DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.03.001
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (3): 161～164, 174

关于有限群的补子群*
On Supplemented Subgroups of Finite Groups

李世荣 赵先鹤 蒙忠传
Li Shirong Zhao Xianhe Meng Zhongchuan

(广西大学数学与信息科学系 南宁市大学路 100号 530004)
(Dept. of Math.& Info. Sci., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 引入子群的弱补相关概念，讨论群的 p-幂零性，并推广一些相关的已知结果.
关键词 有限群 子群弱补 p-幂零群 群系
中图法分类号 O152.1
Abstract The concept of weak-supplemented subgroups is introduced for investigating the p-nilpotenty of finite groups. Some previously known results are generalized.
Key words finite group, weak-supplemented subgroups, p-nilpotent group, formation

1 定义

通常说群 G的一个子群 H在 G中可补，如果存在 G的一个子群 K使得 $G=HK$且 $H\cap K=1$.群 G的可补性与群 G的结构之间的关系已被许多学者广泛研究.例如，Kegel在文献[1,2]中证得群 G是可解的，如果群 G的每一个极大子群在 G中有一个循环补子群或者 G的某个幂零子群在 G中有一个幂零补子群；Hall在文献[3]中证明了 G是可解的，当且仅当 G的每个 Sylow 子群在 G中都是可补的；Arad与 Ward在文献[4]中证明了群 G是可解的当且仅当 G的每个 Sylow 2-子群与每个 Sylow 3-子群都在 G中具有补子群.最近 A. Ballester-Bolinches 和 Guo Xiuyun在文献[5]中证得了具有初等交换 Sylow子群的所有有限超可解群所在的群类恰好就是每个极小子群都可补的所有有限群所在的群类.

本文引入子群弱补这一概念，在较弱的条件下讨论群 G的 p-幂零性及超可解性，从而推广已知的相关结果.本文用符号 H_p来表示 H的 Sylow p-子群，除此之外，本文中所采用的其它记号都是标准的，所涉及的群都是有限的.

定义 1.1 设 G是有限群，$H\leqslant G$,则 H在 G中存在弱补，如果存在 $K<G$,使得 $G=HK$.

定义 1.2[6] 设 $\mathscr{F}$是一个群类.F称为 S-闭的，如果当 $G\in\mathscr{F}$时，G的任一子群 K也属于 $\mathscr{F}$.

定义 1.3[7] 设 $\mathscr{F}$是一个群类，如果满足下列条件，就叫做一个群系

(1) 如果 $G\in\mathscr{F}$，$H\trianglelefteq G$,那么 $G/H\in\mathscr{F}$.

(2) 设 $M\trianglelefteq G$,$N\trianglelefteq G$,如果 G/M和 G/N都属于 $\mathscr{F}$,那么 $G/M\cap N\in\mathscr{F}$.

定义 1.4[7] 一个群系 $\mathscr{F}$是饱和的，如果 $G/\Phi(G)\in\mathscr{F}$,那么 $G\in\mathscr{F}$.

定义 1.5 群 X与群 Y无关，如果 X的任一子群的同态像都不与 Y同构.

2 引理

引理 2.1 设 G为一个有限群，如果 $H\leqslant K\leqslant G$,且 H在 G中具有弱补，则 H在 K中具有弱补.

证明 由假设 H在 G中具有弱补，即存在 G的一个真子群 T,使得 $G=HT$.又 $K=K\cap G=K\cap HT=H(K\cap T)$,则 $K\cap T\leqslant K$.若 $K\cap T=K$，则 $K\leqslant T$,由 $G=HT$及 $H\leqslant K$可得 $G=KT=T$，与 $T<G$矛盾，这样证得 $K\cap T<K$.从而 $K\cap T$是 H在 K中的一个弱补.证毕.

引理 2.2 设 G是一个与 A_4无关的群，p为 $|G|$的素因子且使得 $(|G|,p-1)=1$.如果 G/L是 p-幂零且 p^3不整除 $|L|$,那么 G是 p-幂零的.

证明：由文献[8]的引理 4.1容易证得.

引理 2.3[9] 设 $\mathscr{F}$是 S-闭的局部群系，H为 G的一个子群，那么 $H\cap Z_{\mathscr{F}}(G)\subseteq Z_{\mathscr{F}}(H)$,其中 $Z_{\mathscr{F}}(H)$是 G的 $\mathscr{F}$-超中心.

2004-04-26收稿.
* 国家自然科学基金(10161001)和广西自然科学基金(0249001)资助项目.

引理 2.4[8]　设 G是一个有限群,p为$|G|$的一个素因子,并且使得$(|G|,p-1)=1$.如果p^3不整除$|G|$并且G与A_4无关,那么G是p-幂零群.

引理 2.5[10]　设G是一个内p-幂零群,则G为内幂零群.

引理 2.6[10]　设G是一个内幂零群,则:

(1) 对$|G|$的某个素因子p而言,G有一个正规的 Sylow p-子群P,且$G/P\cong Q$,其中Q为G的非正规循环 Sylow q-子群,且$p\neq q$;

(2) $P/\Phi(P)$是$G/\Phi(P)$的极小正规子群;

(3) 如果P非交换且$p\neq 2$,则$\exp P=p$;

(4) 如果P非交换且$p=2$,则$\exp P=4$;

(5) 如果P交换,则$\exp P=p$.

引理 2.7[11]　p为一个素数,设P为p^n阶初等交换p-群,那么$|\mathrm{Aut}(P)|=K_n\cdot p^{n(n-1)/2}$,这里$K_n=\prod_{i=1}^{n}(p^i-1)$.

引理 2.8[11]　设$K\leqslant G$,如果$|G:K|=p$,其中p为$|G|$的最小素因子,那么$K\trianglelefteq G$.

引理 2.9[11]　设p是$|G|$的最小素因子,$P\in Syl_p(G)$且P循环,则G有正规p-补.

引理 2.10[11]　设G是有限群,$P\in Syl_p(G)$.若$N_G(P)=C_G(P)$,则G为p-幂零群.

引理 2.11[11]　G是有限群,P是G的p-子群,但不是 Sylow p-子群,则$P<N_G(P)$.

引理 2.12　G是内p-幂零群,N为G的正规子群,P为G的正规 Sylow p-子群.若G/N为p-幂零,则$P\leqslant N$.

证明　由G的内p-幂零性及引理 2.6知$G=PQ_0$,Q_0为G的非正规循环 Sylow q-子群.若$P\not\leqslant N$,由G/N的p-幂零性知,G/N有正规p-补,设为QN/N,Q为G的一个 Sylow q-子群,即$G/N=PN/N\cdot QN/N$.由$P\not\leqslant N$知$QN<G$,由G的内p-幂零性及引理 2.5知QN幂零,从而$Q\ \mathrm{char}\ QN$,进一步有$Q\trianglelefteq G$,这与G的 Sylow q-子群的非正规性矛盾.所以$P\leqslant N$.

引理 2.13[12]　设G是内超可解群,则G有一个正规 Sylow p-子群P且$P/\Phi(P)$是$G/\Phi(P)$的极小正规子群.

引理 2.14[13]　设$\mathscr{F}$是一个饱和群系,G是一个有限群,$F(G)$为G的 Fitting子群,$G^{\mathscr{F}}$为G的$\mathscr{F}$-剩余,如果$G\notin\mathscr{F}$,但存在一个极大子群M使得$M\in\mathscr{F}$且$G=MF(G)$.则对$|G|$的某个素因子p而言,$G^{\mathscr{F}}$要么为初等交换p-群,要么$(G^{\mathscr{F}})'=Z(G^{\mathscr{F}})=\Phi(G^{\mathscr{F}})$是一个初等交换$p$-群.

引理 2.15[14]　设$\mathscr{F}$是一个包含超可解群系的饱和群系,如果G有一个循环正规子群N使得$G/N\in\mathscr{F}$,则$G\in\mathscr{F}$.

3　主要结果

定理 3.1　设G是一个与A_4无关的有限群,且p是$|G|$的一个素因子,使得$(|G|,p-1)=1$.如果G中存在一个正规子群N,使得G/N是p-幂零的,且N的每个p^2阶子群在G中存在弱补,那么G是p-幂零群.

证明　*反证法*　设定理结论不成立,选择G是一个极小阶反例.

由引理 2.2与题设,可假定$|N|_p>p^2$.设L为G的任一真子群,因为$L/L\cap N\cong LN/N\leqslant G/N$,由假设$G/N$是$p$-幂零的,易知$L/L\cap N$为$p$-幂零.如果$|L\cap N|_p\leqslant p^2$,那么由引理 2.2知$L$为$p$-幂零的;如果$|L\cap N|_p>p^2$,由题设知$L\cap N$的每个$p^2$阶子群在$G$中存在弱补.由引理 2.1知$L\cap N$的每个$p^2$阶子群在$L$中存在弱补.于是$L$满足定理条件.由$G$的取法知$L$是$p$-幂零的.从而$G$是一个极小非$p$-幂零群.由引理 2.5知$G$是一个内幂零群.从而由引理 2.6知$G=PQ$,其中$P\trianglelefteq G$,$Q$为$G$的非正规循环 Sylow q-子群,且$P/\Phi(P)$是$G/\Phi(P)$的一个极小正规子群.

由G/N的p-幂零性及引理 2.12知$P\leqslant N$.设$A\leqslant N$且$|A|=p^2$,由假设知存在G的真子群K,使得$G=AK$.由G的内幂零性知K幂零,设$K=K_p\times K_{p'}$.

(1)如果$K_p=1$,那么$P=A$.由引理 2.4知G为p-幂零的,与G为极小反例矛盾;

(2) 如果$K_p\neq 1$,考虑子群$N_G(K_p)$.由$K\leqslant N_G(K_p)$及引理 2.11知$K_p<N_P(K_p)$.从而$|G:N_G(K_p)|=p$或$N_G(K_p)=G$.

(a)若$|G:N_G(K_p)|=p$,则$N_G(K_p)<G$.设$P_1=P\cap N_G(K_p)$,由$G=PQ$,$Q\leqslant N_G(K_p)$,知Q正规化P_1,从而$P_1\trianglelefteq G$.如果$P_1\leqslant\Phi(P)$,则$P=P\cap AN_G(K_p)=A(P\cap N_G(K_p))=A$,与$|N|_p>p^2$矛盾.如果$P_1\not\leqslant\Phi(P)$,那么$P_1\Phi(P)/\Phi(P)\leqslant P/\Phi(P)$,由$P_1$及$\Phi(P)$的正规性知$P_1\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$.由引理 2.6知$P_1\Phi(P)/\Phi(P)=P/\Phi(P)$.从而$P=P_1$,因此$N_G(K_p)=G$.这与$|G:N_G(K_p)|=p$矛盾;

(b)若$N_G(K_p)=G$,则$K_p\trianglelefteq G$,考虑商群G/K_p,由于$G=AK$,$|A|=p^2$,所以p^3不能整除$|G/K_p|$.由引理 2.4知,G/K_p是p-幂零的.从而$P\leqslant K_p$,进而有$P=K_p$,由$A\leqslant K_p\leqslant K$知$G=AK=K$,这与$K$

$< G$矛盾.证毕.

推论 3.1 设G是一个与A_4无关的有限群,p为$|G|$的一个素因子且使得$(|G|,p-1)=1$.如果G的每个p^2阶子群在G中存在弱补,那么G是p-幂零群.

定理 3.2 设H是G的一个正规子群,并且使得G/H是p-幂零(p为$|G|$的一个素因子),如果H的任一4阶循环子群在G中存在弱补,并且H的每个p阶子群都包含在$Z_{\mathscr{F}}(G)$中($\mathscr{F}$是所有p-幂零子群的一个类),那么G是p-幂零群.

证明 *反证法* 设定理结论不真,选择G为一个极小阶反例.定理条件对子群遗传.事实上,设$K<G$,则$K/K\cap H\cong KH/H\leqslant G/H$.由$G/H$的$p$-幂零性知$K/K\cap H$是$p$-幂零的,由于$K\cap H\leqslant H$,从而由题设条件知$K\cap H$的每个4阶循环子群在$G$中存在弱补.由引理2.1知它就在$K$中存在弱补.由引理2.3知$H\cap K$的每个$p$阶子群都包含在$K\cap Z_{\mathscr{F}}(G)\leqslant Z_{\mathscr{F}}(K)$中,由$G$的选择知$K$为$p$-幂零的.从而$G$是一个极小非$p$-幂零群.由引理2.5知$G$为内幂零群.由引理2.6知$G$有一个正规Sylow p-子群P,并且$G/P\cong Q$,其中Q为G的非正规循环Sylow q-子群.$P/\Phi(P)$是$G/\Phi(P)$的一个极小正规子群.本文考虑如下情形:

(1) 若P可交换,由引理2.6知P是一个初等交换p-群.因为G/H是p-幂零的,由引理2.12知$P\leqslant H$.由假设H的每个p阶子群都含在$Z_{\mathscr{F}}(G)$中,从而$P\leqslant Z_{\mathscr{F}}(G)$.因此$G$为$p$-幂零的.与$G$的取法相矛盾.

(2) 若P非交换且$p>2$,由引理2.6知P的方指数为p且H的每个p阶子群都包含在$Z_{\mathscr{F}}(G)$中,所以$P\leqslant Z_{\mathscr{F}}(G)$.从而$G$是$p$-幂零的.与$G$的取法相矛盾.

(3) 若P非交换且$p=2$,设A为H的一个4阶循环子群,由假设A在G中存在弱补,所以存在$L<G$,使得$G=AL$.由L幂零知$L=L_p\times L_{p'}$,其中$L_p\neq 1$(如果$L_p=1$,那么$P=A$,与P非交换矛盾).考虑$N_G(L_p)$.因为$L\leqslant N_G(L_p)$,所以$|G:N_G(L_p)|=2$或1.如果$|G:N_G(L_p)|=2$,那么由引理2.8知$N_G(L_p)\trianglelefteq G$.从而$G$为2-幂零的,矛盾;如果$|G:N_G(L_p)|=1$,那么$L_p\trianglelefteq G$,由$P/\Phi(P)$是$G/\Phi(P)$的极小正规子群,从而$P=L_p$或$L_p\leqslant\Phi(P)$.若$P=L_p$则由$G=AL$知$L=G$,这是不可能的.如果$L_p\leqslant\Phi(P)$,那么$P=AL_p=A$,这与$P$非交换矛盾.证毕.

推论 3.2 设P是群G的阶的一个素因子.如果每个4阶循环子群在G中存在弱补,每个p阶子群都包含在$Z_{\mathscr{F}}(G)$中,其中$\mathscr{F}$是所有p-幂零群的群类,那么G是p-幂零群.

定理 3.3 设G是一个群且$(|G|,21)=1$,如果G的每个8阶子群在G中存在弱补,那么G是2-幂零群.

证明 *反证法* 设定理结论不真,取G为一个极小阶反例,P为G的一个Sylow 2-子群.如果2不能整除$|G|$,那么G是2-幂零的.如果P循环,由引理2.9知G也为2-幂零的.因此,可设P为非循环的.设$L<G$,下证定理条件对子群遗传.如果8不能整除$|L|$,那么由引理2.4知L为2-幂零的.如果8能整除$|L|$,那么由假设L的每个8阶子群在G中存在弱补,由引理2.1知它就在L中存在弱补.于是L满足定理条件,由G的取法知L是2-幂零的,从而G是一个极小非2-幂零群.由引理2.5知G是一个内幂零群.由引理2.6知$G=PQ$,其中$P\trianglelefteq G$,Q为G的非正规循环Sylow q-子群($p\neq q$),$P/\Phi(P)$是$G/\Phi(P)$的一个极小正规子群.

设H为G的一个8阶子群.由假设知存在$K<G$,使得$G=HK$.

本文有$H\neq P$,否则$P=H$,则$|P|=|H|=8$.如果$\Phi(P)\neq 1$,则8不能整除$|G/\Phi(P)|$.由假设知$|G/\Phi(P)|$满足引理2.4的条件,从而$G/\Phi(P)$是2-幂零的.由引理2.12知$P\leqslant\Phi(P)$,这是不可能的.所以$\Phi(P)=1$.由引理2.6知P是一个初等交换2-群.下面考虑$N_G(P)/C_G(P)$.由N-C定理知$N_G(P)/C_G(P)\lesssim \mathrm{Aut}(P)$.根据引理2.7,有$|\mathrm{Aut}(P)|=8.7.3$,由$P$可交换知$P\leqslant C_G(P)$,由题设$(|G|,21)=1$知$N_G(P)/C_G(P)=1$,即$N_G(P)=C_G(P)$.所以由引理2.10有$G$为2-幂零.与$G$的取法矛盾.

由$K<G$及G的内幂零性知K幂零.设$K=K_2\times K_{2'}$,有$K_2\ntrianglelefteq G$.否则,如果$K_2\trianglelefteq G$,那么$P=K_2$或$K_2\leqslant\Phi(P)$.若$P=K_2$,则$H\leqslant K_2$.由$G=HK$知$G=K$,这与$K<G$矛盾.如果$K_2\leqslant\Phi(P)$,那么$P=HK_2=H$与$P\neq H$矛盾,从而$K_2\ntrianglelefteq G$.下面考虑子群$N_G(K_2)$.由$K\leqslant N_G(K_2)$及引理2.11知,$K_2<N_P(K_2)$,从而$|G:N_G(K_2)|=2$或4.如果$|G:N_G(K_2)|=2$,那么由引理2.8,$N_G(K_2)$就为G的一个幂零正规子群.从而G是2-幂零的.与G的取法矛盾;如果$|G:N_G(K_2)|=4$,那么考虑$N_G((N_G(K_2))_2)$.如果$(N_G(K_2))_2\trianglelefteq G$,那么由引理2.4知$G/(N_G(K_2))_2$是2-幂零的,由引理2.12知$P\leqslant(N_G(K_2))_2$,与$|G:N_G(K_2)|=4$矛盾;由引理2.11知$(N_G(K_2))_2<N_P((N_G(K_2))_2)$,从而有$|G:N_G((N_G(K_2))_2)|=2$.由引理2.8知

$N_G((N_G(K_2))_2) \trianglelefteq G$. 由 G 的内 2-幂零性知 $N_G((N_G(K_2))_2)$ 是 2-幂零的. 设 T为它的一个正规 2-补,则 T为 G的一个正规 2-补. 这与 G的取法矛盾. 证毕.

另外, Hall[15]于 1937年证明一个与补子群有关的定理一 Hall定理: G的每个非单位子群有补子群当且仅当 G是超可解群,且其 Sylow子群皆为初等交换群. 现利用弱补将其推广如下:

定理 3.4 设有限群 G的每个极小子群在 G中有弱补当且仅当 G是超可解群,且其 Sylow子群皆为初等交换群.

证明 *必要性* 假设定理不真,选择 G为一个极小阶反例. 由引理 2.1知定理条件对子群遗传,根据 G的取法知 G为内超可解群. 由引理 2.13知 G有一个 Sylow p-子群 P, $P \trianglelefteq G$且 $P/\Phi(G)$是一个主因子. 又 $\Phi(P) \leqslant \Phi(G)$. 而由定理条件知 $\Phi(G) = 1$. 从而 $\Phi(P) = 1$,所以 P为初等交换且为 G的一个极小正规子群. 在 P中取一个 p阶子群 A,由定理条件知 A有弱补,设为 K,则 $K < G$且 $G = AK = PK$. 又 $P \cap K \trianglelefteq G$,有 P的极小正规性知 $P \cap K = 1$. 从而 $P = A$. 考虑商群 G/P,易验证 G/P满足定理假设,由 G的取法知 G/P超可解,从而 G超可解,这与 G的取法矛盾.

下证 G的 Sylow子群皆为初等交换群.

设 P为 G的任一 Sylow子群,由引理 2.1知 P满足定理假设,从而 $\Phi(P) = 1$,所以 P为初等交换群.

充分性 设 p为 $|G|$ 的最大素因子, P为 G的 Sylow p-子群, Q为 G的 p'-Hall子群, N为含于 P中的 G的极小正规子群,由 G的超可解性知 $|N| = p$. 考虑 p'-群 Q依共扼作用在 p-群 P上,则 N为 Q-不变子群,由 P可交换,运用 Maschke定理知,存在 Q-不变子群 P_1,使得 $P = P_1 \times N$. 则 $P_1 \trianglelefteq G$. 从而 $P_1 Q \leqslant G$.

现在考虑商群 G/N,易验证 G/N满足定理假设,则 G/N的任一极小子群在 G/N中存在弱补. 设 T为 G的任一极小子群,

(1) 若 $N = T$,则 $P_1 Q$就为 T在 G中的弱补;

(2) 若 $N \neq T$,如果 $TN = G$则 N就是 T在 G中的弱补; 如果 $TN < G$,则 TN/N是 G/N的极小子群,由 TN/N在 G/N中的弱补存在性知 T在 G中存在弱补. 证毕.

定理 3.5 设 $\mathcal{F}$是一个包含超可解群类的饱和群系, G为一个有限群, $G^{\mathcal{F}}$为 G的 $\mathcal{F}$-剩余,若 $G^{\mathcal{F}}$的极小子群及 4阶循环子群在 G中存在弱补,则 $G \in \mathcal{F}$.

证明 *反证法* 假设命题结论不真,选择 G为一个极小阶反例.

由引理 2.1易知 $G^{\mathcal{F}}$的每个极小子群及 4阶循环子群在 $G^{\mathcal{F}}$中存在弱补. 由定理 3.4知 $G^{\mathcal{F}}$为超可解的. 令 p为 $|G^{\mathcal{F}}|$ 的最大素因子, $P \in Syl_p(G^{\mathcal{F}})$,则 P char $G^{\mathcal{F}}$,进而有 $P \trianglelefteq G$.

这里有 $G^{\mathcal{F}} = P$. 若 $G^{\mathcal{F}}$为 p-群,则 $G^{\mathcal{F}} = P$. 否则,考虑商群 G/P. 令 H/P是 $(G/P)^{\mathcal{F}}$的极小或 4阶循环子群,由于 $(G/P)^{\mathcal{F}} = G^{\mathcal{F}}/P$,则 $H = Q \ltimes P$, $H \leqslant G^{\mathcal{F}}$,其中 Q为 $G^{\mathcal{F}}$的 p'-极小子群或 4阶循环子群. 由定理条件知 Q在 G中存在弱补,即存在 $K < G$,使得 $G = QK$. 从而 $|G| = |Q| \cdot |K| / |Q \cap K|$. 由 $|Q|$ 为 p'-数知 K包含 G的一个 Sylow p-子群,从而 $P \leqslant O_p(G) \leqslant K$. 所以 $K/P < G/P$,且 $G/P = QP/P \cdot K/P$. 若 $QP = G$,由 $QP \leqslant G^{\mathcal{F}}$及 $G^{\mathcal{F}}$的超可解性知 G超可解,从而 $G \in \mathcal{F}$,与 G的取法矛盾. 下设 $QP < G$,从而 K/P是 QP/P在 G/P中的弱补,从而 G/P满足定理假设. 由 G的取法知 $G/P \in \mathcal{F}$,由 $\mathcal{F}$的饱和性知 $G^{\mathcal{F}} \leqslant P$,即 $G^{\mathcal{F}} = P$. 与 $G^{\mathcal{F}} \neq P$矛盾.

若 $P \leqslant \Phi(G)$,由 $G/P \in \mathcal{F}$及 $\mathcal{F}$的饱和性知 $G \in \mathcal{F}$,这与 G的取法矛盾. 下设 $P \not\leq \Phi(G)$. 当然有 $P \leqslant F(G)$. 从而存在极大子群 M使得 $G = MP = MF(G)$,则 $M/M \cap P \cong G/P$. 由 $G/P \in \mathcal{F}$知 $M/M \cap P \in \mathcal{F}$. 所以有 $M^{\mathcal{F}} \leqslant M \cap P$. 易验证 M满足定理假设,由 G的取法知 $M \in \mathcal{F}$. 由引理 2.14知 P要么为初等交换 p-群,要么 $P' = Z(P) = \Phi(P)$为初等交换 p-群. 这里有 $\Phi(P) = 1$(否则取它的一个 p阶子群,由引理 2.1知它必在 P中存在弱补,与 $\Phi(P)$为 P的非生成元性相矛盾). 从而 P为初等交换 p-群. 由 $P \not\leq \Phi(G)$,选取元素 x满足 $x \in P$但 $x \notin \Phi(G)$,从而存在 G的极大子群 K,使得 $G = \langle x \rangle \cdot K = P \cdot K$. 所以 $|P| / |P \cap K| = |\langle x \rangle| = p$. 令 $P_0 = P \cap K$,则 $P_0 \trianglelefteq G$且 P_0为 P的极大子群. 又 $(G/P_0)^{\mathcal{F}} = G^{\mathcal{F}}/P_0 = P/P_0$ 为 p 阶群, 由 $(G/P_0)/(P/P_0) \cong G/P$ 知 $(G/P_0)/(P/P_0) \in \mathcal{F}$. 由引理 2.15知 $G/P_0 \in \mathcal{F}$. 由 $\mathcal{F}$的饱和性知 $P = G^{\mathcal{F}} \leqslant P_0$,这与 P_0为 P的极大子群矛盾. 证毕.

参考文献

1 Kegel O H. On Huppert's characterization of finite supersoluble groups. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 1998, 22: 287-290.

2 Kegel O H. Produkte nilpotent gruppen. Basel Arch Math, 1961, 12: 90-93.

(下转第 174页 Continue on page 174)

引理 5,如果 $P\in I_2$,则 $|P|\geqslant 14$,如果 $P\in I_1$,则 $|P|\geqslant 28$.因此,$\sum_{P\in I_1}|P|\geqslant 28|I_1|$;以及$\sum_{P\in I_2}|P|\geqslant 14|I_2|$.

由引理 4,如果 $T\in E'$,则 $|T'|\geqslant 19$.因此,如果 $P\in A$的 2个端路 T都在 E'中,则 $|P|\geqslant 41$;如果 $P\in A$只有 1个端路 T在 E'中,则 $|P|\geqslant 23$.因此对每条接受 2-路 P,有 $|P|+|\{$接受点在 P上的端点$\}|\geqslant 21|\{P\{$包含的在 E'的端路$\}|+|\{P$的出端点$\}|$.设 a是 A中的路的出端点的总数,b是 S中的路的出端点的总数.从而,$\sum_{P\in A}|P|-a+b\geqslant 21|E'|$.因此,$\sum_{P\in A\cup O_1\cup O_2}|P|\geqslant 21|E'|$.结合 3个不等式得到,

$$n\geqslant\sum_{P\in I_1}|P|+\sum_{P\in I_2}|P|+\sum_{P\in A\cup O_1\cup O_2}|P|\geqslant 28|I_1|+14|I_2|+21|E'|,$$

即有$\frac{n}{42}\geqslant\frac{2}{3}|I_1|+\frac{1}{3}|I_2|+\frac{1}{2}|E'|$.代入(*),得到 $|D|\leqslant\frac{5}{14}n$.定理 1证毕.

参考文献

1 Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: W H Freeman, 1979.

2 Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. Fundamentals of Domination in Graphs. New York: Marcel Dekker, 1998.

3 McCuaig W, Shepherd B. Domination in graphs with minimum degree two. J Graph Theory, 1989, (13): 749~762.

4 Reed B A. Paths stars and the number three. Combin Probab Comput, 1996, (5): 277~295.

5 Caro Y, Roditty. On the vertex-independence number and star decomposition of graphs. Ars Combin, 1985, (20): 167~180.

6 Caro Y, Roditty. A note On the k-domination number of a graph. Internat J Math Sci, 1990, (13): 205~206.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 164页 Continue from page 164)

3 Hall P. A characteristic property of soluble groups. J London Math Soc, 1937, 12: 188~200.

4 Arad Z, Ward M B. New criteria for the solvability of finite groups. J Algebra, 1982, 77: 234~246.

5 Ballester-Bolinches A, Guo X. On complemented subgroups of finite groups. J Algebra, 1999, 72: 161~166.

6 郭文彬.群类论.北京:科学出版社,2000. 103~104.

7 张远达.幂零与可解之间.武汉:武汉大学出版社,1988. 315~316.

8 Wang Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented. J Algebra, 2000, 224: 467~478.

9 Guo W. The Theorey of Classes of Groups. Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. 467~478.

10 Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967.

11 徐明耀.有限群导引.北京:科学出版社,1999.

12 Doerk K. Minimal nicht über auflösbare endliche Gruppen. Math Zeit, 1966, 198~205.

13 Asaad M, Ballester-Bolinches A, Pedraza Aguilera M C. A note on minimal subgroups of finite groups. Comm in Algebra, 1996, 24(8): 2771~2776.

14 Li Shirong. On minimal subgroups of finite groups Ⅲ. Communications in Algebra, 1998, 26(8): 2453~2461.

15 Hall P. Complemented group. J London Math Soc, 1937, 12: 201~204.

(责任编辑:黎贞崇)