DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.03.007
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (3): 186- 187

Lotka-Volterra脉冲捕食-食饵模型的稳定性
The Stability of Lotka-Volterra Predator-Prey Model with Impulsive Effect

惠 静
Hui Jing

(广西工学院信息与计算科学系 柳州市东环路 545006)
(Dept. of Info. & Comp. Sci., Guangxi Institute of Technology, Donghuanlu, Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要 考虑一个具常数脉冲出生的 Lotka-Volterra捕食-食饵系统，并利用频闪映射及 Jury判定证明该系统的稳定性，拓展了传统的 Lotka-Volterra捕食-食饵模型.

关键词 Lotka-Volterra捕食-食饵模型 脉冲出生 稳定性 频闪映射 Jury条件
中图法分类号 O175.1

Abstract The traditional Lotka-Volterra predator-prey system by introducing constant impulsive birth to prey is developed. Conditions for stability are established through the stroboscopic map and Jury inequalities.

Key words Lotka-Volterra predator-prey model, impulsive birth, stability, stroboscopic map, Jury inequalities

Lotka-Volterra系统常用以反映种群之间的合作、竞争、捕食关系[1,2]，但传统的 Lotka-Volterra模型常假定种群出生是连续的，而事实上绝大多数种群仅在其繁殖期繁殖后代，也就是说种群出生是脉冲的，因此，本文考虑一个更符合实际的 Lotka-Volterra捕食-食饵模型

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= - x - \frac{Uxy}{x+y}, \\ \dot{y}(t) &= \frac{Uxy}{x+y} - y, \end{aligned}\right\} & t \neq nf, \\ \left.\begin{aligned} x(nf^{+}) &= x(nf^{-}) + b, \\ y(nf^{+}) &= y(nf^{-}), \end{aligned}\right\} & t = nf, \end{cases} \tag{1}$$

其中，x，y分别表示食饵-捕食者的密度，考虑到捕食者对食饵有一个搜索过程，因而不得不分享或竞争食物，一个更切合实际且更一般的捕食-食饵模型应基于“比率依赖理论”[3~6]，体现在模型中也就是$\frac{Uxy}{x+y}$，假设食饵只在时刻 $t=nf$出生，出生量为 b，其中，U，b，f均为正常数，n是任意非负整数 0, 1, 2, …，脉冲微分方程的理论可见文献 [7, 8].

把系统(1)的前两个方程相加，得

$$\dot{x} + \dot{y} = -(x+y). \tag{2}$$

在任意一个脉冲区间$(nf, (n+1)f]$上对(2)积分，有

$$x(t) + y(t) = (x_{nf} + y_{nf}) e^{-(t-nf)}, nf < t \leqslant (n+1)f, \tag{3}$$

其中，$x_{nf} \doteq x(nf^{+})$，$y_{nf} \doteq y(nf^{+})$，分别表示食饵、捕食者在时刻 $t=nf$发生脉冲后的密度. 把(3)式代入(1)式得到在任意一个脉冲区间$(nf, (n+1)f]$上系统(1)的解

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{x_{nf}(x_{nf}+y_{nf})}{x_{nf} e^{t-nf} + y_{nf} e^{(U+1)(t-nf)}}, \\ y(t) = \dfrac{y_{nf}(x_{nf}+y_{nf}) e^{U(t-nf)}}{x_{nf} e^{t-nf} + y_{nf} e^{(U+1)(t-nf)}}. \end{cases} \tag{4}$$

利用(1)式的后两个方程，得到频闪映射

$$\begin{cases} x_{(n+1)f} = \dfrac{x_{nf}(x_{nf}+y_{nf})}{x_{nf} e^{f} + y_{nf} e^{(U+1)f}} + b, \\ y_{(n+1)f} = \dfrac{y_{nf}(x_{nf}+y_{nf}) e^{Uf}}{x_{nf} e^{f} + y_{nf} e^{(U+1)f}}, \end{cases} \tag{5}$$

方程(5)是一个差分方程，它利用食饵、捕食者在上一个脉冲后的密度来表示下一个脉冲后的密度，它是一个特殊的 Poincare映射. 方程(5)的动力学性质决定了系统(1)的动力学性质，这样，下面的研究

2003-12-01收稿.

重点放在方程(5).

先求方程(5)的平衡点,它总有一个非负平衡点 $\overline{E_0}(\bar{x}, 0) = (\frac{b}{1-e^{-f}}, 0)$,当 $U>1$时有一个正平衡点 $\overline{E^*}(\overline{x^*}, \overline{y^*}) = (\frac{be^{Uf}}{e^{Uf}-1}, \frac{b(e^f - e^{Uf})}{(1-e^f)(e^{Uf}-1)})$. 在 $\overline{E_0}$ 或 $\overline{E^*}$ 的邻域内,方程(5)的动力性由其线性化方程

$$X_{(n+1)f} = AX_{nf} \tag{6}$$

决定,其中 A是线性化方程(6)对应的矩阵,$X = (x, y)$. 当 A的特征值的模小于 1,即 A满足以下 Jury[9] 条件时,$\overline{E_0}$ 或 $\overline{E^*}$ 是稳定的:

$$1 - \mathrm{tr}A + \det A > 0, \tag{7a}$$

$$1 + \mathrm{tr}A + \det A > 0, \tag{7b}$$

$$1 - \det A > 0, \tag{7c}$$

其中 $\mathrm{tr}A$为 A的迹;$\det A$为 A的行列式.这三个不等式不成立时分别对应着 A的特征值的模大于 1的 3种情形: (7a)不成立意味着 A的其中一个特征值大于 1; (7b)不成立意味着 A的其中一个特征值小于 -1; (7c)不成立意味着 A有一对模大于 1的复共轭特征值.

对非负平衡点 $\overline{E_0}(\bar{x}, 0)$,不难知道它所对应的矩阵 A,

$$A = \begin{bmatrix} e^{-f} & (1-e^{Uf})e^{-f} \\ 0 & e^{(U-1)f} \end{bmatrix},$$

因此当 $U<1$时 A的 2个特征值 $\lambda_1 = e^{-f}$,$\lambda_2 = e^{(U-1)f}$ 的模均小于 1,即非负平衡点 $\overline{E_0}(\bar{x}, 0)$ 是稳定的,否则是不稳定的.对正平衡点 $\overline{E^*}(\overline{x^*}, \overline{y^*})$,它所对应的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{e^{Uf} - 2e^{(U+1)f} + e^{2f}}{e^{(U+1)f}(1-e^{Uf})} & \frac{(1-e^f)^2}{e^f(1-e^{Uf})} \\ \frac{(e^f - e^{Uf})^2}{e^{(U+1)f}(e^{Uf}-1)} & \frac{2e^f - e^{2f} - e^{Uf}}{e^f(1-e^{Uf})} \end{bmatrix}.$$

通过计算,得到:

$$1 - \mathrm{tr}A + \det A = \frac{(1-e^f)(e^f - e^{Uf})}{e^{(U+1)f}},$$

$$1 + \mathrm{tr}A + \det A = \frac{G - H}{e^{(U+1)f}(1-e^{Uf})},$$

$$1 - \det A = \frac{e^{Uf}-1}{e^{Uf}},$$

其中 $G \doteq e^f + e^{Uf} + e^{2f}$; $H \doteq e^{(2U+1)f} + e^{(U+2)f} + e^{2Uf}$. 从正平衡点存在的条件 $U>1$可知 Jury不等式(7)中的(7a)及(7c)均满足,这样正平衡点 $\overline{E^*}(\overline{x^*}, \overline{y^*})$ 的稳定性取决于 G是否小于 H,即 $e^f + e^{Uf} + e^{2f}$ 是否小于 $e^{(2U+1)f} + e^{(U+2)f} + e^{2Uf}$,如果小于, Jury不等式(7)中的(7b)满足,则正平衡点 $\overline{E^*}(\overline{x^*}, \overline{y^*})$ 是稳定的,否则是不稳定的.

综合以上结果,得到下列定理 1.

定理 1 如果 $U<1$,则方程(5)的非负平衡点 $\overline{E_0}(\bar{x}, 0) = (\frac{b}{1-e^{-f}}, 0)$是稳定的,当 $U>1$时它是不稳定的,此时有一个正平衡点 $\overline{E^*}(\overline{x^*}, \overline{y^*}) = (\frac{be^{Uf}}{e^{Uf}-1}, \frac{b(e^f - e^{Uf})}{(1-e^f)(e^{Uf}-1)})$,且当 $e^f + e^{Uf} + e^{2f} < e^{(2U+1)f} + e^{(U+2)f} + e^{2Uf}$时,正平衡点是稳定的,否则是不稳定的.

参考文献

1 陈兰荪.数学生态学模型与研究方法.北京:科学出版社,1988.

2 陈兰荪,陈 键.非线性生物动力系统.北京:科学出版社,1993.

3 Arditi R, Ginzburg L. Coupling in predator-prey dynamics ratio-dependence. J Theoretical Biology, 1989, 139: 311~326.

4 Arditi R, Ginzburg L, Akcakaya H. Variation in plankton densities among lakes: a case for ratio-dependent models. American Naturalist, 1991, 138: 1287~1296.

5 Arditi R, Saiah H. Empirical evidence of the role of heterogeneity in ratio-dependent consumption. Ecology, 1992, 73: 1544~1551.

6 Gutierrez A. The physiological basis of ratio-dependent predator-prey theory: a metabolic pool model of Nicholson's blowflies as an example. Ecology, 1992, 73: 1552~1563.

7 Bainov D, Simeonov P. System with Impulsive Effect: Stability, Theory and Applications. New York: John Wiley & Sons, 1989.

8 Laksmikantham V, Bainov D, Simeonov P. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989.

9 Jury E. Inners and Stability of Dynamic System. New York: Wiley, 1974.

(责任编辑:黎贞崇)