

二三个节点的耦合混沌系统的同步分析*

Synchronization Analysis of Coupled Chaotic Systems of Two and Three Nodes

李琢¹ 陈光旨¹ 薛郁¹ 覃团发²
Li Zhuo¹ Chen Guangzhi¹ Xue Yu¹ Qin Tuanfa²

(1. 广西大学物理科学与工程技术学院 南宁市大学路 100号 530004;

2. 广西大学计算机与电子信息学院 南宁市大学路 100号 530004)

(1. Coll. of Phy. Sci. & Engi. Tech., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China;

2. Coll. of Comp. & Elec. Info., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 以洛伦兹系统为对象,将其混沌吸引子视为网络节点,对具有二三个节点的单变量耦合网络与多变量耦合网络的同步进行研究,并计算它们的李雅谱诺夫指数谱,进而将分析的结论推广到多个节点相互耦合的复杂网络中。结果表明,通过多变量耦合的网络比单变量耦合的网络更容易达到同步。

关键词 混沌系统 同步 洛伦兹吸引子 李雅谱诺夫指数谱

中图分类号 O415.5

Abstract This article studies the synchronization of coupled networks, taking the Lorentz system as an example and regarding its chaotic attractor as networks nodes. Through the studies of coupled networks synchronization by linking single and multiple variables with two and three nodes, as well as the calculation of their Lyapunov spectrum, we found that multi-variable coupled networks is easy to synchronize than single-variable coupled networks.

Key words chaotic system, synchronization, Lorentz attractor, Lyapunov spectrum

1990年,美国海军实验室的 Pecora & Carroll 先后提出混沌同步及控制的方法以来^[1-3],混沌同步与控制已成为非线性动力学领域的研究热点。复杂网络同步的研究也初露端倪,并已遍及从物理学到生物学,甚至到社会科学的各个学科领域。

近来,在不同动力学网络中的同步研究方面取得了丰硕的成果。如 1999年 Watts^[4]对相振子在小世界网络中的同步的研究; Lago 等^[5]于 2000年对神经网络的同步的研究; Wang 和 Chen^[6]对混沌振子的小世界及自由标度网络同步的详细研究。Gade 和 Hu^[7]于 2000年对具有小世界相互作用的耦合映象格子同步进行的研究。目前,关于对连续时间的自由标度动力学网络也有学者进行详细研究^[8]。这些研究对现实复杂网络中的同步具有理论和实践意义。

考虑到混沌信号具有复杂的、不可预测的、对初始条件及其系统参数变化的高度敏感性的行为特征,

有实现同步的可能性,并且洛伦兹系统是一种典型的混沌系统,具有混沌系统的很多特性。在耦合网络中,可以有多种耦合方式,譬如:单变量耦合、多变量耦合、单向耦合、双向耦合等等。本文以洛伦兹系统为研究对象,对具有二三个节点的单变量双向耦合及多变量双向耦合的网络进行分析,进而将分析的结论推广到多个节点相互耦合的复杂网络。

1 2个节点相互耦合的混沌系统同步研究

如果 2个相同的混沌振子互相耦合,振子之间的关系可以有 2种不同的状态。一是耦合强度很低时,2个振子独立地在各自的混沌吸引子上运动,尽管吸引子是相同的,但各振子在吸引子上的运动轨道(即在混沌轨道上的“相位”)不同,两振子的运动不同步。如果耦合结构与系统运动有较好的匹配,同时又有适当的耦合强度时两振子不仅在同一吸引子上,而且在完全相同的轨道上运动,这时它们之间会形成混沌同步,且是精确同步。

对洛伦兹系统,首先考虑第一种情形:使网络中

2003-11-17收稿,2004-05-25修回。

* 国家自然科学基金(10147201)资助项目。

的 2 个节点进行单变量双向耦合,它们耦合后的状态方程为:

$$\begin{cases} dx_{1,2}/dt = \epsilon(y_{1,2} - x_{1,2}) + X_2(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ dy_{1,2}/dt = Vx_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}, \\ dz_{1,2}/dt = Uz_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2}, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}$ 是状态变量; ϵ, V, U 是 3 个正常数; X_2 为耦合系数. 在本文中,令 $X_1 = X_2 = X$, 调节耦合系数, 可使网络中的 2 个节点达到同步. 2 个节点的参数都选取为 $\epsilon = 10.0, V = 28.0, U = 8/3$ 时, 存在一临界耦合强度 $X_c = 2.7$. 当 $X < X_c$ 时, 2 个混沌系统各自运动在不同的混沌轨道上; 而当 $X > X_c$ 时, 2 个轨道会趋于精确同步混沌的状态:

$$\begin{cases} X_1(t) = X_2(t); \\ X_1(t) = (x_1, y_1, z_1, t); \\ X_2(t) = (x_2, y_2, z_2, t). \end{cases} \quad (2)$$

事实上, 对任意的耦合强度, 方程 (2) 的同步混沌态总是方程 (1) 的解, 这个解处于 $X_1(t) = X_2(t)$ 的不变子空间上, 只是在 $X < X_c$ 时这个解不稳定. 它的失稳是由同步解的最大横向李雅谱诺夫指数为正而引起的. 将方程 (1) 以 (2) 为参考态进行线性化, 得到的线性化方程的最大李雅谱诺夫指数正是同步解的最大横向李雅谱诺夫指数. 在图 1 中计算方程 (1) 的 4 个李雅谱诺夫指数. 在 $X > X_c$ 时, 同步混沌态稳定, 线性化方程的最大李雅谱诺夫指数为负, 它本身就是方程 (1), 即图 1 的第三大李雅谱诺夫指数. 当 $X < X_c$ 时, 这一指数从负变正, 表明同步态失稳^[9].

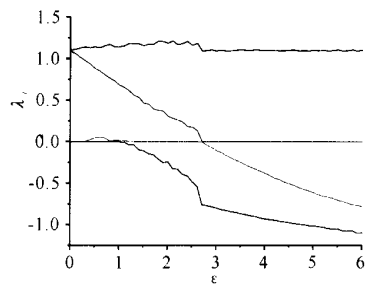


图 1 李雅谱诺夫指数谱 λ_i 与耦合强度 X 的关系
Fig. 1 Relation of Lyapunov spectrum λ_i and couples strength X

通常用整体误差状态响应函数:

$$e = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

来表征 2 个系统的同步情况. 在这里取耦合强度 $X = 3.5$, 则函数 e_2 随时间 t 变化的数值模拟结果如图 2 所示. 由图 2 可明显看出, 函数 e_2 随着时间 t 的演化而趋于零. 由此可见, 在加上耦合 $X = 3.5$ 时, 2 个节点达到完全同步.

第二种情形是: 使网络中的 2 个节点进行多变量双向耦合, 状态方程为:

$$\begin{cases} dx_{1,2}/dt = \epsilon(y_{1,2} - x_{1,2}) + X(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ dy_{1,2}/dt = Vx_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2} + X(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ dz_{1,2}/dt = Uz_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2} + X(z_{2,1} - z_{1,2}). \end{cases}$$

与第一种情形类似, 计算出李雅谱诺夫指数谱如图 3 所示. 同理通过图 3 中的第三大李雅谱诺夫指数可以确定其临界耦合强度 $X_c = 0.6$. 耦合强度 $X = 0.8$ 时, 对函数 e_2 随时间 t 变化的数值模拟结果如图 4 所示.

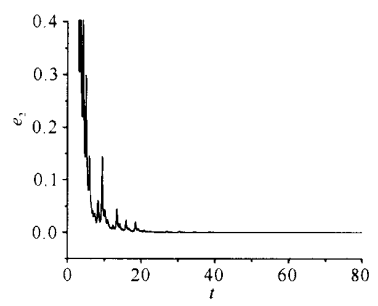


图 2 表征整体同步的状态误差响应
Fig. 2 Statusa response of charactering whole synchronization

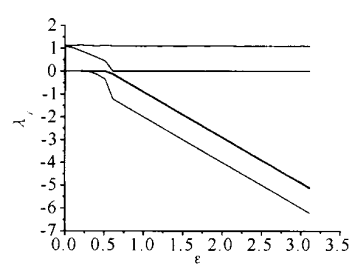


图 3 李雅谱诺夫指数谱 λ_i 与耦合强度 X 的关系
Fig. 3 Relation of Lyapunov spectrum λ_i and couples strength X

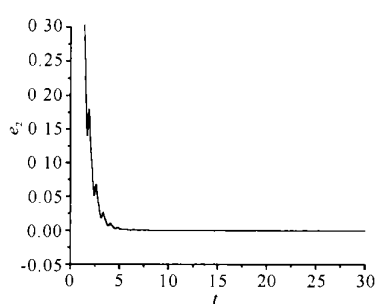


图 4 表征整体同步的状态误差响应
Fig. 4 Statusa response of charactering whole synchronization

由图 2 和图 4 可以看出, 2 种情形下洛仑兹系统的耦合误差状态响应轨迹都收敛到了 0 点, 也就是说网络中 2 个节点达到完全同步. 但它们达到完全同步时所需的临界耦合强度却相差很大.

2 3个节点相互耦合的混沌系统同步研究

同样,可以把 3个相互耦合的洛伦兹系统分别视为要研究的耦合网络节点.在第一种情形下,即单变量双向耦合下,它们整体的状态方程为:

$$\begin{cases} dx_{1,2,3}/dt = \epsilon(y_{1,2,3} - x_{1,2,3}) + X(x_{2,3,1} + x_{3,1,2} - 2^* x_{1,2,3}), \\ dy_{1,2,3}/dt = Vx_{1,2,3} - y_{1,2,3} - x_{1,2,3}z_{1,2,3} + X(y_{2,3,1} + y_{3,1,2} - 2^* y_{1,2,3}), \\ dz_{1,2,3}/dt = Uz_{1,2,3} + x_{1,2,3}y_{1,2,3} + X(z_{2,3,1} + z_{3,1,2} - 2^* z_{1,2,3}). \end{cases} \quad (3)$$

同样在上述参数下,作出方程(3)的 6个李雅谱诺夫指数谱,如图 5所示.当 $X = X_c > 3.6$ 时,方程(3)就会达到同步.下面是当 $X = 4$ 时表征整体误差状态响应的函数:

$$e_3 = (x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2 + (z_{i-1} - z_i)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad X_{i-1} = X_i; \quad (X_i = (x_i, y_i, z_i))$$

随时间 t 的变化,如图 6所示.由图 6可以明显看出,函数 e_3 随着时间的演化而趋于零.

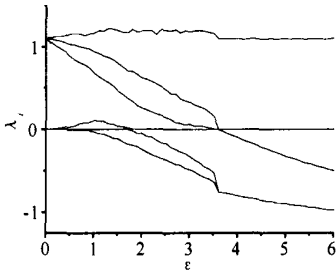


图 5 李雅谱诺夫指数谱 λ_i 与耦合强度 X 的关系

Fig. 5 Relation of Lyapunov spectrum λ_i and couples strength X

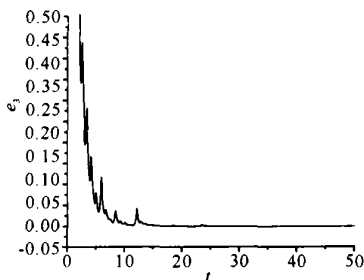


图 6 表征整体同步的状态误差响应

Fig. 6 Statusa response of charactering whole synchronization

从图 6可以得出,对于具有 3个相互耦合节点的网络,节点间通过单变量进行耦合,只要取一个稍大与临界耦合强度的耦合参数,数值模拟结果就会发现它们的耦合误差状态响应轨迹收敛到了 0点.即这个小网络达到了完全同步.

同理,在第二种情况下(多变量双向耦合),网络的状态方程为:

$$\begin{cases} dx_{1,2,3}/dt = \epsilon(y_{1,2,3} - x_{1,2,3}) + X(x_{2,3,1} + x_{3,1,2} - 2^* x_{1,2,3}), \\ dy_{1,2,3}/dt = Vx_{1,2,3} - y_{1,2,3} - x_{1,2,3}z_{1,2,3} + X(y_{2,3,1} + y_{3,1,2} - 2^* y_{1,2,3}), \\ dz_{1,2,3}/dt = Uz_{1,2,3} + x_{1,2,3}y_{1,2,3} + X(z_{2,3,1} + z_{3,1,2} - 2^* z_{1,2,3}). \end{cases}$$

在与上述参数相同的条件下,计算出李雅谱诺夫指数谱如图 7所示,发现其临界耦合强度 $X_c = 0.4$.当耦合强度 $X \geq 0.4$ 时,3个节点网络就可以达到完全同步.耦合强度 $X = 0.6$ 时,函数 e_3 随时间 t 变化的数值模拟结果如图 8所示.

从图 8可以得出,对于 3个节点的多变量耦合网络,通过数值模拟的结果,发现它们在远小于第一种情形的耦合强度下,耦合误差状态响应轨迹能很快收敛到 0点.说明在同一耦合情形下多变量耦合比单变量耦合容易达到完全同步.

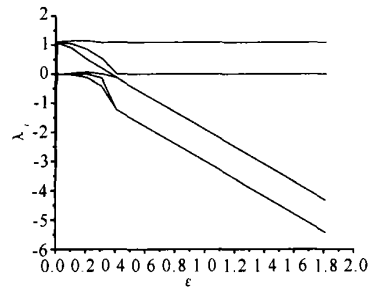


图 7 李雅谱诺夫指数谱 λ_i 与耦合强度 X 的关系

Fig. 7 Relation of Lyapunov spectrum λ_i and couples strength X

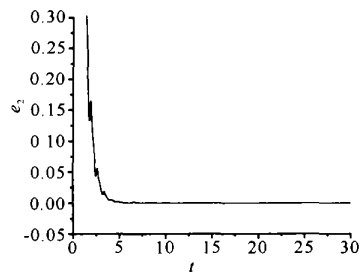


图 8 表征整体同步的状态误差响应

Fig. 8 Statusa response of charactering whole synchronization

3 结论

通过对上述具有二三个节点的耦合网络同步的分析,发现不管是 2个节点的网络还是 3个节点的网络,都存在一个共同的趋势:对于任意的节点与其它节点进行耦合时,如果它们之间采取的是单变量耦合,那么它们达到完全同步时所需要的临界耦合强度,远远大于将节点状态方程中所有变量都耦合时所

需的临界耦合强度.此结论可以推广到多个节点的耦合网络的同步中.相信具有 N 个节点的耦合网络中每一个节点与其它节点的耦合方式是通过节点间状态方程中一个变量进行耦合的,那么整个网络达到同步时所需的耦合强度是远远大于节点间通过所有变量进行耦合的网络.究其原因,可能是随着网络的不断增大,尽管网络中每一个节点都要受到与它相耦合的其它节点的束缚,但是如果网络中的节点间的耦合方式不同,那么节点间受到的束缚程度也是不同的.正如上面所讨论的,如果网络中的节点与节点之间是通过单变量进行耦合的,那么它们在空间中的自由度增大,因此可能通过较大的耦合强度来使整个网络达到同步.而对于网络节点间是通过多变量耦合,随着耦合变量的增多,使网络节点在空间中的自由度减小,此时每个节点受到与它耦合节点的约束也就越强,因此,多变量耦合系统所需的临界耦合强度就越小.

同样,也可以将上述分析应用于另外一些与之不同的耦合形式中.譬如,以 2 个节点的网络为例, X_2 是联系 2 个节点的耦合参数,通过它可以设置不同方向的耦合形式,等等.本文中只是针对单变量及多变量耦合的双向耦合 2 种情况进行研究和对比,另外还有许多形式更加复杂,意义更为深广的情形还有待于我们进一步研究.

- 1 Pecorra L M, Carroll T L. Synchronization in Chaotic Systems. *Phys Rev Lett*, 1990, 64: 821- 824.
- 2 Pecorra L M, Carroll T L. Driving System with Chaotic Signals. *Phys Rew A*, 1991, 44: 2374- 2383.
- 3 Ott E, Grebogi, Yorke J A. Control Chaos. *Phys Rew Lett*, 1990, 64: 1196- 1199.
- 4 Watts D J. Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness. Princeton: Princeton University Press, 1999.
- 5 Lago-Fernandez L F, Huerta R, Corbacho F, et al. A Fast response and temporal coherent oscillations in small-world networks. *Phys Rev Lett*, 2000, 84(12): 2758- 2761.
- 6 Wang X F, Chen G. Synchronization in small-world dynamical networks. *Int J Bifurcation and Chaos*, 2002, 12: 187- 192.
- 7 Gade P M, Hu C-K. Synchronous chaos in coupled map with small world interactions. *Phys Rev E*, 2000, 62(5): 6409- 6413.
- 8 Wang X F, Chen G. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2002, 49: 54- 62.
- 9 胡岗, 萧井华, 郑志刚编著. 混沌控制. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.

(责任编辑: 黎贞崇)

(下转第 185 页 Continue on page 185)

we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} [(p(t) + q(t)) - (r(t) + s(t))] = \lim_{t \rightarrow \infty} [p(t) - r(t)] + \lim_{t \rightarrow \infty} [q(t) - s(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [p(t) - r(t)]. \quad (18)$$

Since $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = y(t)$, therefore, $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = r(t)$.

The proof is complete.

Example Consider the scalar equation

$$x'(t) = - (4 + \cos t - \cos \pi t)x(t) + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^t (\cos \pi s + \cos \pi t) e^{-\pi s} \frac{x(s)}{1 + x^2(s)} ds + \frac{x_t e^{-t^2}}{1 + e^{t^2}}, \quad (19)$$

where $x_t = x(t + s)$, $-\infty < s \leq t$. One can verify that the conditions of Theorem 2 are satisfied. So there exists one and only one almost periodic solution of equation (19).

References

- 1 Burton T A. Unified boundedness, periodicity and stability

- in ordinary and functional differential equations. *Annali Mat Pur Appl*, 1986, CXLV: 129- 158.
- 2 Huang Qichang. On the existence of periodic solutions for functional differential equations with infinite delays. *Science of China*, 1984, 10A: 882- 889.
- 3 Zheng Zixiu. Theory of Functional Differential Equations. Hefei: Anhui Educational Press, 1994.
- 4 He Congyou. Almost Periodic Differential Equations. Beijing: High Educational Press, 1992.
- 5 Hamaya Y. Total stability property in limiting equations of integrodifferential equations. *Funkcial Ekvac*, 1990, 33: 345- 362.
- 6 Burton T A. Periodic solutions of integrodifferential equations. *J London Math Soc*, 1985, 31: 527- 548.

(责任编辑: 黎贞崇)