DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.03.008
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (3): 188~ 190

近 K凸性模与近 K光滑模*

The Moduli of Near K Convexity and Near K Smoothness

董 鸽 魏文展 程庆进
Dong Ge Wei Wenzhan Cheng Qingjin

(广西师范学院数学系 南宁市明秀东路 530001)
(Dept. of Math., Guangxi Teachers Education Univ., East Mingxiulu, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要 证明相关文献定义的近 K一致凸与紧 K一致凸等价、近 K一致光滑与紧 K一致光滑等价,提出近 K凸性模和近 K光滑模的概念,讨论近 K凸性模与近 K光滑模的关系.

关键词 近 K凸性模 近 K光滑模 近(紧)K一致凸 近(紧)K一致光滑
中图法分类号 O177.3

Abstract We proved that the compact K uniform convexity and near K uniform convexity in reference [3] are equivalant to compact K uniform smoothness and near K unifor smoothness respectively. The notions of moduli of near K convexity and near K smoothness were introduced, and the relation between near K convexity modulus and near K smoothness were also discussed.

Key words near K convexity modulus, near K smoothness modulus, near (compact) K uniform convexity, near (compact) K uniform smoothness

自从 J. Banas[1] 1991年提出近凸性模、近光滑模的概念以来,1993年 J. Banasl和 K. Fraczek[2]利用非紧性测度对近凸性模及光滑模作了进一步讨论.在此基础上本文定义近 K凸性模和近 K光滑模,使得文献[1,2]的部分结论在 K情况下也成立.在定义近 K光滑模之前,本文将证明文献[3]提出的近 K一致凸(NKUR)与紧 K一致凸(CKUR)、近 K一致光滑(NKUS)与紧 K一致光滑(CKUS)等概念分别等价,从而定义近 K光滑模及讨论近 K凸性模与近 K光滑模之间的关系.

设 X为 Banach空间,记 $B(X)$、$B(X^*)$分别为 X、X^* 的单位球,$S(X)$、$S(X^*)$分别为 X、X^* 的单位球面,其中 X^* 为 X的共轭空间.

记 $A(x_1,\cdots,x_{k+1})=$

$$\sup\left\{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \cdots & f_k(x_{k+1}) \end{vmatrix}; \begin{matrix} \\ \\ f_1,\cdots,f_k\in X^* \end{matrix}\right\},$$

其中 $x_1,\cdots,x_{k+1}\in X$.

1 近 K凸性模

首先定义 $K_X^{(k)}$: [0,1]}

$K_X^{(k)}(X)=\inf\{1-\mathrm{dist}(\theta,E);E\subset B(X),E=\mathrm{Conv}E,I_k(E)\geqslant X\}$,

称为 X的近 K凸性模,其中 $I_k(E)=\sup\{X;\exists\{x_n\}\subset E$,使得对 $\forall y_1,\cdots,y_{k+1}\in\{x_n\},A(y_1,\cdots,y_{k+1})\geqslant X\}$,$E$是 X的有界集.

注 1: $k=1$时,$I_k(E)$即为 $I(E)$[2],因此,可看作 K-Istratescu非紧性测度.

显然 $K_X^{(k)}$: $[0,1]\to[0,1]$,令 $X_k(X)=\sup\{X\geqslant 0,K_X^{(k)}(X)=0\}$.若 $X>0$,$K_X^{(k)}(X)>0$,称 X是 Δ-K一致凸空间(或非紧 K-一致凸空间),从而 X是 Δ-K一致凸空间 $\Leftrightarrow X_k(X)=0$.

定理 1 X是 NKUR空间[3] $\Leftrightarrow$ X是 Δ-K一致凸空间.

证明 只需证明 X是 NKUR空间 $\Leftrightarrow X>0$,$K_X^{(k)}(X)>0$.

"$\Rightarrow$":由定义即可得证.

"$\Leftarrow$":若 X不是 NKUR空间,则 $\exists X>0,\forall 0<W<1$,当 $E\subset B(X),E=\mathrm{Conv}E,I_k(E)\geqslant X$时,$E\cap(1-W)B(X)=\varnothing$,则 $K_X^{(k)}(X)=0$,矛盾.

注 2: $K=1$时,$I_1(E)=I(E)$,由文献[2]的(3)

2003-11-07收稿,2004-05-21修回。
* 广西教育厅资助项目。

式 ($i(E) \leqslant I(E) \leqslant 2i(E)$), N1UR空间等价于 NUC空间[1],文献 [1]中的 NUC显然与[2]中定义的 NUC等价.

仿文献 [1],下面引进与 NKUR概念相关的函数 $U_X^{(k)}$,它是 X 的另一种凸性模,定义如下:

$U_X^{(k)}(X) = \sup\{I_k(E); E \subset B(X), E = \operatorname{Conv} E, \operatorname{dist}(\theta, E) \geqslant 1 - X\}$.

显然,$U_X^{(k)}: [0,1] \to [0,1]$ 是不减函数. 令 $U_0^{(k)}(X) = \lim_{X \to 0} U_X^{(k)}(X)$, $W_1^{(k)}(X) = \lim_{X \to 1} U_X^{(k)}(X)$. 借助于文献 [1]的证明方法,易得下列结论:

定理 2 $U_0^{(k)}(X) = X_k(X)$.

推论 1 X 是 NKUR空间 $\Leftrightarrow \lim_{X \to 0} U_X^{(k)}(X) = 0$.

定理 3 $X \in (W_1^{(k)}(X), 1]$时, $U_X^{(k)}(X) = 1$; $X \in [0, W_1^{(k)}(X))$时, $U_X^{(k)}(X) < 1$.

定理 4 $K_X^{(k)}(U_X^{(k)}(X)) = X, \forall X \in (0, W_1^{(k)}(X))$.

定理 5 $U_X^{(k)}(X) = \sup\{I_k(F(f, X)); f \in S(X^*)\}$,其中 $F(f, X)$ 记作 X 中的切片 $\{x \in B(X); f(x) \geqslant 1 - X\}$,对 $f \in S(X^*)$, $X > 0$.

证明 $U_X^{(k)}(X) \geqslant \sup\{I_k(F(f, X)); f \in S(X^*)\}$ 显然.

若存在 T,使 $U_X^{(k)}(X) > T > \sup\{I_k(F(f, X)); f \in S(X^*)\}$,则 $\exists E_0 \subset B(X), E_0 = \operatorname{Conv} E_0, \operatorname{dist}(\theta, E_0) \geqslant 1 - X$,使 $I_k(E_0) \geqslant T$,从而 $\forall x \in E_0, \|x\| \geqslant 1 - X$. 若存在 $x_0 \in F(f, X) \setminus E_0$,则 $\|x_0\| \geqslant f(x_0) \geqslant 1 - X$,而 $x_0 \notin E_0$. 所以 $\|x_0\| < 1 - X$ 矛盾.

X 称为 NKSR(近 K严格凸)空间: $U_X^{(k)}(0) = 0$. 因 $U_X^{(k)}(0) = 0 \Leftrightarrow \sup\{I_k(E) E \subset B(X), E = \operatorname{Conv} E, \operatorname{dist}(\theta, E) = 1\} = 0$, 故 X 是 NKUR空间 $\Rightarrow X$ 是 NKSR空间. 显然,当 $k = 1$时, N1SR空间 $\Leftrightarrow$ NSC空间[1].

2 近 *K*光滑模

为了说明 NKUS[3]空间, 先证明下列命题.

命题 1 X 是 NKUR空间 $\Leftrightarrow X$ 是 CKUR空间[3].

证明 "$\Rightarrow$": $\forall X > 0, A \subset B(X), I_k(A) \geqslant X$,由文献 [3]中 NKUR定义,知 $\operatorname{co}(A) \cap (1 - W)B(X) \neq \varnothing$,从而存在 $x_1, \cdots, x_{k+1} \in A$,使 $T_1 x_1 + \cdots + T_{k+1} x_{k+1} \in \operatorname{co}(A) \cap (1 - W)B(X)$,其中 $0 \leqslant T_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, k+1, \sum_{i=1}^{k+1} T_i = 1$,因而有 $\|T_1 x_1 + \cdots + T_{k+1} x_{k+1}\| \leqslant 1 - W = 1 - (k+3)\frac{W}{k+3}$. 取 $W' = \frac{W}{k+3}$,由文献 [3]的引理 1, $\|x_1 + \cdots + x_{k+1}\| / (k+1) < 1 - W'$, 取 $W'' = (k+1)W'$,则由文献 [3]中 CKUR空间定义知必要性成立.

"$\Leftarrow$": 直接由定义推得.

与命题 1对偶地有:

推论 2 X是 NKUS空间$\Leftrightarrow X$是 CKUS空间[3].

推论 2的证明类似于命题 1.

命题 2 X 是 CKUR空间 $\Leftrightarrow \forall X > 0, \exists W > 0$, 使对任意 $x^* \in B(X^*)$,有 $I_k(S(B(X), x^*, W)) \leqslant X$.

证明 结合命题 1与文献 [3]的定理 4即可得证.

推论 3 X是 NKUS空间$\Leftrightarrow X$是 CKUS空间[3].

定义 1 X称为局部近 K一致凸 (LNKUR)空间: $\forall x \in S(X), X > 0, \exists 0 < W < 1$,当 $\sup\{X; \exists \{x_n\} \subset B(X), \forall y_1, \cdots, y_k \in \{x_n\}, A(x, y_1, \cdots, y_k) \geqslant X\} \geqslant X$时,有

$\operatorname{co}(x \cup \{x_n\}) \cap (1 - W)B(X) \neq \varnothing$.

定义 2 X称为局部近K一致光滑 (LNKUS)空间: $\forall x^* \in S(X^*), X > 0, \exists 0 < W < 1$, 当 $\sup\{X; \exists \{x_n^*\} \subset B(X^*), \forall y_1^*, \cdots, y_k^* \in \{x_n^*\}, B(x^*, y_1^*, \cdots, y_k^*) \geqslant X\} \geqslant X$时,有

$\operatorname{co}(x^* \cup \{x_n^*\}) \cap (1 - W)B(X^*) \neq \varnothing$,其中

$$B(x^*, y_1^*, \cdots, y_k^*) \equiv \sup\left\{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^*(x_1) & y_1^*(x_2) & \cdots & y_1^*(x_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^*(x_1) & y_k^*(x_2) & \cdots & y_k^*(x_{k+1}) \end{vmatrix}; x_i \in S(X), 1 \leqslant i \leqslant k\right\}.$$

同理,用命题 1的证明方法可证得下列 2个推论:

推论 4 X 是局部紧 K 一致凸 (LCKUR) 空间[3]$\Leftrightarrow X$是 LNKUR空间.

推论 5 X是局部紧 K一致光滑 (LCKUS) 空间[3]$\Leftrightarrow X$是 LNKUS空间.

注 3 可以证明, X 是 LNKUS 空间 $\Leftrightarrow X^*$ 是 LNKUR空间. 事实上,充分性可从推论 4及文献 [3]的定理 8的 ii) 推理即得.

必要性 $\forall x^* \in S(X^*), X > 0$,取 LNKUS定义中相应的 $W = W(x^*, X) > 0$, $\sup\{X; \exists \{x_n^*\} \subset B(X^*), \forall y_1^*, \cdots, y_k^* \in \{x_n^*\}, A(x^*, y_1^*, \cdots, y_k^*) \geqslant X\} \geqslant X$,则存在 $\exists z_1^{**}, \cdots, z_k^{**} \in S(X^{**})$,使

$$A(x^*, y_1^*, \cdots, y_k^*) < \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1^{**}(x^*) & z_1^{**}(y_1^*) & \cdots & z_1^{**}(y_k^*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_k^{**}(x^*) & z_k^{**}(y_1^*) & \cdots & z_k^{**}(y_k^*) \end{vmatrix} + \frac{X}{2},$$

由 Goldstein-Weston 稠密性定理知，$\exists\ \{z_1^n\},\cdots,\{z_k^n\}\in S(X)$，满足

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1^{**}(x^*) & z_1^{**}(y_1^*) & \cdots & z_1^{**}(y_k^*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_k^{**}(x^*) & z_k^{**}(y_1^*) & \cdots & z_k^{**}(y_k^*) \end{vmatrix} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{z}_1^n(x^*) & \hat{z}_1^n(y_1^*) & \cdots & \hat{z}_1^n(y_k^*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{z}_k^n(x^*) & \hat{z}_k^n(y_1^*) & \cdots & \hat{z}_k^n(y_k^*) \end{vmatrix} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^*(z_1^n) & y_1^*(z_1^n) & \cdots & y_k^*(z_1^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^*(z_k^n) & y_1^*(z_k^n) & \cdots & y_k^*(z_k^n) \end{vmatrix} \leqslant$$

$B(x^*,y_1^*,\cdots,y_k^*)$，

所以 $A(x^*,y_1^*,\cdots,y_k^*)\geqslant \varepsilon \Rightarrow 2B(x^*,y_1^*,\cdots,y_k^*)\geqslant \varepsilon$，故 $2B(x^*,y_1^*,\cdots,y_k^*)\geqslant A(x^*,y_1^*,\cdots,y_k^*)$. 令 $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$，则 $\sup\{\eta;\exists\ \{x_n^*\}\subset B(X^*),\forall\ y_1^*,\cdots,y_k^*\in\{x_n^*\},B(x^*,y_1^*,\cdots,y_k^*)\geqslant\eta\}\geqslant\eta$，因 X 是 LNKUS 空间，故 $\mathrm{co}(x^*\cup\{x_n^*\})\cap(1-\delta)B(X^*)\neq\varnothing$，从而 X^* 是 LNKUR 空间.

注 4 X 是 LKUR 空间[4] $\Rightarrow X$ 是 LNKUR 空间. 从定义出发可证得.

从上述命题及推论可看到，文献 [3] 提出的 NKUR 与 CKUR NKUS 与 CKUS 分别是同一概念的等价形式.

$\Gamma_X^{(k)}(\varepsilon)$：$[0,1]$ 的定义：

$\Gamma_X^{(k)}(\varepsilon)=\inf\{1-\mathrm{dist}(\theta,E);E\subset B(X^*),E=\mathrm{Conv}E,\tilde{I}_k^*(E)\geqslant\varepsilon\}$，

称 X 为的近 K 光滑模，其中 $I_k^{(*)}(E)=\sup\{\varepsilon;\exists\ \{x_n^*\}\subset E$，使得对 $\forall\ y_1^*,\cdots,y_{k+1}^*\in\{x_n^*\},B(y_1^*,\cdots,y_{k+1}^*)\geqslant\varepsilon\}$，$E$ 是 X^* 的有界子集.

显然，$\Gamma_X^{(k)}$：$[0,1]\to[0,1]$. 令 $\tilde{\varepsilon}(X)=\sup\{\varepsilon\geqslant 0,\Gamma_X^{(k)}(\varepsilon)=0\}$.

与定理 1 对偶地有

定理 6 X 是 NKUS 空间 $\Leftrightarrow\tilde{\varepsilon}(X)=0\Leftrightarrow\varepsilon>0$，$\Gamma_X^{(k)}(\varepsilon)>0$.

注 5 还可以进一步定义 Δ-K 一致光滑 (非紧 K 一致光滑)：$\varepsilon>0$，$\Gamma_X^{(k)}(\varepsilon)>0$.

与 $U_X^{(k)}$ 类似，再引进 X 的另一种近 K 光滑模 $\sum_X^{(k)}$：

$\sum_X^{(k)}(\varepsilon)=\sup\{\tilde{I}_k^*(E);E\subset B(X^*),E=\mathrm{Conv}E,\mathrm{dist}(\theta,E)\geqslant 1-\varepsilon\}$.

令 $\sum_0^{(k)}(X)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_X^{(k)}(\varepsilon)$，则有：$X$ 是 NKUS 空间 $\Leftrightarrow\sum_0^{(k)}(X)=0$.

定理 7 $\sum_X^{(k)}(\varepsilon)=\sup\{\tilde{I}_k^*(F^*(x,\varepsilon));x\in S(X)\}$，其中 $F^*(f,\varepsilon)$ 记作 X^* 中的切片 $\{f\in B(X^*);f(x)\geqslant 1-\varepsilon\}$，对 $x\in S(X)$，$\varepsilon>0$.

X 称为 NKS(近 K 光滑) 空间：$\sum_X^{(k)}(0)=0$. 显然 $\sum_X^{(k)}(0)=0\Leftrightarrow\sup\{\tilde{I}_k^*(E);E\subset B(X^*),E=\mathrm{Conv}E,\mathrm{dist}(\theta,E)=1\}=0$，从而 X 是 NKUS 空间 $\Rightarrow X$ 是 NKS 空间. 很明显，NKS 是 NKSR 的对偶概念，$k=1$ 时，N1S 空间等价于 NS 空间[1].

3 近 *K* 凸性模与近 *K* 光滑模的关系

定理 8 (Ⅰ) $\sum_X^{(k)}(\varepsilon)\leqslant U_{X^*}^{k}(\varepsilon)\leqslant 2\sum_X^{(k)}(\varepsilon)$；(Ⅱ) $\sum_{X^*}^{(k)}(\varepsilon)\geqslant U_X^{k}(\varepsilon)$.

证明 (Ⅰ) 注意到 $X\subset X^{**}$，$A(y_1^*,\cdots,y_{k+1}^*)\geqslant B(y_1^*,\cdots,y_{k+1}^*)$，左边不等式成立；仿注：3 的必要性的证明，可证得 $2B(y_1^*,\cdots,y_{k+1}^*)\geqslant A(y_1^*,\cdots,y_{k+1}^*)$. 令 $\eta=\frac{\varepsilon}{2}$，则对 $\forall\ E\subset B(X^*)$，$E=\mathrm{Conv}E$，$\mathrm{dist}(\theta,E)\geqslant 1-\varepsilon$，有 $2\sup\{\eta;\exists\ \{x_n^*\}\subset B(X^*),\forall\ y_1^*,\cdots,y_k^*\in\{x_n^*\},B(x^*,y_1^*,\cdots,y_k^*)\geqslant\eta\}\geqslant\sup\{\varepsilon;\exists\ \{x_n^*\}\subset B(X^*),\forall\ y_1^*,\cdots,y_k^*\in\{x_n^*\},A(x^*,y_1^*,\cdots,y_k^*)\geqslant\varepsilon\}$，从而 $2\sum_X^{(k)}(\varepsilon)\geqslant U_{X^*}^{k}(\varepsilon)$.

(Ⅱ) 注意到 $A(y_1,\cdots,y_{k+1})\leqslant B(y_1^{**},\cdots,y_{k+1}^{**})$ 可得. 证毕.

推论 6 X^* 是 NKUR 空间 $\Leftrightarrow X$ 是 NKUS 空间.

从而文献 [3] 定理 7 的 (Ⅱ) 是一个充要条件. 另外，若 $\varepsilon\to 0$，$\sum_{X^*}^{(k)}(\varepsilon)\to 0$，则 $U_X^{(k)}(\varepsilon)\to 0$. 此即为文献 [3] 的定理 7(Ⅰ).

推论 7 若 X 自反，则 (Ⅰ) $\sum_X^{(k)}(\varepsilon)=U_{X^*}^{k}(\varepsilon)$；(Ⅱ) $\sum_{X^*}^{(k)}(\varepsilon)=U_X^{(k)}(\varepsilon)$.

参考文献

1 Banas J. Compactness conditions in the geometric theory of Banach spaces. Nonlinear Analysis, 1991, 16(7/8): 669~682.

2 Banas J, Fraczek K. Conditions involving compactness in geometric of Banach spaces. Nonlinear Analysis, 1993, 20(10): 1217~1230.

3 赵 猛，方滨兴，王义和. K-凸性及其推广. 数学年刊，2000, 21A(3): 289~294.

4 俞鑫泰. Banach 空间几何理论. 上海：华东师范大学出版社，1986.

5 苏雅拉图，吴从炘. K-致凸空间与 K-致光滑空间. 科学通报，1997, 42(23): 2490~2494.

(责任编辑：黎贞崇)