DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.02.005
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (2): 100- 105

运输作业调度的优化模型
The Optimal Models of Transport Operations

王中兴　　连志钢
Wang Zhongxing　Lian Zhigang

(广西大学数学与信息科学学院　南宁市大学路 100号　530004)
(College of Math.& Info. Sci., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　基于最优化理论与方法改进货物运输模型,建立一种有效的运输工具调度模型和货物运输装载模型,讨论模型解的情况、性质和求解算法. 运输实例表明,该模型的运用可获利最大且运输工具的承载能力得到充分利用.

关键词　运输作业　货物运输　货物装载　模型
中图法分类号　F224.3; O224

Abstract　Based on the method and theory of optimization, the optimal model of goods transportation is improved. We obtain the effective model of dispatch tools of transportation and model of goods loading, meawhile discuss the solution of the new models, is properties and Algorithm. The examples for transportation suggest that, the application of these models can make maximum profit, and full use of coading capacity of transporting tools.

Key words　transport operations, goods transport, goods loading, model

随着计算机技术的发展,最优化理论和方法[1~7]在实际生产和管理中的应用越来越深入、适用领域越来越广泛.用最优化理论解决工业生产的组织、计划、交通运输、管理决策等问题,可获得较高的经济效益.例如,对于例 1给出的货物装载安排问题,可以通过建立货物运输模型和求解,得出使经济效益最好的装载方案.

例 1　某运输公司承运甲、乙 2种货物. 每种货物每箱的体积、重量、利润以及运输工具承载货物所受体积、重量的最大限制如表 1所示.

表 1　某运输公司的运输参数

Table 1　The parameters of a transportion company

货物 Goods	体积 Volume (m^3)	重量 Weight (50kg)	利润 Profit (100元 100 Yuan)
甲 First	9	7	40
乙 Second	7	20	90
运输工具承载最大限制 Max limit of convegance	56	70	

问　2种货物每次各运多少箱,可使公司获利最大.

解　设 x_1, x_2 分别为甲,乙 2种货物的每次运输数量,依题意建立模型为:

$$\max f(x) = 40x_1 + 90x_2,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leqslant 56, \\ 7x_1 + 20x_2 \leqslant 70, \\ x_1, x_2 \text{是非负整数}, \end{cases} \quad (1)$$

利用分枝定界法求解模型 (1),得到最优解为 $X^* = (4,2)^T$.即甲、乙两种货物各装 4箱和 2箱时,获得的利润最大.但我们将 X^* 代入模型 (1) 的约束有

$$9\times 4 + 7\times 2 = 50,\quad 56 - 50 = 6;$$
$$7\times 4 + 20\times 2 = 68,\quad 70 - 68 = 2.$$

这表明该运输工具还有 6 m^3、100 kg运货能力未被利用. 尽管该模型取得最大目标函数值,但仍未能充分利用资源. 因此,运输公司应考虑调度其他的运输工具承运. 那么,应调度哪一种运输工具承运使目标值达到最优且承载能力得到充分利用呢?本文基于最优化理论和方法,提出一种优化的运输工具调度模型和货物运输装载模型,使得运输工具的承载能力得到较好的利用.

2003-08-21收稿, 2003-09-25修回。

1 运输工具调度模型

根据实际情况,如果运输公司有多种规格的运输工具,则应考虑选择哪一规格的运输工具承运货物,使得运输工具的承载能力得到充分利用.

1.1 运输工具调度模型假设

假设 1 运输公司根据自己的利润需求,可自由选取某几种货物进行运输(货主可安排其它运输公司承运剩余的货物);

假设 2 运输公司将承运 n种货物,各种货物每箱的体积、重量、利润如表 2所示;

假设 3 该公司现有 m种运输工具 (v_i, w_i) $(i=1,2,\cdots,m)$,其中 v_i 和 w_i 分别表示第 i种运输工具运输体积和载重量的最大限制 $(i=1,2,\cdots,m)$;

假设 4 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别为货物 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 的运输数量.

表 2 某运输公司的运输参数

Table 2 The parameters of a transportion company

货物 Goods	体积 Volume (m^3)	重量 Weight (50kg)	利润 Profit (100元 100Yuan)
D_1	a_{11}	a_{21}	p_1
D_2	a_{12}	a_{22}	p_2
…	…	…	…
D_n	a_{1n}	a_{2n}	p_n

1.2 运输工具调度模型建立

根据假设,用第 i种运输工具承运这批货物的模型为:

$$\max f(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} \leqslant v_i, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} \leqslant w_i, \\ x_j \text{是非负整数}, (j=1,2,\cdots,n). \end{cases} \tag{2}$$

可先依次求解当 $i=1,2,\cdots,m$的模型(2).根据目标函数 $f(x)$ 值最大、运输工具的承载能力得到充分利用,来选用运输工具.

当运输工具的规格类型较多且问题本身是整数规划时,上述解法的计算量相当大.为了减少计算工作量,根据运输工具所具有的特征,改进上述求解方法.

1.3 运输工具调度模型的求解

定义 1 设集合

$K = \{(v_i, w_i) | v_i > 0, w_i > 0, i=1,2,\cdots,t\}$,

若 $v_i \geqslant v_j$,则有

$w_i \geqslant w_j (i,j=1,2,\cdots,t)$,

称 K为正相关二元集.

规定集合 $K = \{(v,w)\}$ 也为正相关二元集.

定义 2 设

$K = \{(v_i, w_i) | v_i > 0, w_i > 0, i=1,2,\cdots,t\}$

为正相关二元集,若有

$v_p = \max\{v_i | i=1,2,\cdots,t\}$,

则称 (v_p, w_p) 为正相关二元集 K的上界.

定义 3 设正相关二元集

$K = \{(v_i, w_i) | v_i > 0, w_i > 0, i=1,2,\cdots,t\}$是正相关二元集,

若 $K_1 = \{(v_{ik}, w_{ik}) | (v_{ik}, w_{ik}) \in K, k=1,2,\cdots,s\}$ 是正相关二元集,则称 K_1 是集合 K的一个正相关二元子集.

若 $K_1' = K \backslash K_1$,则称 K_1' 为正相关二元集 K_1 的余集.

对模型 (2) 的求解,为了获得利润最大,应选用承载能力大的运输工具.

步骤 1 令 $\bar{K} = \{(v_i, w_i) | (i=1,2,\cdots,m)\}$, $K = \{(v_i, w_i) | (i=1,2,\cdots,m)\}$ 从 K中选出 K的一正相关二元子集,记为 K_1,其余集记为 K_1'.

步骤 2 从 K_1' 中选出 K_1' 的一正相关二元子集,记为 K_2,其余集记为 K_2'.依次类推,直到在余集中不存在正相关二元子集为止.设共选出了 s个正相关二元子集,分别记为 $K_1, K_2, \cdots, K_s$,最后余集记为 K_{s+1}.

步骤 3 从 $K_1, K_2, \cdots, K_s$ 中取出各自的上界与 K_{s+1} 一起构成新的二元集 K'.若 K' 中不存在正相关二元子集,转 Step 4,否则令 $K = K'$,转 Step 1.

步骤 4 将 K' 中的元素分别代入模型(2)求解,从中选出目标值最大的运输工具,记该运输工具为 (v_h, w_h),对应的最优解记为 x^*.

步骤 5 为使运输工具的承载能力得到充分利用,记:

$$a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + \cdots + a_{1n}x_n^* = v',$$

$$a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + \cdots + a_{2n}x_n^* = w',$$

再求解下面模型

$$\min(v_i - v') + (w_i - w'),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} v_i \geqslant v', \\ w_i \geqslant w', \\ (v_i, w_i) \in \bar{K}, \end{cases} \tag{3}$$

或根据节省运输工具运输体积、重量的重要性程度,求解模型:

$$\min k_1(v_i - v') + k_2(w_i - w'),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} v_i \geqslant v', \\ w_i \geqslant w', \\ (v_i, w_i) \in \bar{K}, \end{cases} \tag{4}$$

其中，权系数 k_1、k_2 表示节省运输工具运输体积、重量的相对重要程度，k_1 与 k_2 满足 $k_1 \geqslant 0, k_2 \geqslant 0$. 且 $k_1 + k_2 = 1$. 设模型 (3) 或模型 (4) 的最优解记为 (v^*, w^*)，则安排 (v^*, w^*) 对应的运输工具承运，使得利润最大，并且运输工具的承载能力得到较好的充分利用.

2 货物运输装载模型

由于各种货物的数量和运输工具的运输成本均为已知，则应考虑如何安排运输使得运输成本最小.

2.1 货物运输装载模型假设

假设 1 所承运的货物数量一定，且运输公司必须把所有的货物运完；

假设 2 运输公司将承运 n 种货物，各种货物每箱的体积、重量、各货物的总数量如表 3 所示.

表 3 某运输公司的运输参数

Table 3 The parameters of a transportion company

货物 Goods	数量 Amoant (箱 Box)	体积 Volume (m^3)	重量 Weight (50kg)
D_1	d_1	a_{11}	a_{21}
D_2	d_2	a_{12}	a_{22}
…	…	…	…
D_n	d_n	a_{1n}	a_{2n}

假设 3 该公司现有 m 种运输工具 $(v_i, w_i)(i = 1, 2, \cdots, m)$，其中 v_i 和 w_i 分别表示第 i 种运输工具运输体积和载重量的最大限制. 设 c_i 表示调度一台第 i 种运输工具运货的费用 $(i = 1, 2, \cdots, m)$；

假设 4 y_i 表示调度第 i 种运输工具的数量 $(i = 1, 2, \cdots, m)$，x_{ij} 表示第 i 种运输工具承运第 j 种货物的数量 $(i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n)$.

2.2 货物运输装载模型

根据假设此问题的数学模型为：

$$\min f(x, y) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_{ij} \leqslant v_i, (i = 1, 2, \cdots, m), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_{ij} \leqslant w_i, (i = 1, 2, \cdots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} y_i x_{ij} \geqslant d_j, (j = 1, 2, \cdots, n), \\ x_{ij}, y_i \text{ 是非负整数}, \end{cases} \tag{5}$$

模型 (5) 是非线性整数规划. 这里先讨论下面模型解的情况

$$\min f(x, y) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x) = v_i - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_{ij} \geqslant 0, (i = 1, 2, \cdots, m), \\ h_i(x) = w_i - \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_{ij} \geqslant 0, (i = 1, 2, \cdots, m), \\ p_j(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i x_{ij} - d_j \geqslant 0, (j = 1, 2, \cdots, n), \\ u_{ij}(x) = x_{ij} \geqslant 0, (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, \\ \quad n), \\ z_i(x) = y_i \geqslant 0, (i = 1, 2, \cdots, m), \\ \text{其中 } x = (y_1, y_2, \cdots, y_m, x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, \cdots, \\ x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}, \cdots, x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn})^T, \end{cases} \tag{6}$$

基于文献 [1, 2, 5]，对于模型 (6)，本文得出定理 1.

定理 1 模型 (6) 是凸规划问题.

证明 要证明模型 (6) 是凸规划问题，只需证明模型 (6) 的目标函数是凸函数，约束函数是凹函数.

由于目标函数和约束函数梯度分别为：

$\nabla f(x) = (\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_m}_{m}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{nm})^T, (i = 1, 2, \cdots, m)$,

$\nabla g_i(x) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n(i-1)}, \underbrace{-a_{11}, -a_{12}, \cdots, -a_{1n}}_{n}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n(m-i)})^T, (i = 1, 2, \cdots, m)$,

$\nabla h_i(x) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n(i-1)}, \underbrace{-a_{21}, -a_{22}, \cdots, -a_{2n}}_{n}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n(m-i)})^T, (i = 1, 2, \cdots, m)$,

$\nabla p_j(x) = (\underbrace{x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj}}_{m}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{j-1}, y_1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-j}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{j-1}, y_2, \underbrace{0, \cdots}_{n-j}, \cdots, \cdots, y_m, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-j})^T, (j = 1, 2, \cdots, n)$,

$\nabla u_{ij}(x) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(i-1)n+j-1}, 1, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(m-i+1)n-j})^T, (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$,

$\nabla z_i(x) = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m-i}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{mn})^T, (i = 1, 2, \cdots, m)$,

可见，目标函数 $f(x)$ 是线性的，因此 $f(x)$ 可视为凸函数.

约束函数

$g_i(x), h_i(x), u_{ij}(x), z_i(x) (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$

均是线性的，因此约束函数

$g_i(x), h_i(x), u_{ij}(x), z_i(x)$

可视为凹函数.

又因为 $\nabla^2 p_j(x) =$

$$
\begin{pmatrix}
\underbrace{0\cdots0}_{m}\ \underbrace{0\cdots0}_{j-1}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{n-j}\ \underbrace{0\cdots0}_{n}\ \underbrace{0\cdots0}_{(m-2)n} \\
\underbrace{0\cdots0}_{m}\ \underbrace{0\cdots0}_{n}\ \underbrace{0\cdots0}_{j-1}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{n-j}\ \underbrace{0\cdots0}_{(m-2)n} \\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
\underbrace{0\cdots0}_{m}\ \underbrace{0\cdots0}_{(i-1)n}\ \underbrace{0\cdots0}_{(m-i)n}\ \underbrace{0\cdots0}_{j-1}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{n-j} \\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
\underbrace{0\cdots0}_{m}\ \underbrace{0\cdots0}_{n}\ \underbrace{0\cdots0}_{(m-2)n}\ \underbrace{0\cdots0}_{j-1}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{n-j} \\
\left.\begin{matrix}\underbrace{0\cdots0}_{m(n+1)} \\ \cdots\end{matrix}\right\} j-1 \\
1\ \underbrace{0\cdots0}_{m-1}\ \underbrace{0\cdots0}_{j-1}\ 0\ \underbrace{0\cdots0}_{n-j}\ \underbrace{0\cdots0}_{n}\ \underbrace{0\cdots0}_{(m-2)n} \\
\left.\begin{matrix}\underbrace{0\cdots0}_{m(n+1)} \\ \cdots\end{matrix}\right\} n-j \\
\cdots \\
\underbrace{0\cdots0}_{i-1}\ 1\ \underbrace{0\cdots0}_{m-i}\ \underbrace{0\cdots0}_{n}\ \underbrace{0\cdots0}_{n}\ \underbrace{0\cdots0}_{(m-2)n} \\
\left.\begin{matrix}\underbrace{0\cdots0}_{m(n+1)} \\ \cdots\end{matrix}\right\} n-j \\
\cdots
\end{pmatrix}_{(nm+m)\times(nm+m)}
$$

约束函数 $P_j(x)$ 的 Hessian矩阵 $\nabla^2 p_j(x)$的所有主子式等于 0,从而约束函数 $P_j(x)$是凹函数.根据目标函数和约束函数 Hessian矩阵的正定性,可知模型(6)是凸规划.证毕.

由于模型(6)是凸规划,因此根据凸规划理论,模型(6)的 $K-T$点是其全局最优点.即求解(6)只需求出其 $K-T$点.

模型(1.6)的 $K-T$条件为:

$$
\begin{cases}
\nabla f(x)-\sum_{i=1}^{m}w_i\nabla g_i(x)-\sum_{i=1}^{m}w'_i\nabla h_i(x)- \\
\sum_{j=1}^{n}k_j\nabla p_j(x)-\sum_{i=1}^{m}k_{ij}\nabla u_{ij}(x)- \\
\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\nabla u_{ij}(x)-\sum_{i=1}^{m}k'_i\nabla z_i(x)=0, \\
w_i g_i(x)+w'_i h_i(x)+k_j p_j(x)+k_{ij}p_{ij}(x)+ \\
\quad k'_i z_i(x)=0,\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \\
w_i,w'_i,k_j,k_{ij},k'_i\geqslant 0,\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),
\end{cases}
$$

即

$$
\begin{cases}
c_i+k_j\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+k'_i=0,\ (i=1,2,\cdots,m), \\
-w_i a_{1j}-w'_i a_{2j}+k_j y_i+k_{ij}=0, \\
\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n), \\
w_i,w'_i,k_j,k_{ij},k'_i\geqslant 0,\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),
\end{cases}
\tag{7}
$$

于是模型(6)的求解问题归结为求解方程组(7),满足条件

$$w_i,w'_i,k_j,k_{ij},k'_i\geqslant 0$$

的解.设 $\tilde{x}$ 为方程组(7)的解,若 $\tilde{x}$ 是非负整数(即分量 y_i,x_{ij}为非负整数),则 $x^*=\tilde{x}$是模型(5)的解.若求出方程组(7)的解 $\tilde{x}$不是非负整数,用求整数规划的方法求出模型(5)的解.

3 实例

例 2 某运输公司将承运甲,乙 2种货物,每箱的体积、重量、利润与例 1相同,该公司有 10种规格不同的运输工具:

$\{(v_i,w_i)\mid(i=1,2,\cdots,10)\}=\{(40,68),(68,48),(70,82),(70,55),(75,83),(74,50),(80,84),(76,68),(78,72),(85,40)\}$,

其中,实数对 (v,w)中的 v和 w分别表示该运输工具的承载体积和重量的最大限制.

问 选用哪种规格的运输工具,以及 2种货物每次各装载多少箱时,运输工具的承载能力得到充分利用且获利最大.

解

步骤 1 令 $\bar{K}=K=\{(40,68),(68,48),(70,82),(70,55),(75,83),(74,50),(80,84),(76,68),(78,72),(85,40)\}$.从 K中选出 K的一个正相关二元子集 $K_1=\{(40,68),(70,82),(75,83),(80,84)\}$,其余集记为 $K'_1=\{(68,48),(70,55),(74,50),(76,68),(78,72),(85,40)\}$.

步骤 2 从 K'_1中选出 K'_1的一个正相关二元子集 $K_2=\{(68,48),(70,55),(76,68),(78,72)\}$,余集记为 $K'_2=\{(85,40),(74,50)\}$.在余集 $K'_2=\{(85,40),(74,50)\}$中已不存在正相关二元集,记 $K_3=K'_2$.第一轮选择正相关二元集停止,共选了 2个正相关二元子集,分别为 K_1,K_2.

步骤 3 从 K_1,K_2中取出各自的上界和 K_3共同构成新的二元集 $K'=\{(80,84),(78,72),(85,40),(74,50)\}$.在 K'中还存在正相关二元子集,故令 $K=K'$转 *Step* 1,继续找正相关二元子集.第二轮找的正相关二元子集为 $K_1=\{(80,84),(78,72),(74,50)\}$,$K_2=\{(85,40)\}$,再从 K_1,K_2中取出各自的上界构成新的二元集 $K'=\{(80,84),(85,40)\}$.在 $K'=\{(80,84),(85,40)\}$中已不存在正相关二元子集了,转 Step 4.

步骤 4 将 $K'=\{(80,84),(85,40)\}$中的元素分别代入模型(2)有

$$\max f_1(x)=40x_1+90x_2,$$

$$\text{s.t}\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leqslant 80, \\ 7x_1 + 20x_2 \leqslant 84, \\ x_1, x_2 \text{ 是非负整数}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\max f_2(x) = 40x_1 + 90x_2,$$

$$\text{s.t}\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leqslant 85, \\ 7x_1 + 20x_2 \leqslant 40, \\ x_1, x_2 \text{ 是非负整数}, \end{cases} \tag{9}$$

求解模型(8)、(9),其解分别为 $x' = (6, 2)^T$, $x'' = (5, 0)^T$.又因为

$$f_1(x') = 420 > f_2(x'') = 200.$$

所以选出使目标值最大的运输工具(80, 84),对应的最优解为 $x^* = (6, 2)^T$.

步骤 **5** 由于在 $x^* = (6, 2)^T$ 处的约束函数值分别为:

$$9\times 6 + 7\times 2 = 68; 7\times 6 + 20\times 2 = 82.$$

为了使运输工具的承载能力得到充分利用,再求解下面模型:

$$\min (v_i - 68) + (w_i - 82),$$

$$\text{s.t}\begin{cases} v_i \geqslant 68, \\ w_i \geqslant 82, \\ (v_i, w_i) \in \bar{K}, \end{cases} \tag{10}$$

模型(10)的最优值为 2,其对应的运输工具为(70, 82).于是本文选用(70, 82)对应的运输工具承运货物,每辆运输甲,乙货物分别为 6箱和 2箱,可获利最大且运输工具的承载能力得到充分利用.

若为了体现节省运输工具运输体积和栽重量的重要性程度,可依据模型(4)求解.

例 **3** 某运输公司将承运 D_1和 D_2 2种货物,它们每箱的体积、重量、货物总数量、运输工具的运输体积和重量最大限制,以及调度这两种规格运输工具的成本如表 4所示.

表 4 某运输公司的运输参数

Table 4 The parameters of a transportion company

货物 Goods	数量 Amount (箱 Box)	体积 Volume (m^3)	重量 Weight (50kg)	运输工具 Convegance (m^3)	体积 Max volume (m^3)	最大重量 Max weight (50kg)	成本 Cost (100元/辆 100Yuan/stage)
D_1	940	2	4	A_1	115	125	35
D_2	480	5	3	A_2	110	150	40

问 应调度哪些运输工具及其数量,以及调度的每一种运输工具装载货物各多少箱时,可使运输公司成本最小.

解 设 y_1和 y_2分别表示调度运输工具 A_1和 A_2的数量,x_{ij}表示第 i种运输工具装载第 j种货物的数量$(i, j = 1, 2)$,则问题的数学模型为:

$$\min f(x, y) = 35y_1 + 40y_2,$$

$$\text{s.t}\begin{cases} 2x_{11} + 5x_{12} \leqslant 115, \\ 4x_{11} + 3x_{12} \leqslant 110, \\ 2x_{21} + 5x_{22} \leqslant 125, \\ 4x_{21} + 3x_{22} \leqslant 150, \\ y_1 x_{11} + y_2 x_{21} \geqslant 940, \\ y_1 x_{12} + y_2 x_{22} \geqslant 480, \\ x_{ij}, y_i \text{ 是非负整数}, (j = 1, 2; i = 1, 2), \end{cases} \tag{11}$$

为了求解方便,对于整数规划(11),本文先考虑非负解.于是模型(11)转化为:

$$\min f(x, y) = 35y_1 + 40y_2,$$

$$\text{s.t}\begin{cases} g_1(x) = 115 - 2x_{11} - 5x_{12} \geqslant 0, \\ g_2(x) = 110 - 4x_{11} - 3x_{12} \geqslant 0, \\ g_3(x) = 125 - 2x_{21} - 5x_{22} \geqslant 0, \\ g_4(x) = 150 - 4x_{21} - 3x_{22} \geqslant 0, \\ g_5(x) = y_1 x_{11} + y_2 x_{21} - 940 \geqslant 0, \\ g_6(x) = 480 - y_1 x_{12} - y_2 x_{22} \geqslant 0, \\ g_{ij}(x) = x_{ij} \geqslant 0, (i = 1, 2; j = 1, 2), \\ h_i(x) = y_i \geqslant 0, (i = 1, 2), \end{cases} \tag{12}$$

用 $K - T$点法求解模型(12)的解,它们的目标函数和约束函数梯度分别为:

$5\ f(x) = (35, 40, 0, 0, 0, 0)^T$, $5\ g_1(x) = (0, 0, -2, -5, 0, 0)^T$, $5\ g_2(x) = (0, 0, -4, -3, 0, 0)^T$, $5\ g_3(x) = (0, 0, 0, 0, -2, -5)^T$, $5\ g_4(x) = (0, 0, 0, 0, -4, -3)^T$, $5\ g_5(x) = (x_{11}, x_{21}, y_1, 0, y_2, 0)^T$, $5\ g_6(x) = (x_{12}, x_{22}, 0, y_1, 0, y_2)^T$, $5\ g_{11}(x) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$, $5\ g_{12}(x) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$, $5\ g_{21}(x) = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$, $5\ g_{22}(x) = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$,

$5\ h_1(x) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $5\ h_2(x) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$.

模型(12)的 $K - T$条件为:

$$\begin{cases} 35 - k_5 x_{11} - k_6 x_{12} - k_7 = 0, \\ 40 - k_5 x_{21} - k_6 x_{22} - k_8 = 0, \\ 2k_1 + 4k_2 - k_5 y_1 - k_9 = 0, \\ 5k_1 + 3k_2 - k_6 y_1 - k_{10} = 0, \\ 2k_3 + 4k_4 - k_5 y_2 - k_{11} = 0, \\ 5k_3 + 3k_4 - k_6 x_{12} - k_{12} = 0, \\ 35 - k_5 x_{11} - k_6 x_{12} - k_7 = 0, \\ k_1(115 - 2x_{11} - 5x_{12}) = 0, \\ k_2(110 - 4x_{11} - 3x_{12}) = 0, \\ k_3(125 - 2x_{21} - 5x_{22}) = 0, \\ k_4(150 - 4x_{21} - 3x_{22}) = 0, \\ k_5(y_1 x_{11} + y_2 x_{21} - 940) = 0, \\ k_6(480 - y_1 x_{12} - y_2 x_{22}) = 0, \\ k_7 x_{11}, k_8 x_{12}, k_9 x_{21}, k_{10} x_{22}, k_{11} y_1, k_{12} y_2 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

模型(12)的求解问题归结为求方程组(13)满足条件

$k_t \geqslant 0, (t = 1, 2, \cdots, 12)$,

的解.解方程组(13)有

$X = (20, 18, 20, 15, 30, 10)^T$,

$K = (k_1, k_2, \cdots, k_{12})^T = (\frac{10}{7}, \frac{30}{7}, \frac{5}{7}, \frac{15}{7}, 1, 1, 0, 0, \cdots, 0)^T$.

求解得到该运输公司调度运输工具 A_1 和 A_2 的数量分别是 20辆和 18辆;运输工具 A_1 装载货物 D_1 和 D_2 的数量分别是 20(箱 /辆)和 15(箱 /辆);运输工具 A_2 装载货物 D_1 和 D_2 的数量分别是 30(箱 /辆)和 10(箱 /辆);最小费用为 1420元.说明优化后的模型不但获利最大,而且运输工具的承载能力得到充分利用.

参考文献

1 袁亚湘,孙文瑜.最优化理论与方法.北京:科学出版社,2001.

2 陈宝林.最优化理论与算法.北京:清华大学出版社,2000.

3 Taha H A. Operations Research-An Introduction.吴立煦译.上海:上海人民出版社,1985.

4 Kaufmann A. Integer and mixed programming. In: Theory and Applications. London Academic Press INC LTD, 1977.

5 Fletcher R. Practical Methods of Optimization. In Constrained Optimization. New York: Johon Wiley and Sons, 1983.

6 Powell M J D. Nonlinear Optimization. London: Academic Press, 1982.

7 姜启源.数学模型.北京:高等教育出版社.1993.

8 傅远德.线性规划和整数规划.成都:成都科技大学出版社,1989.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 99页 Continue from page 99)

9 Powell M J D. A new algorithm for unconstrained optimation. In: Rosen J B, Mangasarian O L, Ritter K. eds. Nonlinear Programming, New York: Academic Press, 1970.

10 Wei Z, Qi L, Chen X. An SQP-typemethod and its application in stochastic programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, (116): 205 ~ 228.

11 Wei Z, Yu G, Yuan G, et al. . The Superlinear Convergence of a Modified BFGS-type Method for Unconstrained Optimization. To be appeared in Computational and Applications, 2002.

12 Li D, Fukushima M. A globally and superlinear convergent Gauss-Newton-based BFGS method for symmetric nonlinear equations. SIAAM J Number Anal, 1999, (37): 152~ 172.

13 Moré J J, Garbow B S, Hillstrome K E. Testing unconstrained optimization software. ACM Trans Math Software, 1981, (7): 17~ 41.

14 Li D, Fukushima M. On the global convergence of the BFGS method for nonconvex unconstrained optimiation problems. SIAM J Optim, 2001, (11): 1054~ 1064.

15 Li D, Fukushima M. Descent Directions of Quasi-Newton Methods for Symmetric Nonlinear Equations, 2002.

(责任编辑:蒋汉明 黎贞崇)