

## 一维耦合映象格子中参数噪声的影响\*

## The Influence of Parameter Noise on One-Dimensional Coupled Map Lattices

施文军 陈光旨 薛郁

Shi Wenjun Chen Guangzhi Xue Yu

(广西大学物理科学与工程技术学院 南宁市大学路 100号 530004)

(College of Physics Science &amp; Engineering Technology, Guangxi University,

100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要** 研究一维对称耦合映象格子受局部反应参数噪声的影响,并对系统最大 Lyapunov 指数与加入噪声的系统最大 Lyapunov 指数进行数值比较,发现在不同参数下,噪声既可诱导有序,也可诱导混沌。

**关键词** 参数噪声 最大 Lyapunov 指数 随机同步

中图分类号 O414.22

**Abstract** The effects of partial reaction parameter noise on one-dimensional coupled map lattices have been studied in this paper. The numerical comparison of the maximum Lyapunov exponent of systems against the maximum Lyapunov exponent of noise systems has been carried out. It has been found that noise can induce order or induce chaos by different parameters.

**Key words** parameter noise, maximum Lyapunov exponent, stochastic synchronization

长期以来人们对噪声的影响持一种消极的看法,认为噪声是有害的.在工程控制中经常要考虑消除噪声的破坏性作用.近 10 年来对混沌系统中噪声影响的研究发现噪声有建设性作用<sup>[1,2]</sup>.在噪声的驱动下,2 个混沌系统竟然可以实现同步<sup>[3]</sup>.目前工作多集中在低维混沌系统中.高维时空混沌系统中噪声的影响在文献 [4, 5] 中作了重要研究,且均以耦合映象格子作为研究模型.本文仍以时空混沌的简单模型一维对称耦合映象格子为研究对象,考虑局部反应参数中存在加性噪声,发现系统动力学性态有一定自发抵抗噪声的能力,但在某些参数区域噪声有很大的影响.

## 1 随机耦合映象格子模型与最大 Lyapunov 指数计算

### 1.1 随机耦合映象格子模型

耦合映象格子是由日本科学家金子邦彦等<sup>[6]</sup>提出的,用来作为时空混沌系统简化模型.对于一维对称耦合映象格子,其数学表达式为:

$$x_{n+1}(i) = (1 - X)f(x_n(i)) + (X/2)[f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))]. \quad (1)$$

式中  $i$  为格点坐标 ( $i = 1, 2, 3, \dots, L$ );  $L$  为系统的尺寸;  $f(x)$  是非线性映象,一般取著名的 logistic 映象,代表局部反应动力学,  $f(x) = 1 - ax^2$ ;  $a$  是局部反应参数,范围是  $a \in [0, 2]$ ,它反映局部动力学的性态;  $X$  是格子耦合参数,反映格子之间耦合强度的大小;  $n$  表示离散化后的时间,周期性的边界条件  $x_n(0) = x_n(L)$  实现<sup>[7]</sup>.

在系统演化中,每一格点的局部反应参数  $a$  由于受到噪声干扰,会不尽相同.如果这种噪声持续不断,由于格点间耦合作用,这种噪声影响是否会放大,以至彻底改变系统的性质,这是本文重点考虑的问题.

为了简化,本文只研究随机三格点耦合映象格子系统,每一步演化具有随机性质.这里研究的噪声波动形式为  $(a, b)$ ,即在数值  $a$  到  $b$  上随机取值,且是均匀分布的.具体数学模型如下:

$$x_{n+1}(i) = (1 - X)f'(x_n(i)) + (X/2)[f'(x_n(i-1)) + f'(x_n(i+1))]. \quad (2)$$

式中,

$$f'(x(i)) = 1 - (a + a(i))x(i)^2, \quad (3)$$

$i = 1, 2, 3$ .  $a(i)$  是相应格子上加入的噪声,本文只研究  $i = 1$  存在噪声的情况.

## 1.2 随机耦合映象格子的最大 Lyapunov 指数的计算方法

对于耦合映象格子系统，最感兴趣的是最大 Lyapunov 指数，它的正负值直接反映系统是否处于混沌态<sup>[8]</sup>。Lyapunov 指数是一个整体平均刻画量，描写系统的整体稳定性质。具体数值计算 Lyapunov 指数的方法一般为切空间线性化<sup>[9]</sup>和直接计算轨道差<sup>[8]</sup>。由于 Lyapunov 指数的平均性，可以引进噪声系统 Lyapunov 指数的概念，只是应该沿着一条真实噪声轨道求扰动的平均<sup>[10]</sup>，每步计算都是随机演化的。

本文统一使用 500 万步计算噪声指数，联系混沌同步中的条件 Lyapunov 指数概念<sup>[11]</sup>，可以看出，通过以上方法计算出的指数就是系统在噪声驱动下的条件 Lyapunov 指数。这意味着噪声系统的最大 Lyapunov 指数为负的情况下，有可能利用噪声将 2 个初始值不同而参数相同的混沌系统驱动同步。文中使用直接计算轨道差的方法，每一步演化均为随机迭代。不特别说明，指数均表示最大 Lyapunov 指数。原系统指数与噪声系统指数均用  $\lambda$  表示。

## 2 随机耦合映象格子系统最大 Lyapunov 指数的数值模拟

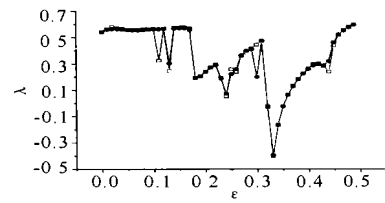
### 2.1 给定 $\alpha$ 及具体噪声形式下指数随 $\epsilon$ 的变化

选取噪声参数  $T=1.80$ ,  $a, b$  分别为  $(-0.005, 0.005)$ ,  $(-0.30, 0.01)$  所对应的噪声。B、C、D 分别代表原系统指数、噪声指数、及指数差 (噪声指数减去原系统指数) 随  $X$  的变化。

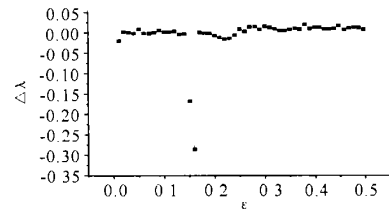
从图 1 图 2 可以发现比较小的波动噪声的指数变化很小。对于大幅度波动的噪声，在  $X=0.13$  到  $X=0.16$  指数变化很大，正负变动都存在。说明这是一个对噪声非常敏感的区域。

### 2.2 给定噪声及 $\epsilon$ 随 $a$ 的指数变化

给定  $X=0.16$ ，取随机波动分别为  $(-0.005, 0.005)$   $(-0.30, 0.01)$  的噪声，观察随  $T$  的增大噪声指数的变化。图 3 对应  $X=0.16$ ，B、C 分别代表原指数和噪声指数。图 3 中可以看到，小的波动噪声对系统的影响也很小，当噪声波动很大，尤其是大的负值偏向波动的噪声对系统的影响很大。在敏感区间，噪声指数变化是类似的。同时作了其它所对应的指数变化的研究，发现影响较小，没有上述趋势。主要是指数值减少，但减少有限，存在指数值由负变正。例如给定  $X=0.34$ ，见图 4，随机波动为  $(-0.70, 0.01)$ 。



(a)

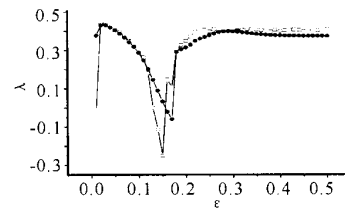


(b)

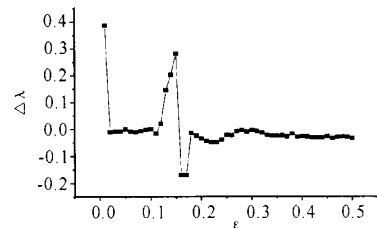
图 1 (a) 原系统指数与噪声系统指数  $\lambda$  随着  $X$  的变化  $T=1.80$  噪声参数为  $a=-0.005, b=0.005$ ; (b) 指数差值  $\Delta\lambda$  随着  $X$  的变化  $T=1.80$  噪声参数为  $a=-0.005, b=0.005$

Fig. 1 (a) The change of Lyapunov exponent  $\lambda$  of the system and noise system with the increasing of  $X$  when  $T=1.80$ , noise parameter  $a=-0.005, b=0.005$ ; (b) The change of difference of exponents  $\Delta\lambda$  with the increasing of  $X$  when  $T=1.80$ , noise parameter  $a=-0.005, b=0.005$

□: B; ●: C; ■: D.



(a)



(b)

图 2 (a) 原系统指数与噪声指数  $\lambda$  随着  $X$  的变化  $T=1.80$ ，噪声参数为  $a=-0.30, b=0.01$ ; (b) 指数差值  $\Delta\lambda$  随着  $X$  的变化  $T=1.80$  噪声参数为  $a=-0.30, b=0.01$

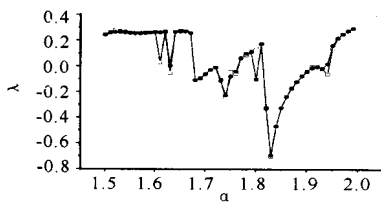
Fig. 2 (a) The change of Lyapunov exponent of the system and noise system  $\lambda$  with the increasing of  $X$  when  $T=1.80$ , noise parameter  $a=-0.30, b=0.01$ ; (b) The change of difference of exponents  $\Delta\lambda$  with the increasing of  $X$  when  $T=1.80$ , noise parameter  $a=-0.30, b=0.01$

□: B; ●: C; ■: D.

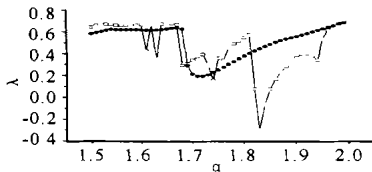
## 3 噪声影响的应用研究

### 3.1 噪声诱导系统的有序行为

从指数值由正变负可知，此时对应的随机格子系统已是非混沌的随机系统，同时存在着噪声驱动初始值不同而参数相同的 2 个格子系统达到同步的可能。



(a)



(b)

图3 (a)原系统指数与噪声系统指数 $\lambda$ 随 $\Gamma$ 的变化  $X_c=0.16$ ,噪声参数为 $a=-0.005, b=0.005$ ; (b)原系统指数与噪声系统指数 $\lambda$ 随 $\Gamma$ 的变化  $X_c=0.16$ ,噪声参数为 $a=-0.30, b=0.01$

Fig. 3 (a) The change of Lyapunov exponent of the system and noise system  $\lambda$  with the increasing of  $\alpha$  when  $X_c=0.16$ , noise parameter  $a=-0.005, b=0.005$ ; (b) The change of Lyapunov exponent of the system and noise system  $\lambda$  with the increasing of  $\Gamma$  when  $X_c=0.16$ , noise parameter  $a=-0.30, b=0.01$

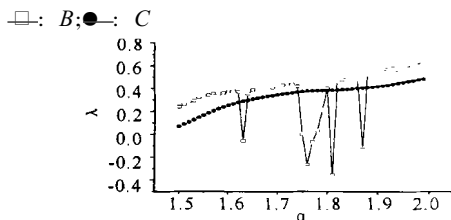


图4 原系统指数与噪声系统指数 $\lambda$ 随 $\Gamma$ 变化  $X_c=0.34$ ,噪声参数为 $a=-0.70, b=0.01$

Fig. 4 The change of Lyapunov exponent of the system and noise system  $\lambda$  with the increasing of  $\Gamma$  when  $X_c=0.34$ , noise parameter  $a=-0.70, b=0.01$

□: B; ●: C

本文发现小的噪声(包括对称波动和不对称波动)诱导的有序基本是一种系统内部吸引子的迁移,对应大的偏差噪声有随机同步的情况发生<sup>[5]</sup>.

研究初值不同的两系统,系统参数均为 $a=1.80, X_c=0.16$ .第一、二系统初值分别为:  $(-0.038840, -0.622538, 0.139582), (0.267760, 0.782713, -0.501900)$ ,相同的噪声加入系统每一步的演化中.

图5 图6是上述两种情况的典型示例.图5 图6中 $n$ 代表系统演化步数,轨道偏差 $\|w\|$ 定义为:

$$\|w\| = \sum_{i=1}^3 e_i^2, \text{ 其中 } e_i = y(i) - x(i), (i=1, 2, 3) \text{ 是两系统中对应格点的差值. } \|w\| \text{ 随演化步数趋于零, 则表示两系统获得同步. 为防止计算精度下的虚假同步}^{[3]}, \text{ 在系统每一格点加入 } 10^{-17} \text{ 量级的极小的独立噪声.}$$

图5 图6是上述两种情况的典型示例.图5 图6中 $n$ 代表系统演化步数,轨道偏差 $\|w\|$ 定义为:

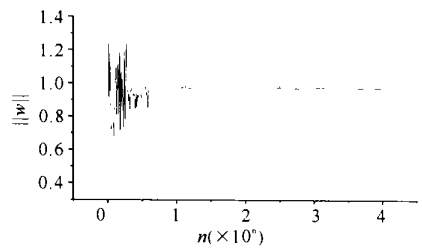
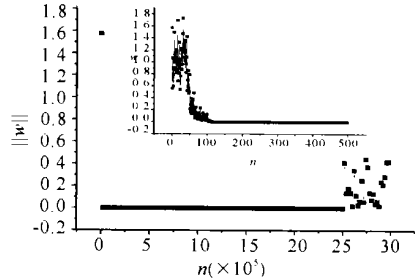
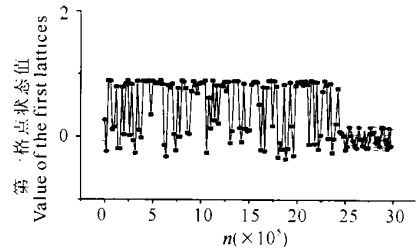


图5  $\|w\|$ 随步数 $n$ 的变化噪声参数为 $a=-0.005, b=0.005$

Fig. 5 The change of  $\|w\|$  with the increasing of steps  $n$  noise parameter  $a=-0.005, b=0.005$



(a)



(b)

图6 (a)  $\|w\|$ 随步数 $n$ 的变化噪声参数为 $a=-0.65, b=0.10$ ; (b)两系统对应第一格点状态值随演化步数 $n$ 的变化噪声参数为 $a=-0.65, b=0.10$

Fig. 6 (a) The change of  $\|w\|$  with the increasing of steps  $n$  noise parameter  $a=-0.65, b=0.10$ ; (b) The change of numerical value of the first lattices in two systems with the increasing of steps  $n$  noise parameter  $a=-0.65, b=0.10$

■: B; □: C; ●: D.

图5是加入的噪声波动范围为 $(-0.005, 0.005)$ 的一随机序列,计算得到对应噪声指数值为 $-0.139$ .以两系统的初值计算得到系统指数值为 $0.14$ .随机演化到300万步后,撤除噪声,可以看到经过一定过渡过程, $\|w\|$ 的输出只在一确定值上扰动,撤除噪声后, $\|w\|$ 保持确定值.以此时两系统值作为初始条件,计算得到指数值为 $-0.14$ .这反映噪声将系统由一混沌吸引子诱导至系统原有的稳定有序区域.即使取不同随机序列,暂态不同,但最终系统都被诱导至周期稳定区域.

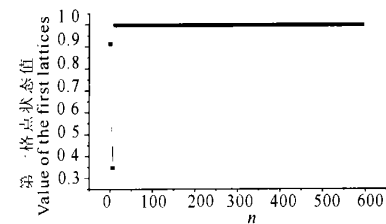
图6显示两个系统在波动噪声驱动下获得同步.这里是取波动范围为 $(-0.65, 0.10)$ 的随机序列,随机演化250万步后再让两系统自行运行50万步.图6(a)中的小图显示同步转变的细节,每步给出偏差.

图 6 (b) 具体显示两系统对应第一格点的状态值的演化情况.  $C, D$  分别代表第一系统和第二系统. 数值研究中发现一般到达同步的演化步数在  $10^5$  到  $10^6$  量级. 在相同初值下, 所需同步演化步数依赖不同具体的随机序列.

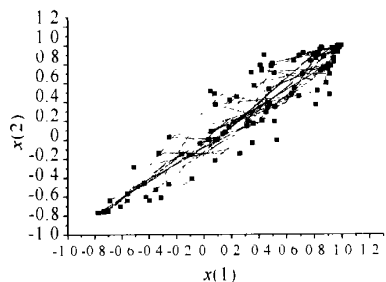
并不是所有满足波动范围的随机序列都可以获得完全同步, 只改变具体随机序列, 其它条件不变, 还可能存在一种局部同步的情况, 即只有个别对应格点获得同步. 数值发现上述系统在  $a$  负值波动超过  $-0.65$  以后, 其噪声影响基本只有上述完全同步和局部同步一种模式. 噪声负值波动在  $-0.65$  以内根据不同的随机序列存在局部同步, 或不能驱动同步. 对应  $X$  响应敏感区间存在类似的变化关系. 以上研究说明, 噪声影响的程度主要取决于原系统内部动力学结构和波动范围.  $a = 1.70 \sim 1.80$  时, 以上噪声效应非常明显.  $X$  是一个关键因素, 在  $X$  敏感区, 负值波动越大, 获得负值越大, 越趋于获得完全同步.

### 3.2 噪声引起系统的混沌行为

本文同时发现噪声对应各个  $X$  在某些相应的  $a$  值存在诱导混沌的情况. 图 7 为噪声诱导混沌的示例, 系统参数  $a = 1.77, X = 0.24$ . 初值与计算指数值相同时, 取一随机序列, 其波动范围是  $(-0.10, 0.05)$ . 计算得到指数值. 噪声指数值分别为  $-0.068, 0.32$ . 图 7 (a) 是第一格点状态值随步数  $n$  的变化, 系统运行 600 步, 隔 6 步给出数值. 可以看到系统是周期的. 图 7 (b) 是取一具体的随机序列, 第一格点和第二格



(a)



(b)

图 7 (a) 系统第一格点状态值随步数  $n$  的变化; (b) 系统第一格点和第二格点状态值随步数  $n$  变化

Fig. 7 (a) The change of numerical value of the first lattice in system with the increasing of steps  $n$ ; (b) The change of the numerical value of the first and the second lattice in system with the increasing of steps  $n$

点状态值的变化情况. 系统运行 100 万步, 隔 1 万步给出状态值. 在噪声的影响下系统运动形成了混沌吸引子.

## 4 结束语

本文考虑了耦合映象格子中局部反应参数噪声对系统的影响, 发现  $X = 0.1 \sim 0.2$  时, 系统对噪声的响应非常敏感. 通过计算噪声指数, 发现在噪声的影响下原指数值既可减小, 也可增加. 在  $X$  敏感区间, 发现小的波动噪声具有吸引子的迁移作用, 而对应大的负值偏差噪声, 主要是使原指数值减小. 随着波动噪声负值偏差的增大, 指数值可以减小到负值区, 并越来越小. 与此对应噪声驱动两格子系统达到随机完全同步或随机局部同步. 负值偏向波动越大, 越趋向于随机完全同步. 我们同时发现了噪声诱导混沌的现象, 形成了随机系统的混沌吸引子, 诱导了混沌. 上述发现对于噪声在时空混沌的控制与同步领域的应用将有重要意义, 特别是随机同步与随机诱导混沌在混沌保密通讯和混沌反控制中将有重要应用价值.

### 参考文献

- 1 Fahy S, Hamann D R. Transition from Chaotic Behaviour in Randomly Driven Systems. Phys Rev Lett, 1992, 69 (5): 761-764.
- 2 Maritan A, Banavar J. Chaos, Noise, and Synchronization. Phys Rev Lett, 1994, 72 (10): 1451-1454.
- 3 Pikovsky A S. Comment on "Chaos, Noise, and Synchronization". Phys Rev Lett, 1994, 73 (21): 2931.
- 4 Qu Z, Xie F and Hu G. Spatiotemporal on-off intermittency by random driving. Phys Rev E, 1996, 53 (2): R1301-R1304.
- 5 Baroni L, Livi R. Transition to stochastic synchronization in spatially extended systems. Phys Rev E, 2001, 63 (3): 036226-1-036226-10.
- 6 Kaneko K. Period-Doubling of Kink-Antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice. Prog Theor Phys, 1984, 72 (3): 480-486.
- 7 杨维明. 时空混沌和耦合映象格子. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.
- 8 王光瑞, 陈光旨. 非线性常微分方程的混沌运动. 南宁: 广西科学技术出版社, 1995. 205-207.
- 9 杨维明. 时空混沌和耦合映象格子. 上海: 上海科技教育出版社, 1994. 34-36.
- 10 Pecora L M, Carroll T L. Driving systems with chaotic signals. Phys Rev A, 1991, 44 (4): 2374-2383.
- 11 Pikovsky A S. Statistics of trajectory separation in noisy dynamical systems. Phys Lett A, 1992, 165: 33-36.

(责任编辑: 黎贞崇)