DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.02.003
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (2): 86~90

多种群生态竞争-捕食连续型时滞系统正周期解的存在性和全局吸引性

Existence and Global Attractivity of Positive Periodic Solution of Multispecies Ecological Competition-Predator Continuous Time Delay System

张　弘[1,2]　　严建明[1,3]　　罗桂烈[1]
Zhang Hong[1,2]　Yan Jianming[1,3]　Luo Guilie[1]

(1.广西师范大学数学与计算机科学学院　桂林市育才路3号　541004;
2.江苏大学数学系　江苏镇江　212013; 3.衡阳师范学院数学系　湖南衡阳　421008)
(1. Dept. of Math.& Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China;
2. Math. Dept., Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu, 212013, China;
3. Math. Dept., Hengyang Teachers College, Hengyang, Hunan, 421008, China)

摘要　利用 Lyapunov-Razumikhin理论,讨论一类具有周期系数和连续时滞的多种群生态竞争-捕食系统,在一定的条件下,证明该系统的周期正解的存在性和全局吸引性.

关键词　竞争-捕食系统　周期解　全局吸引性　多种群
中图法分类号　O175

Abstract　By employing the Lyapunov-Razumikhin technique, we consider the existence, uniqeness and global attractivity of positive periodic solution of multispecies ecological competition-predator system with periodic coefficients and continuous time delay.

Key words　competition-predator system, periodic solution, global attractivity, multispecies ecological

实际的生态系统中,往往存在一些相互竞争的种群以另外一些相互竞争的种群为食的现象,而种群之间的相互作用可能不是线性关系,且关系系数会随季节等因素的周期性变化而呈现周期性变化.这些生态系统周期正解的存在唯一性和全局吸引性具有十分重要的实际意义,历来受到学术界的重视[1,2].但以往文献中的系统大都局限于不带时滞或离散型时滞,本文进一步讨论的是:具有周期系数和连续时滞的多种群生态竞争-捕食系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_i(t)\Big[b_i(t) - a_i(t)x_i(t) - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\cdot \\ \quad \int_{-\tau}^{0} A_{ik}(s)x_k(t+s)\,ds - \sum_{k=n+1}^{n+m} e_{ik}(t)\cdot \\ \quad \int_{-\tau}^{0} B_{ik}(s)x_k(t+s)\,ds\Big],\ 1\leqslant i\leqslant n, \\ \dot{x}_i(t) = x_i(t)\Big[b_i(t) - a_i(t)x_i(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\cdot \\ \quad \int_{-\tau}^{0} A_{ik}(s)x_k(t+s)\,ds - \sum_{k=n+1}^{n+m} e_{ik}(t)\cdot \\ \quad \int_{-\tau}^{0} B_{ik}(s)x_k(t+s)\,ds\Big],\ n+1\leqslant i\leqslant n+m, \\ x_i(\theta) = \varphi_i(\theta)\geqslant 0,\ \theta\in[-\tau, 0], \\ \quad i = 1, 2, \cdots, n+m, \end{cases} \tag{1}$$

其中,$x_i(t)$ ($1\leqslant i\leqslant n$)为 t时刻食饵密度; $x_i(t)$ ($n+1\leqslant i\leqslant n+m$)为 t时刻捕食者密度; $a_i(t)$, $b_i(t)$ ($1\leqslant$

2004-01-05收稿.

$i\le n+m$), $a_{ik}(t)$ ($1\le i\le n+m$, $1\le k\le n$), $e_{ik}(t)$ ($1\le i\le n+m$, $n+1\le k\le n+m$) 是非负连续的 ω周期函数; $\varphi_i(0)>0$; $A_{ik}(s)$ ($1\le i\le n+m$, $1\le k\le n$), B_{ik} ($1\le i\le n+m$, $n+1\le k\le n+m$) $\in C([-\tau,0],R^+)$ ($0<\tau<\infty$) 并且使得

$$\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)\mathrm{d}s=\int_{-\tau}^{0}B_{ik}(s)\mathrm{d}s=1.$$

1 周期解的存在性

引理 1.1 $C_+^{n+m}=\{u=(u_1,u_2,\cdots,u_{n+m})\in C^{n+m}([-\tau,0],R^{n+m}): u_i(\theta)\ge 0, u_i(0)>0, \theta\in[-\tau,0], 1\le i\le n+m\}$ 关于系统(1)是不变的.

证明 引理1.1显然成立. 事实上,令 $u_i=x_i$, $i=1,2,\cdots,n+m$, 则当 $x_i(0)>0$, $1\le i\le n$时

$$x_i(t)=x_i(0)\exp\{\int_0^t[b_i(t)-a_i(t)x_i(t)-\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)x_k(t+s)\mathrm{d}s-\sum_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}B_{ik}(s)x_k(t+s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t\}>0,$$

当 $x_i(0)>0$, $n+1\le i\le n+m$时,

$$x_i(t)=x_i(0)\exp\{\int_0^t[b_i(t)-a_i(t)x_i(t)+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)x_k(t+s)\mathrm{d}s-\sum_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}B_{ik}(s)x_k(t+s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}t\}>0,$$

记 $f^M=\sup\{f(t): t\in R\}$, $f^L=\inf\{f(t): t\in R\}$, f是连续有界函数;

$a^*=\max\{a_{ik}(t): t\in R\}$, $a_*=\min\{a_{ik}(t): t\in R\}$, $e^*=\max\{e_{ik}(t): t\in R\}$, $e_*=\min\{e_{ik}(t): t\in R\}$;

当 $0<\alpha<\beta$, $C_+^{n+m}[\alpha,\beta]=\{\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n+m})\in C_+^{n+m}: \alpha\le\varphi_i(\theta)\le\beta, 1\le i\le n+m\}$.

引理 1.2 如果系统(1)满足条件

(H1) $a_i^L>na^*$, $i=n+1,\cdots,n+m$,

那么系统(1)正解是最终有界和最终一致有界的.

证明 由于 $a_i^L>na^*$ ($n+1\le i\le n+m$),那么∃ $p>1$和 $H>1$,使得

$$b_i^M-(a_i^L-npa^*)H<-1,$$

且 $b_k^M-a_k^LH<-1$, $k=1,2,\cdots,n$, $i=n+1,\cdots,n+m$.

定义

$$V(x_i(t))=\max\{x_i(t)\}\ i=1,2,\cdots,n+m,$$

如果

$$V(t+\theta)=\|x_i(t+\theta)\|\ge H, V(t+\theta)\le pV(t),$$

$\theta\in[-\tau,0]$,

那么

$$D^+V(t)\le\max\{x_k(t)[b_k(t)-a_k(t)x_k(t)], x_i(t)[b_i(t)-a_i(t)x_i(t)+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)x_k(t+s)\mathrm{d}s]\}\le\max\{x_k(t)[b_k(t)-a_k(t)x_k(t)], x_i(t)[b_i(t)-a_i(t)x_i(t)+\sum_{k=1}^{n}a^*\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)px_k(t)\mathrm{d}s]\}=$$
$$\max\{x_k(t)[b_k(t)-a_k(t)x_k(t)], x_i(t)[b_i(t)-a_i(t)x_i(t)+\sum_{k=1}^{n}a^*px_k(t)]\}\le\max\{H(b_k^M-a_k^LH), H[b_i^M-(a_i^L-npa^*)H]\}<-H<-1\ (1\le k\le n, n+1\le i\le n+m),$$

由 Lyapunov-Razumikhin-type定理[3,4]知系统(1)的正解是最终一致有界的.

对于 $\tilde H>H$, 设 $Z(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_{n+m}(t))$为系统(1)通过$(\sigma,\varphi)$的解,其中 $\varphi\in C_+^{n+m}$ 和 $\sigma\in R$, $0\le\varphi(\theta)\le\tilde H$, $\theta\in[-\tau,0]$. 我们断言: 当 $t\ge\sigma$时,有

$$\|Z(t)\|\le\tilde H, \tag{2}$$

否则,∃ $\tilde t\ge\sigma$,使得当 $\sigma-\tau\le t<\tilde t$时,有

$$\|Z(t)\|\le\tilde H, \tag{3}$$

$$\|Z(\tilde t)\|\le\tilde H, \tag{4}$$

$$D^+V(Z(\tilde t))\ge 0, \tag{5}$$

由(H1)、(3)、(4)和系统(1)可得到

$$D^+V(Z(\tilde t))<\tilde H\max_t\{[b_k(\tilde t)-a_k(\tilde t)\tilde H],[b_i(\tilde t)-(a_i(\tilde t)-na^*)\tilde H]\}<0, 1\le k\le n, n+1\le i\le n+m,$$

这显然与(5)矛盾,因此(2)是成立的.即系统(1)的正解是最终有界.

引理 1.3 假设系统(1)满足条件(H1),那么以下命题成立.

(i) 对于给定的 $0<\alpha<\beta$,存在常数 $0<d<D$,使得当所有的 $\sigma\in R$, $\varphi\in C_+^{n+m}[\alpha,\beta]$和 $t\ge\sigma$时,有

$d\le x_i(\sigma,\varphi)\le D$, $i=1,2,\cdots,n+m$.

(ii) 存在常数 $0<m<M$,使得对于给定的 $0<\alpha<\beta$,存在常数 $T=T(\alpha,\beta)>0$,当所有的 $\sigma\in R$, $\varphi\in C_+^{n+m}[\alpha,\beta]$和 $t\ge\sigma+T$时,有

$m\le x_i(\sigma,\varphi)\le M$, $i=1,2,\cdots,n+m$.

证明 首先证明命题(i),对于给定的 $0<\alpha,\beta$,由引理1.2知存在常数 $D>0$,使得当所有的 $\sigma\in R$, $\varphi\in C_+^{n+m}[\alpha,\beta]$和 $t\ge\sigma$时,有

$$x_i(\sigma,\varphi)\le D, i=1,2,\cdots,n+m. \tag{6}$$

下面往证: 存在常数 $d>0$,使得当所有的 $\sigma\in R$, $\varphi\in C_+^{n+m}[\alpha,\beta]$和 $t\ge\sigma$时,有

$$x_i(\sigma,\varphi)\ge d, i=1,2,\cdots,n+m, \tag{7}$$

为此作变换

$$x_i(t)=\frac{1}{y_i(t)},i=1,2,\cdots,n+m, \tag{8}$$

系统(1)变为系统

$$\begin{cases}\dot{y}_i(t)=y_i(t)\Big[-b_i(t)+a_i(t)\dfrac{1}{y_i(t)}+\\ \quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)\frac{1}{y_k(t+s)}\mathrm{d}s+\\ \quad\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}B_{ik}(s)\frac{1}{y_k(t+s)}\mathrm{d}s\Big],\\ \quad 1\leqslant i\leqslant n,\\ \dot{y}_i(t)=y_i(t)\Big[-b_i(t)+a_i(t)\dfrac{1}{y_i(t)}-\\ \quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)\frac{1}{y_k(t+s)}\mathrm{d}s+\\ \quad\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}B_{ik}(s)\frac{1}{y_k(t+s)}\mathrm{d}s\Big],\\ \quad n+1\leqslant i\leqslant n+m.\end{cases} \tag{9}$$

定义

$V(t)=V(y(t))=\max\{y_i(t)\},i=1,2,\cdots,n+m$,

由于(6)式,当所有的 $\sigma\in R,\tilde{\varphi}\in C_+^{n+m}[\tilde{\alpha},\tilde{\beta}]$ 和所有的 $t\geqslant\sigma$ 时,有

$$\frac{1}{y_i(\sigma,\tilde{\varphi})(t)}\leqslant D,$$

其中,$\tilde{\varphi}(\theta)=\dfrac{1}{\varphi_i(\theta)},\theta\in[-\tau,0];\tilde{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha},\tilde{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$, $i=1,2,\cdots,n+m$,

记 $\lambda=a_i^M+na^*+me^*,i=1,2,\cdots,n+m$,

由(9)式得

$$D^+V(t)\leqslant a_i(t)\Big[-b_i^L+a_i(t)\frac{1}{y_i(t)}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)\frac{1}{y_k(t+s)}\mathrm{d}s+\sum_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-\tau}^{0}B_{ik}(s)\frac{1}{y_k(t+s)}\mathrm{d}s\Big], \tag{10}$$

$$D^+V(t)\leqslant y_i(t)[a_i^M+na^*+me^*]D=V(t)\lambda D, \tag{11}$$

也易知存在正常数 δ 和足够大的 H^*,使得当所有的 $t\geqslant\sigma$ 和 $y_i(t+\theta)\in[H^*,\infty),\theta\in[-\tau,0](i=1,2,\cdots,n+m)$ 有

$$-b_i^L+\Big[a_i(t)+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)+\sum_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\Big]\frac{1}{H^*}<-\delta<0,i=1,2,\cdots,n+m. \tag{12}$$

现在需要证明的是,能够找到正常数 $K(\frac{1}{K}<D)$,使得当 $t\geqslant\sigma(\sigma\in R),\tilde{\varphi}\in C_+^{n+m}[\tilde{\alpha},\tilde{\beta}]$ 时,有

$V(t)\leqslant K$.

选取 $K=He^{2\lambda D\tau}$,根据(10)和(12)式,对于 $\forall t_0>\sigma$,当 $t_1>t_0$ 时,有

$V(t_1)\leqslant H$,

否则,$V(t)$ 会趋于无穷,这与(12)式矛盾. 如果对于足够大的 $t,V(t)>K$,那么存在 t_1 和 $t_2(t_2>t_1>\sigma)$,有

$$V(t_1)=H,V(t_2)\geqslant K,D^+V(t_2)\geqslant 0,\text{当 } t\in[t_1,t_2],V(t)\in[H,K]. \tag{13}$$

由于(11)式成立,当 $t\geqslant t_1$ 时,有

$V(t)\leqslant V(t_1)e^{\lambda D(t-t_1)}$,

这蕴含了 $t_2-t_1>2\tau$. 因此由(12)式得

$$-b_i^L+a_i(t_2)\frac{1}{y_i(t_2)}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t_2)\int_{-\tau}^{0}A_{ik}(s)\frac{1}{y_k(t_2+s)}\mathrm{d}s+\sum_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t_2)\int_{-\tau}^{0}B_{ik}(s)\frac{1}{y_k(t_2+s)}\mathrm{d}s<-\delta<0,$$

从而 $D^+V(t_2)<0$.

这与(13)式相矛盾. 因此当所有的 $t\geqslant\sigma$,所有的 $\sigma\in R$ 和 $\tilde{\varphi}\in C_+^{n+m}[\tilde{\alpha},\tilde{\beta}]$ 时,有

$V(t)\leqslant K$,

即当所有的 $t\geqslant\sigma$,有

$y_i(\sigma,\tilde{\varphi})(t)\leqslant K,i=1,2,\cdots,n+m$,

令 $d=\dfrac{1}{K}$,那么(7)式成立,综上所述,由(6)和(7)式,命题(i)成立.

下面证明命题(ii). 由引理1.2知系统(1)的正解是最终一致有界,即存在常数 $M>0$,使得对于给定的 $0<\beta<\alpha,\exists T_1(\beta,\alpha)>0$,当所有的 $\sigma\in R,\varphi\in C_+^{n+m}[\beta,\alpha]$ 和 $t\geqslant\sigma+T_1$ 时,有

$$x_i(\sigma,\varphi)\leqslant M,i=1,2,\cdots,n+m, \tag{14}$$

作同样的变换

$$x_i(t)=\frac{1}{y_i(t)},i=1,2,\cdots,n+m,$$

按照命题(i)的证明过程类似可以找到常数 K^* 使得当所有的 $t\geqslant\sigma+T_2(T_2=T_2(\tilde{\beta},\tilde{\alpha}))$ 时,有

$y_i(\sigma,\tilde{\varphi})(t)\leqslant K^*,i=1,2,\cdots,n+m$,

令 $m=\dfrac{1}{K^*};\tilde{\varphi}(\theta)=\dfrac{1}{\varphi_i(\theta)};\tilde{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha},\tilde{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$,

显然当 $t\geqslant\sigma+T_2$ 时,有

$$x_i(\sigma,\varphi)\geqslant m,i=1,2,\cdots,n+m. \tag{15}$$

取 $T=\max\{T_1,T_2\}$,由(14)和(15)式就知命题(ii)成立.

定义 $\tilde{x}_i(t)=\ln x_i(t),i=1,2,\cdots,n+m$, (16)

系统(1)变为如下系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_i(t)=b_i(t)-a_i(t)e^{\tilde{x}_i(t)}-\\ \quad\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-f}^{0}A_{ik}(s)e^{\tilde{x}_k(t+s)}ds-\\ \quad\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-f}^{0}B_{ik}(s)e^{\tilde{x}_k(t+s)}ds,\ 1\leqslant i\leqslant n,\\ \dot{\tilde{x}}_i(t)=b_i(t)-a_i(t)e^{\tilde{x}_i(t)}+\\ \quad\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-f}^{0}A_{ik}(s)e^{\tilde{x}_k(t+s)}ds-\\ \quad\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-f}^{0}B_{ik}(s)e^{\tilde{x}_k(t+s)}ds,\\ \quad n+1\leqslant i\leqslant n+m,\end{cases}\tag{17}$$

显然如果系统(17)有 k周期解,那么系统(1)也有 k周期解.

引理 1.4 条件(H1)成立,系统(17)的解是最终有界和最终一致有界.

证明 由引理 1.3的命题(i)和(ii),往证:系统(17)的解是最终有界和最终一致有界的,

(Ⅰ) 令

$Y=\min\{|\ln W|,|\ln Z|\}$; $A=\max\{|\ln d|,|\ln D|\}$,

由引理 1.3的命题(i)和(16)式得当 $Y>0$,有 $A>0$ 使得对于所有的 $e\in R$, $h(\theta)=\ln h(\theta)\in C$,并且 $\|h(\theta)\|\leqslant Y$, $(i=1,2,\cdots,n+m)$,有

$\|\tilde{x}_i(e,h)(t)\|\leqslant A$,

因此系统(17)的解是最终有界.

(Ⅱ) 令

$Y=\min\{|\ln W|,|\ln Z|\}$; $B=\max\{|\ln m|,|\ln M|\}$,

由引理 1.3的命题(ii)和(16)式也能证得系统(17)的解是最终一致有界.

定理 1.1 假设系统(1)满足条件(H1),那么该系统就有正的 k周期解.

证明 由引理 1.4,知道系统(17)的解是最终有界和最终一致有界的,引用 Burton′s theorem[5] 得系统(17)有 k周期解,因此系统(1)就有正的 k周期解.定理得证.

2 周期解的全局吸引性

设 $Z^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t),\cdots,x_{n+m}^*(t))$ 是系统(1)的一个正的 k周期解, $Z(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_{n+m}(t))$ 是系统(1)的任意解,且 $x_i(0)>0$, $i=1,2,\cdots,n+m$.

记 $a^L=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n+m}\{a_i^L\}$,

定理 2.1 假设系统(1)满足

(H2) $a^L>ma^*$,

则系统(1)有唯一的周期解并且该解是全局吸引的.

证明

令 $v_i(t)=\ln\left(\dfrac{x_i(t)}{x_i^*(t)}\right)$, $i=1,2,\cdots,n+m$,

系统(1)变为系统

$$\begin{cases}\dot{v}_i(t)=-a_i(t)x_i^*(t)(e^{v_i(t)}-1)-\\ \quad\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-f}^{0}A_{ik}(s)x_k^*(t+s)(e^{v_k(t+s)}-1)ds-\\ \quad\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-f}^{0}B_{ik}(s)x_k^*(t+s)(e^{v_k(t+s)}-1)ds,\\ \quad 1\leqslant i\leqslant n,\\ \dot{v}_i(t)=-a_i(t)x_i^*(t)(e^{v_i(t)}-1)+\\ \quad\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\int_{-f}^{0}A_{ik}(s)x_k^*(t+s)(e^{v_k(t+s)}-1)ds-\\ \quad\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}e_{ik}(t)\int_{-f}^{0}B_{ik}(s)x_k^*(t+s)(e^{v_k(t+s)}-1)ds,\\ \quad n+1\leqslant i\leqslant n+m,\end{cases}$$

构作 Lyapunov 函数

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n}\{|v_i(t)|+\sum_{k=1}^{n}a^*\int_{-f}^{0}A_{ik}(s)\int_{0}^{t+s}(x_k^*(\theta)|e^{v_k(\theta)}-1|)d\theta ds+\sum_{k=n+1}^{n+m}e^*\int_{-f}^{0}B_{ik}(s)\int_{0}^{t+s}(x_k^*(\theta)|e^{v_k(\theta)}-1|)d\theta ds\}+\sum_{i=n+1}^{n+m}\{|v_i(t)|+\sum_{k=1}^{n}a^*\int_{-f}^{0}A_{ik}(s)\cdot\int_{t+s}^{t}(x_k^*(\theta)|e^{v_k(\theta)}-1|)d\theta ds+\sum_{k=n+1}^{n+m}e^*\int_{-f}^{0}B_{ik}(s)\cdot\int_{0}^{t+s}(x_k^*(\theta)|e^{v_k(\theta)}-1|)d\theta ds\},$$

$$D^+V(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\{-a_i^Lx_i^*(t)|e^{v_k(t)}-1|\}+\sum_{k=n+1}^{n+m}\{-a_i^Lx_i^*(t)|e^{v_k(t)}-1|+\sum_{k=1}^{n}a^*x_k^*(t)|e^{v_k(t)}-1|\}=\sum_{i=1}^{n}\{(-a_i^L+ma^*)x_i^*(t)e^{v_k(t)}-1\}+\sum_{i=n+1}^{n+m}\{-a_i^Lx_i^*(t)|e^{v_k(t)}-1|\},$$

由(H2),当 $t\geqslant e+T$ 时,有

$$D^+V(t)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\{(-a_i^L+ma^*)m|e^{v_i(t)}-1|\}+\sum_{i=n+1}^{n+m}\{-a_i^Lm|e^{v_i(t)}-1|\}\leqslant(-a^L+ma^*)m\sum_{i=1}^{n}|e^{v_i(t)}-1|-a^Lm\sum_{i=n+1}^{n+m}|e^{v_i(t)}-1|,$$

于是 $\exists U>0$,使得

$$D^+V(t)\leqslant -Um\sum_{i=1}^{n+m}|e^{v_i(t)}-1|.$$

因此,根据文献 [6],我们知道系统 (1) 的 k周期解 $Z^*(t)$ 是全局吸引的 .

下证 k周期解是唯一的 . 设

$$Z(t)=(\bar{x}_1(t),\cdots,\bar{x}_n(t),\bar{x}_{n+1}(t),\cdots,\bar{x}_{n+m}(t))$$

是系统 (1) 的另一周期解,由上述证明过程可知:

$$|\bar{x}_1(t)-x_1^*(t)|+\cdots+|\bar{x}_n(t)-x_n^*(t)|+\cdots|\bar{x}_{n+1}(t)-x_{n+1}^*(t)|+\cdots+|\bar{x}_{n+m}(t)-x_{n+m}^*(t)|\to 0.\ (t\to+\infty),$$

从而 $\bar{x}_1(t)=x_1^*(t),\cdots,\bar{x}_n(t)=x_n^*(t),\bar{x}_{n+1}(t)=x_{n+1}^*(t),\cdots,\bar{x}_{n+m}(t)=x_{n+m}^*(t)$. 定理得证 .

参考文献

1 李传荣,卢松坚. N种群周期系数非线性关系捕食-竞争系统的定性分析.高校应用数学学报, 1997, 12A(2): 147~156.

2 文贤章.多种群生态系捕食-竞争时滞系统正周期解的全局吸引性.数学学报, 2002, 45(1): 83~92.

3 Hale J K. Theory of Functional and Differential Equations, New York: Springer-verlag Heidelberg: 1977.

4 Kuang Yang. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, New York: Academic Press Inc, 1993.

5 Burton T A. Lyapunov functionals and periodic solutions. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 53, In Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, Hungary. 1997.

6 Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic, Dordrecht/Norwell, MA, 1992.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 85页 Continue from page 85)

证明 当 $n-2$为非平方数时,设 $n-2=D$,由 (2) 式得,

$$(2Dx-D+2)^2-D(2y+1)2=D^2-5D+4,\tag{5}$$

设 Pell方程

$$u^2-Dv^2=1\tag{6}$$

的基本解为 $u_1+v_1\sqrt{D}$,则对于任意 k,满足 $u+v\sqrt{D}=(u_1+v_1\sqrt{D})^{2k}$的 (u,v) 也是 (6) 的解,且适合[5,6]

$$u\equiv 1(\bmod 2D),2\nmid v.\tag{7}$$

又设 x_1,x_2 满足

$$x_1+x_2\sqrt{D}=(D+2+3\sqrt{D})(u+v\sqrt{D}),\tag{8}$$

则有

$$x_1=(D+2)u+3Dv,x_2=3u+(D+2)v,\tag{9}$$

于是令 $2Dx-D+2=(D+2)u+3Dv$, $2y+1=3u+(D+2)v$,则

$$x=\frac{D(u+1)+2(u-1)}{2D}+\frac{3v}{2},y=\frac{(D+2)v}{2}+\frac{3u-1}{2},\tag{10}$$

由 (7)、(10)式可直接验证,(10)式是方程 (5)即方程 (1) 的无穷多组正整数解. 证毕 .

定理 2完全解决了当 $n-2$为非平方数时该方程的解的情况,而文献 [4, 6, 7]中的 (18) 式中的 x 不能保证为正整数,因此其证明也是错误的 .

参考文献

1 Subramaniam K B. A generalization of triangular numbers. J Math Ed Sci Tech, 1992, 23: 790~793.

2 曹珍富.丢番图方程引论.哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986. 155~160.

3 Di Porto A, Filipponi P. Some special triangular numbers and recurring sequences. Notes Number Theory Discrete Math, 1995, (1): 11~26.

4 郑英伟.关于方程 $S_x(n)=S_y(3)$. 江西科学, 1999, 17(3): 173~175.

5 余启港.关于方程 $S_x(n)=S_y(3)$ 的商榷.江西科学, 2001, 19(1): 31~33.

6 乐茂华.关于方程 $S_x(n)=S_y(3)$. 常德师范学院学报 (自然科学版), 2002, 4: 1~2.

7 乐茂华.关于方程 $S_x(n)=S_y(3)$. 洛阳师范学院学报, 2003, 2: 9~10.

(责任编辑: 黎贞崇)