5-8]</sup>受到关注,有限元法较传统的方法有如下优点<sup>[9]</sup>:①能够对具有复杂地貌、地质的边坡进行计算;②考虑了土体的非线性弹塑性本构关系,以及变形对应力的影响;③能够模拟土坡的失稳过程及其滑移面形状;④能够模拟土体与支护的共同作用;⑤求解安全系数时,可以不需要假定滑移面的形状,也无需进行分条.在土力学及其类似的应用

2004-03-25收稿.

\* 国家自然科学基金(50068001)、中国博士后研究基金、广西自然科学基金(0339017)和桂教科研字 2002第 316号资助项目.

领域中,使用了各式各样的屈服面.在最简单的理想塑性体中,屈服面的形状符合著名的莫尔-库仑 (Mohr-Coulomb) 准则 (以下简称 M-C 准则),故在岩土工程中 M-C 准则应用广泛<sup>[10]</sup>.在  $\pi$  平面上, M-C 屈服线的形状是六角状的,并且 M-C 屈服面在主应力空间有一个奇异的顶点,这些奇异点导致数值计算困难,并且 M-C 准则没有考虑中间应力的影响<sup>[11]</sup>. M-C 准则的缺陷,使得它很难应用于有限元分析.为了消除 M-C 准则的奇异点的影响, Drucker 和 Prager<sup>[12]</sup> 曾经导出一个内切角锥的屈服面,它虽然仍有一个角顶点,但在这个内切角锥上,已经把原来的拐角变成光滑表面了,遗憾的是它与真实破坏情况不符<sup>[10]</sup>.但为了计算方便,仍采用德鲁克-普拉格 (Drucker-Prager) 类屈服准则 (以下简称 D-P 准则) 去近似 M-C 准则,在  $\pi$  平面上一般有 M-C 准则的外接圆、内接圆、内切圆,这些近似准则被许多大型有限元程序 (如 ANSYS、MARC、NASTRAN 等) 所采用.研究表明,采用外接圆准则所得结果与 M-C 准则理论计算存在很大误差. Zienkiewicz, Pande, Naylor, Humpheson, Nayak, Meek<sup>[13-15]</sup> 等作了很多的研究工作去逼近 M-C 准则,但仍不够理想,为此徐干成、郑颖人等又提出了等面积圆屈服准则<sup>[16]</sup>,效果良好,但对复合边坡,与极限平衡法所得结果一般略偏大<sup>[17]</sup>.张鲁渝等<sup>[18]</sup> 提出在平面应变条件下与 M-C 准则精确匹配的 D-P 准则,所得结果令人满意,但其适用范围为平面应变状态下.本文引入相似角并采用非关联流动法则,在空间状态下基于 M-C 准则创立一个新的屈服准则 (双圆锥准则).该准则考虑中间主应力对屈服的影响,而且屈服面在空间是光滑曲面;从几何上看,屈服面仍为 D-P 型;从物理意义上看,与 M-C 准则所得塑性体应变增量完全相等.因此,这种新的屈服准则可以代替 M-C 准则,并可用于有限元分析中,因此,可以更好地解决西部开发过程中的边坡稳定、土体与支护共同作用、节理岩质边坡的滑动等问题,这对西部开发具有重要的意义及科学意义.

1 理论推导

1.1 相似角的定义及其计算式

在主应力空间中,某点的应力状态可用  $P(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  或向量  $\vec{OP}$  表示,见图 1.现在通过原点作一与三坐标轴夹角相同的直线  $Od$ ,在  $Od$  直线上有:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3, \tag{1}$$

且对应着静水压力状态,故直线  $Od$  称为静水压力轴.在静水压力轴上应力偏量为 0.与静水压力轴相

垂直的平面称为偏平面,通过原点的偏平面称为  $\pi$  平面.

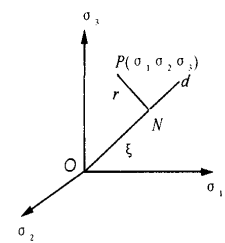


图 1 主应力空间  
Fig. 1 Principal stress space

于是,将向量  $\vec{OP}$  分解为沿静水压力轴的向量  $\vec{ON}$  和偏平面中的向量  $\vec{NP}$ .显然,在静水压力轴上的向量  $\vec{ON}$  为:

$$\vec{ON} = [\epsilon_m \quad \epsilon_m \quad \epsilon_m], \tag{2}$$

则  $\vec{ON}$  的长度为:

$$a = |\vec{ON}| = \sqrt{\epsilon_m^2 + \epsilon_m^2 + \epsilon_m^2} = \sqrt{3} \epsilon_m = \sqrt{3} \epsilon_{\alpha}. \tag{3}$$

$\vec{NP}$  由下式确定:

$$\begin{aligned} \vec{NP} &= \vec{OP} - \vec{ON} \\ &= [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3] - [\epsilon_m \quad \epsilon_m \quad \epsilon_m] = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{其中 } s_1 + s_2 + s_3 = 0. \tag{5}$$

$\vec{NP}$  平方后得:

$$|\vec{NP}|^2 = r^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2J_2 \tag{6}$$

或

$$r = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3} \epsilon_{\alpha}. \tag{7}$$

由此可见,  $\vec{NP} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]$  是  $\vec{OP} = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3]$  在偏平面的分量.

因为应力空间各应力主轴与偏平面的夹角均相同,故它们在偏平面上投影的夹角也彼此相同 ( $\frac{2c}{3}$  或  $120^\circ$ ).在偏平面上,  $r$  与  $\epsilon_1$  的投影轴之间的夹角  $\theta$  称为相似角,并以  $\epsilon_1$  轴投影方向的正向逆时针来度量,见图 2.因沿  $\epsilon_1$  在偏平面上的投影轴的单位向量在主应力空间中的分量为:

$$\vec{i} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2 \quad -1 \quad -1]. \tag{8}$$

于是

$$\vec{NP} \cdot \vec{i} = r \cos \theta \tag{9}$$

代入式 (4)、(7),并利用式 (5),可得到相似角  $\theta$ :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{s_1}{J_2} = \frac{2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}{2\sqrt{3} J_2} = \frac{\sqrt{6} s_1}{2r}. \tag{10}$$

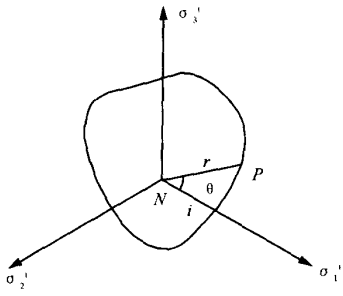


图 2 偏平面

Fig. 2 Deviation plane

### 1.2 $F_1$ 屈服函数的建立

M-C屈服面在主应力空间中为六棱锥体的表面,角锥体的轴与静水压力轴重合,与主应力轴成等角,角锥体的顶点在静水压力轴上。

在  $e_1$ - $e_2$ 平面上, M-C屈服表达式<sup>[19]</sup>为:

$$f_1 = c - \epsilon_1 \tan h, \quad (11)$$

当  $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$  时, (1) 式可写成主应力表达式:

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} = c \cos h - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} \sin h, \quad (12)$$

按文献 [20], 该屈服准则又可用  $a, r, \theta$  表示如下:

$$F_1(a, r, \theta) = \sqrt{2} a \sin h + \sqrt{3} r \sin(\theta + \frac{c}{3}) + r \cos(\theta + \frac{c}{3}) \sin h - \sqrt{6} c \cos h = 0, \quad (13)$$

式中:  $a = I_1 / \sqrt{3}, r = \sqrt{2} J_2, \theta \in [0, \frac{c}{3}]$ ,  $I_1, J_2$  分别为应力张量的第一不变量和应力偏张量的第二不变量。

为解决 M-C准则屈服角锥面的角点数值计算困难, Drucker-Prager修改了 M-C准则, 提出如下屈服准则:

$$F_1 = a I_1 + \sqrt{3} J_2 - k = 0, \quad (14)$$

式中,  $a, k$  为材料常数。

该表达式用  $a, r$  又可以表示为:

$$F_1 = \sqrt{3} a^2 + \frac{1}{2} r - k = 0. \quad (15)$$

令  $r = 0$ , 由式 (13) 和式 (15) 可得:

$$k = 3ac \coth h \quad (16)$$

令  $a = 0$ , 由式 (15) 可得:

$$r = \sqrt{2} k. \quad (17)$$

设岩土材料为理想弹塑性材料, 由非关联流动法则, 取塑性势函数  $Q = a I_1 + \sqrt{3} J_2$ , 则主应力空间有:

$$dX = d\lambda \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_i} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \epsilon_i} \quad (18)$$

其中  $d\lambda$  是比例系数,  $i = 1, 2, 3$ .

由式 (12), 可把 M-C屈服准则写为:

$$F = \frac{1 + \sinh \epsilon_1}{2} - \frac{1 - \sinh \epsilon_3}{2} - c \cosh = 0, \quad (19)$$

则有

$$\frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_1} = \frac{1 + \sin J}{2}, \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_2} = 0, \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon_3} = -\frac{1 - \sin J}{2}. \quad (20)$$

其中,  $J$  为剪胀角. 另有

$$\frac{\partial Q}{\partial \epsilon_i} = -3a I_1 \frac{\partial Q}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \epsilon_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \epsilon_i} = a I_1 + \frac{1}{2r} s_i, \quad (21)$$

$$\text{其中: } \frac{\partial a}{\partial \epsilon_i} = \frac{\partial a}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_i} = \frac{1}{3}, \frac{\partial r}{\partial \epsilon_i} = \frac{\partial r}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \epsilon_i} = \frac{1}{r} s_i.$$

把式 (20) 和式 (21) 代入式 (18) 可得:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin J = a I_1 + \frac{1}{2r} s_1, \quad (22)$$

$$0 = a I_1 + \frac{1}{2r} s_2, \quad (23)$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin J = a I_1 + \frac{1}{2r} s_3. \quad (24)$$

另有补充方程

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad (25)$$

$$s_1 = \frac{2r \cos \theta}{6}, \quad (26)$$

其中  $\theta$  为相似角。

由式 (22) ~ (26) 可得:

$$a I_1 = \frac{\sin J}{3}, \quad (27)$$

$$\theta = \arccos \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin J}{6} \right) \right]. \quad (28)$$

再由非关联流动法则可知  $a = \frac{\sinh h}{3}$ .

由式 (16) 可得:

$$k = 3ac \coth h = c \cosh h, \quad (29)$$

由式 (17) 可得:

$$r = \sqrt{2} k = \sqrt{2} c \cosh h \quad (30)$$

最后可以得到  $F_1$  的屈服函数为:

$$F_1 = \frac{\sqrt{3} \sinh h}{3} a + \frac{1}{2} r - c \cosh h = 0. \quad (31)$$

$F_1$  屈服函数与文献 [18] 相同, 但该屈服函数是在平面应变状态下导出的, 本文则是在空间状态下导出。

### 1.3 M-C屈服面法方向及其转换路径

现以关联流动法则说明 M-C屈服面法方向的转移路径。

如图 3 所示, 在  $\epsilon$  平面上 M-C屈服准则曲线为由  $A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  6 个角点构成的不等边六边

形,且与  $F_1$  圆交于  $B_i(i=1,2,3,4,5,6)$  6 个点,由于在  $c$  平面上 M-C 屈服准则六边形曲线的每一条边与  $F_1$  圆有类似的关系,为便于说明,现取其中的一条边  $A_3A_4$  与  $F_1$  圆的关系来分析。

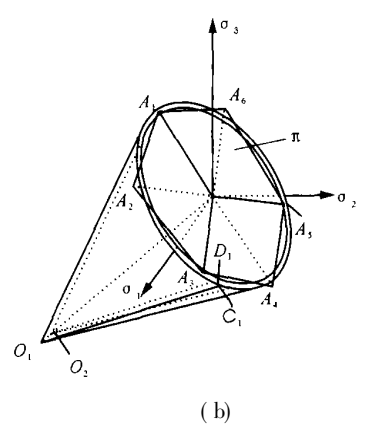
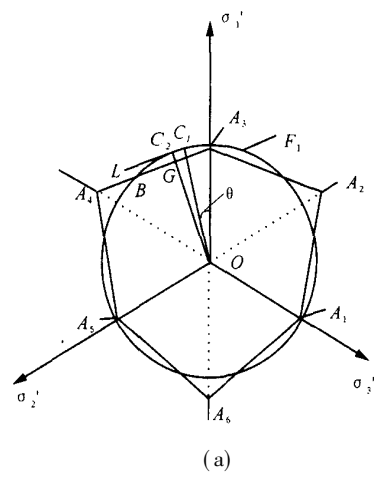


图 3 双圆锥准则几何解释

Fig. 3 The geometric explain of the double-conic yield criterion

(a)  $\pi$  平面上  $F_1$  圆与 M-C 屈服线关系; (b)  $A_3O_1A_4$  面相应子午线的空间位置。

(a) The relationship between  $F_1$  circle and M-C yield curves on the  $\pi$  plane; (b) The spacial location of meridians correspond to  $A_3O_1A_4$  plane.

设 M-C 屈服面中的  $A_3O_1A_4$  面外法线方向为  $n$ . 在  $c$  平面上作直线  $L // A_3A_4$ , 且与  $F_1$  圆相切于  $C_2$  点, 连接  $OC_2$  与  $A_3A_4$  交于  $G$  点. 在  $F_1$  圆上找到一点  $C_1$ , 使得  $\angle A_3OC_1 = \theta$ , 过子午线  $O_1C_1$  和  $O_1C_2$  作  $F_1$  屈服面的切平面  $c_1, c_2$ , 设  $c_1, c_2$  的法线方向分别为  $n_1, n_2$ . 由流动法则可知,  $n_1, n_2$  即为塑性应变增量的方向. 从  $n$  到  $n_1$  的转移路径如图 4 所示,  $n$  经转动  $T$  ( $T = \arctan(\frac{3\sqrt{2(3+\sin^2h)} - 2\sqrt{6}\sin h}{6\sin^2h + 2\sqrt{3(3+\sin^2h)}})$ ) 角与  $n_2$  重合, 再将子午线  $O_1C_2$  绕  $a$  轴顺时针转动  $\angle C_2OC_1$  ( $\angle C_2OC_1 = \arccos(\frac{3+\sin h}{2\sqrt{3+\sin^2h}}) - \theta$ ), 可以

证明  $\arccos(\frac{3+\sin h}{2\sqrt{3+\sin^2h}}) > \theta$ , 则子午线  $O_1C_2$  与子午线  $O_1C_1$  重合, 此时  $n_2$  转到  $n_1$  方向, 完成了法方向  $n$  到  $n_1$  方向的转换。

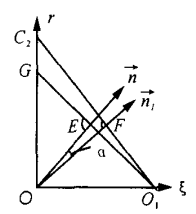


图 4  $F_1$  面与 M-C 面法方向关系

Fig. 4 The relationship of normal orientation between  $F_1$  and M-C planes

### 1.4 M-C 与 $F_1$ 屈服点向径的转移

$c$  平面是一个有特殊意义的平面, 现寻找  $c$  平面上 M-C 屈服线上 3 个特殊点在  $O_1C_1$  子午线上的对应位置。

设  $B$  点在子午线  $O_1C_1$  上相应点的坐标为  $(a, r, \theta)$ ,

$$\text{令 } \overline{r^2 + a^2} = \overline{2c \cosh}, \quad (32)$$

由式 (31) 得

$$r = \overline{2c \cosh} - \frac{\sqrt{6}}{3} \sinh a, \quad (33)$$

把式 (33) 代入式 (32) 得到一个关于  $a$  的一元二次方程, 求得  $a_{B1} = 0, a_{B2} = \frac{2\sqrt{3} \csc 2h}{3 + 2\sin^2 h}$ .

把  $a_{B1}, a_{B2}$  代入式 (32) 得:  $r_{B1} = \overline{2c \cosh}, r_{B2} = \frac{\sqrt{2(3 - 2\sin^2 h)}}{3 + 2\sin^2 h} c \cosh$ , 则点  $C_1(a_{B1}, r_{B1}, \theta), B_2(a_{B2}, r_{B2}, \theta)$  即为  $B$  点在子午线  $O_1C_1$  上的相应点。

用同样方法, 可以求得最小向径对应点  $G$  和最大向径对应点  $A_4$  与  $F_1$  圆锥子午线  $O_1C_1$  上点的相应关系.  $G$  点的对应点为  $(a_{G1}, r_{G1}, \theta), (a_{G2}, r_{G2}, \theta)$ ,  $A_4$  点的对应点为  $(a_{A41}, r_{A41}, \theta), (a_{A42}, r_{A42}, \theta)$ , 其中

$$a_{G1} = \frac{2\sqrt{3(3+\sin^2h)} + 3\sqrt{2}}{(3+2\sin^2h)\sqrt{3+\sin^2h}} c \sinh \cosh,$$

$$r_{G1} = \frac{\sqrt{2(3\sqrt{3+\sin^2h} - \sqrt{6}\sin h)}}{(3+2\sin^2h)\sqrt{3+\sin^2h}} c \cosh,$$

$$a_{G2} = \frac{2\sqrt{3(3+\sin^2h)} - 3\sqrt{2}}{(3+2\sin^2h)\sqrt{3+\sin^2h}} c \sinh \cosh,$$

$$r_{G2} = \frac{\sqrt{2(3\sqrt{3+\sin^2h} + \sqrt{6}\sin h)}}{(3+2\sin^2h)\sqrt{3+\sin^2h}} c \cosh,$$

$$a_{A41} = \frac{2\sqrt{3(3-\sinh)\sinh} + 3\sqrt{14\sin^2h + 12\sinh + 6}}{(3+2\sin^2h)(3-\sinh)} c \cosh,$$

$$r_{A41} =$$

$$\frac{3}{(3+2\sin^2h)} \frac{2(3-\sinh) - 2\sinh}{(3-\sinh)} \frac{21\sin^2h+18\sinh+9}{(3-\sinh)}$$

$$c \cosh h$$

$$a_{M42} =$$

$$\frac{2}{(3+2\sin^2h)} \frac{3(3-\sinh)\sinh - 3}{(3-\sinh)} \frac{14\sin^2h+12\sinh+6}{(3-\sinh)}$$

$$c \cosh h$$

$$r_{M42} =$$

$$\frac{3}{(3+2\sin^2h)} \frac{2(3-\sinh) + 2\sinh}{(3-\sinh)} \frac{21\sin^2h+18\sinh+9}{(3-\sinh)}$$

### 1.5 $F_1$ 屈服函数的适用范围

$F_1$ 屈服函数的  $k$ 值是由式(13)和式(15)确定的,没有考虑 M-C屈服面上对应最小向径的屈服点能否在  $O_1C_1$ 子午线上找到相应点,为此,设在 M-C屈服面的  $A_3O_1A_4$ 面上屈服点对应最小向径为  $OE$ ,  $F_1$ 屈服面上屈服点对应最小向径为  $OF$ .

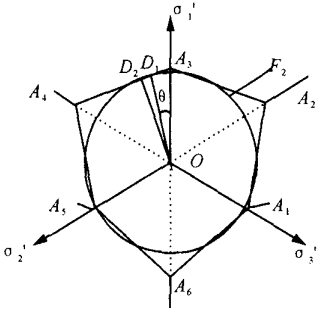


图 5  $a$  的范围  
Fig. 5 The range of  $a$

如图 5所示,  $O_1G$ 为 M-C准则过  $G$ 点的子午线,  $O_1C_2$ 为  $F_1$ 圆锥面上过  $C_2$ 点的子午线. 图 5中  $OE \perp O_1G, OF \perp O_1C_2$ ,由几何关系知,  $O$ 点到 M-C屈服面的最短距离即为  $OE$ ,  $O$ 点到  $F_1$ 圆锥的最小向径为  $OF$ , 因为  $O_1G < O_1C_2$ , 所以  $OF > OE$ , 说明在  $O_1C_2$ 子午线上找不到向径大小为  $OE$ 的点. (其中  $OG =$

$$\frac{\sqrt{6} c \cosh h}{3+ \sin^2 h}, OC_2 = \sqrt{2} c \cosh h, OO_1 = \sqrt{3} c \coth h, OF = \frac{\sqrt{6} c \cosh h}{3+ 2\sin^2 h}, OE = \frac{\sqrt{2} c \cosh h}{1+ \sin^2 h}$$

为此,以  $O$ 点为圆心,  $OF$ 为半径作圆弧与  $O_1G$ 交于  $M, N$ 两点,可以求得  $M, N$ 两点在  $aOr$ 平面上的坐标为  $(a_M, r_M), (a_N, r_N)$  其中

$$a_M = \frac{2}{3(1+ \sin^2 h)} \frac{3(3+ 2\sin^2 h) - 6(3+ \sin^2 h)}{3+ 2\sin^2 h} c \sinh h \cosh h, \quad (34)$$

$$r_M =$$

$$\frac{6(3+ 2\sin^2 h)}{3(1+ \sin^2 h)} \frac{(3+ \sin^2 h) + 2}{(3+ 2\sin^2 h)(3+ \sin^2 h)} \frac{3(3+ \sin^2 h) \sin^2 h}{(3+ \sin^2 h)}$$

$$c \cosh h, \quad a_N =$$

$$\frac{2}{3(1+ \sin^2 h)} \frac{3(3+ 2\sin^2 h) + 6(3+ \sin^2 h)}{3+ 2\sin^2 h} c \sinh h \cosh h, \quad (36)$$

$$r_N = \frac{6(3+ 2\sin^2 h)}{3(1+ \sin^2 h)} \frac{(3+ \sin^2 h) - 2}{(3+ 2\sin^2 h)(3+ \sin^2 h)} \frac{3(3+ \sin^2 h) \sin^2 h}{(3+ \sin^2 h)}$$

$$c \cosh h \quad (37)$$

可知 M-C准则在  $a \in (a_M, a_N)$  区间时,在  $F_1$ 圆锥面上没有与之相等的向径,证明了任何单个圆锥屈服面都不能取代 M-C准则. 因此,当  $a \notin (a_M, a_N)$  时, M-C准则上的任何点均可在  $F_1$ 圆锥面的  $O_1C_1$ 子午线上找到与之相应的点.

### 1.6 $F_1$ 屈服面的局部修正—— $F_2$ 屈服面的建立

由以上分析可知, M-C准则与  $F_1$ 圆锥面在  $a \in (a_M, a_N)$  区间没有对应关系,因此,需要一个新的屈服面  $F_2$ 作为补充. 为保证 M-C与  $F_2$ 所得塑性应变增量相等,保持  $F_1$ 中的参数  $a$ 不变,设

$$F_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sinh a + \frac{1}{2} r - k_2 = 0. \quad (38)$$

在  $\pi$ 平面上  $F_2$ 圆与 M-C屈服线关系如图 6所示.

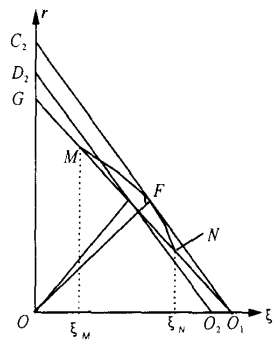


图 6  $\pi$ 平面上  $F_2$ 圆与 M-C屈服线关系

Fig. 6 The relationship between  $F_2$  circle and M-C yield curves on the  $\pi$  plane

利用平面解析几何方法可以求得图 4中  $E$ 点的坐标  $(a_E, r_E)$ , 其中

$$a_E = \frac{\sqrt{3} c \sin 2h}{3(1+ \sin^2 h)}, r_E = \frac{6(3+ \sin^2 h) c \cosh h}{3(1+ \sin^2 h)}$$

令  $E$ 点落在  $F_2$ 上, 则有

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \sinh a_E + \frac{1}{2} r_E - k_2 = 0, \quad (39)$$

可得  $k_2 = \frac{2\sin^2 h + 3(3+ \sin^2 h)}{3(1+ \sin^2 h)} c \cosh h$

很显然,当  $a \in (a_M, a_N)$  区间时,因  $O$  点到  $M-C$  屈服面的最小向径已落在  $F_2$  屈服面上,且保持  $\theta$  值不变,则  $M-C$  屈服面与  $F_2$  屈服面上的 6 条子午线等效,如图 3(b) 中  $O_2D_1$  就是其中之一。

最后可得新的屈服准则的 2 个函数如下:

$$F_1 = \frac{3 \sinh a}{3} + \frac{1}{2} r - c \cosh = 0, (a \in (a_M, a_N)); \quad (40)$$

$$F_2 = \frac{3 \sinh a}{3} + \frac{1}{2} r - \frac{2 \sin^2 h + \frac{3(3 + \sin^2 h)}{3(1 + \sin^2 h)} c \cosh = 0, (a \in (a_M, a_N)). \quad (41)$$

本文称式 (40) 和式 (41) 为双圆锥屈服准则。其中  $a_M, a_N$  分别由式 (34) 和式 (36) 确定。

从推导过程可知,  $M-C$  准则与双圆锥屈服准则的 12 条子午线所得的塑性应变增量完全相等,而双圆锥屈服准则的其他子午线是  $M-C$  准则所没有的,这说明双圆锥屈服准则是  $M-C$  准则的推广,它不但与  $M-C$  准则等效,而且反映了中间应力  $\sigma_2$  对屈服的影响,屈服面光滑,表达式简单,克服了  $M-C$  准则在棱角处导数不连续的缺陷。另外,还可以证明在  $ro^a$  面上  $F_1$  和  $F_2$  的子午线是平行的,这就保证了求解塑性应变增量的连续性。

## 2 应用举例

有限元强度折减系数法基本原理<sup>[1,4]</sup>是将岩土等坡体材料的强度指标值(粘聚力  $C$  内摩擦角  $h$ )同时除以一个折减系数  $F$ ,得到一组新的  $c', h'$  值,然后作为新的参数输入,再进行试算,当计算不收敛时,对应的  $F$  被称为坡体的最小稳定安全系数,此时坡体达到极限状态,发生剪切破坏,同时可得到坡体的破坏滑动面。

为便于有限元法应用于与岩土有关的工程问题数值分析,采用各种圆锥面代替  $M-C$  屈服面。现今流行的许多大型通用有限元程序采用的是  $D-P$  外接圆准则。为便于直接按岩土强度指标进行折减求边坡安全系数,可将本文提出的双圆锥屈服准则( $F_1$ )中的强度指标转换为  $D-P$  外接圆准则中的等效强度指标<sup>[17]</sup>。令:

$$\frac{2 \sinh h'}{3(3 - \sinh h')} = \frac{\sinh h}{3}, \quad (42)$$

$$\frac{6c' \cosh h'}{3(3 - \sinh h')} = c \cosh h \quad (43)$$

在用有限元强度折减系数法进行计算时,将等效强度指标  $c', h'$  按安全系数  $F$  折减,即  $c' = \frac{Cd}{F}, h'$

$= \arctan(\tan h' / F)$ , 将折减后得到的等效强度指标输入有限元程序,反复试算,直到计算达到敛散临界状态,此时所得的  $F$  值即为所求边坡的安全系数。

引用文献 [9] 中介绍的算例来说明上述方法的可靠性。

算例: 均质边坡,坡高  $H = 20\text{m}$ ,土容重  $V = 25\text{kN/m}^3$ ,粘聚力  $C = 42\text{kPa}$ ,内摩擦角  $h = 17^\circ$ ,弹性模量  $E$  为  $1000\text{kPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.3$ ,求坡角  $U = 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$  时边坡的安全系数。

由式 (42) 和式 (43) 求得算例中的等效强度指标为:  $h' = 13.5^\circ, c' = 32.98\text{kPa}$ 。

不同方法计算所得结果见表 1。计算采用大型通用有限元程序 ANSYS, 计算边界范围按文献 [4] 取坡角到左端为坡高的 1.5 倍, 坡顶到右端为坡高的 2.5 倍, 上下边界总高为坡高的 2 倍; 采用 8 节点四边形等参单元, 网格边长取  $2.5\text{m}$ , 局部单元细化。

表 1 不同方法安全系数计算结果

Table 1 The comparison of calculated safe factor

$\beta$ ( $^\circ$ )	有限元法* Finite elements method		简化法 Bishop Simplified	相对偏差 Relative distinction (%)	
	1	2		Relative distinction (%)	
				1- Bishop Bishop	2- Bishop Bishop
30	1.391	1.755	1.394	0.2	25.9
35	1.255	1.601	1.259	0.3	27.2
40	1.151	1.462	1.153	0.2	26.8
45	1.066	1.356	1.062	0.4	27.7
50	0.986	1.27	0.992	0.6	28

\* 1. 采用本文方法; 2. 采用  $M-C$  外接圆屈服准则。 \* 1. Adopt the method of this article; 2. Adopt the method of  $M-C$  circumscribed circle yield criterion

由表 1 的计算结果可以看出,采用本文的屈服准则所得计算结果与极限平衡法十分接近。

## 3 结论

(1) 利用非关联流动法则,令双圆锥屈服准则与  $M-C$  准则所得的塑性应变增量相等,求得  $a$  值和  $\theta$  值,  $k$  的值可以利用 2 个特殊点来定: 一是令双圆锥屈服面与  $M-C$  屈服面锥顶重合 ( $F_1$  屈服面)。二是令  $M-C$  屈服面上最小向径对应点落在双圆锥屈服面上 ( $F_2$  屈服面)。

由以上 2 个条件确定的 2 个圆锥面的  $a, \theta$  值相同,从而保证了 2 个圆锥面在同一方位的法方向也相同,说明用双圆锥屈服准则求解塑性应变增量是连续的。另外,还确保了  $M-C$  屈服面上的最小向径对应点能在双圆锥屈服面上找到相应的点,  $M-C$  屈服面的 6 个面分别与双圆锥屈服面的特定子午线相对应。可见,双圆锥屈服准则的 12 条特定子午线可以

(下转第 211 页 Continue on page 211)

joint inter-and intrascale statistical model for Bayesian wavelet based image denoising. *IEEE Trans on Image Processing*, 2002, 11(5): 545~ 557.

29 高鑫. 基于小波变换和 PDE 模型噪声与模糊图像恢复: [博士论文]. 北京: 北京师范大学, 2001.

30 Jean-Luc Starck, Fionn Murtagh, Emmanuel J Candès, et al. Gray and color image contrast enhancement by the curvelet transform. *IEEE Trans on Image Processing*, 2003, 12(6): 706~ 717.

31 Norman Weyrich, Gregory T Warhola. Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denoising. *IEEE*

*Trans on Image Processing*, 1998, 7(1): 82~ 90.

32 Carl Taswell. The What, How, and Why of Wavelet shrinkage denoising. *IEEE Computing in Science & Engineering*, 2000. 12~ 19.

33 甘祥超, 武栓虎. 谈正. 基于小波四叉树的图像去噪方法. *计算机研究与发展*, 2001, 38(3): 341~ 343.

34 焦李成, 侯彪, 刘芳. 脊函数网络逼近: 进展与展望. *工程数学学报*, 2002, 19(1): 2~ 36.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 206 页 Continue from page 206)

等效 M-C 准则.

(2) 当  $\alpha$  取某一值时, 由  $F_1$  和  $F_2$  屈服函数可知,  $r$  为常数 (即  $J_2$  等于某个常数), 而  $J_2$  与中间应力  $\sigma_2$  有关, 所以双圆锥屈服准则考虑了中间应力  $\sigma_2$  对屈服面的影响. 可见, 双圆锥屈服准则推广了 M-C 准则.

(3) 相似角的引入, 揭示了 M-C 准则与双圆锥屈服准则的内在对应关系. 利用 M-C 准则与双圆锥屈服准则屈服点的转换关系或者  $\alpha$ Or 平面上 M-C 准则与双圆锥屈服准则屈服线的几何关系, 均可证明任何一个圆锥屈服面都不能取代 M-C 准则.

(4) 算例分析表明, 双圆锥屈服准则所得的边坡稳定系数与极限平衡法十分接近, 双圆锥屈服准则的其他应用有待进一步研究和验证.

#### 致谢

感谢许靖、邹存俊两位硕士研究生为本文所做的部分工作及宝贵建议.

#### 参考文献

1 郑颖人, 赵尚毅, 张鲁渝. 用有限元强度折减系数法进行边坡稳定分析. *中国工程科学*, 2002, 4(10): 57~ 61.

2 赵尚毅, 郑颖人, 邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析. *岩石力学与工程学报*, 2003, 22(2): 254~ 260.

3 时卫民, 郑颖人, 张鲁渝. 岩质高边坡的有限元分析及其简化分析方法. *地下空间*, 2001, 21(5): 455~ 460.

4 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究. *水利学报*, 2003, 1: 21~ 27.

5 Ugai K. A method of calculation of total factor of safety of slopes by elasto-plastic FEM. *Soils and Foundations*, 1989, 29(2): 190~ 195.

6 Ugai K, Leshchinsky D. Three dimensional limit equilibrium

and finite element analysis: a comparison of results. *Soils and Foundations*, 1995, 35(4): 1~ 7.

7 Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite elements. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387~ 403.

8 Manzari M T, Nour M A. Significance of soil dilatancy in slope stability analysis. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 2000, 126(1): 75~ 80.

9 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数. *岩土工程学报*, 2002, 24(3): 343~ 346.

10 G. 哥德赫编 [西德]. 有限元法在岩土力学中的应用. 张清, 张弥译. 北京: 中国铁道出版社, 1983.

11 李泳偕, 施泽华. 塑性力学. 北京: 水利电力出版社, 1987.

12 Drucker D C, Prager W. Soil mechanics and plastic analysis in limit design. *Quart Appl Math*, 1952, 10: 157~ 165.

13 Zienkiewicz O C, Pande G N. Finite elements in geomechanics. In: Gudehus G. *ASM E*, 1978. 175~ 190.

14 Humpheson C, Naylor D J. The importance of the form of the failure criterion. *C/R/243/75*, Swansea, 1975.

15 Meek J L. Excavation in Rock. Theory and practice in F E Structural Analysis. Yamada Y, Gallagher R H, eds. *Univ of Tokyo Press*, 1973. 195~ 214.

16 徐干成, 郑颖人. 岩土工程中屈服准则应用的研究. *岩土工程学报*, 1990, 12(2): 93~ 99.

17 戴自航, 沈蒲生. 摩尔-库仑等面积圆屈服准则的简化形式及应用. *福州大学学报*, 2003, 31(4): 454~ 459.

18 张鲁渝, 时卫民, 郑颖人. 平面应变条件下土坡稳定有限元分析. *岩土工程学报*, 2002, 24(4): 487~ 490.

19 余同希. 塑性力学. 北京: 高等教育出版社, 1989.

20 朱伯芳. 有限单元法原理与应用. 第 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.

(责任编辑: 邓大玉 路存涛)