

## 数学表达式的自动识别\*

## A Survey of Mathematical Expression Auto-recognition

陈洪波 王 强 徐晓蓉 张超英

Chen Hongbo Wang Qiang Xu Xiaorong Zhang Chaoying

(广西师范大学物理与信息工程学院 桂林市育才路 3号 541004)

(College of Physics &amp; Information Technology, Guangxi Normal University,

3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要** 阐述数学表达式的特点和文档中数学表达式定位的几种方法,分析数学表达式符号分割、识别方法,以及数学表达式的结构分析方法,给出数学表达式的错误检测及纠正和识别系统性能评价方法,提出未来数学表达式自动识别的研究方向和热点。

**关键词** 数学表达式 自动识别 页面分割 符号识别 结构分析 错误检测与纠正 性能评价

中图分类号 TP391

**Abstract** The process of mathematical expression recognition is introduced. The properties of mathematical expressions and several methods of finding and extracting the mathematical expressions in document are described. Typically, the process of recognition of mathematical expressions consists of two major stages: symbol recognition and structural analysis. The two important issues in expression recognition, i. e., error detection and correction, and performance evaluation are addressed in depth. In this paper, we emphasize the similarities and differences between systems.

**Key words** mathematical expression, auto-recognition, page segmentation, symbol recognition, structural analysis, error detection and correction, performance evaluation

随着因特网的飞速发展,将纸上的文字转换成电子文档,已成为信息交流的重要步骤。目前文字识别的方法很多<sup>[1]</sup>,也形成了一些比较成熟的软件(如清华紫光 OCR、汉王科技等),它们对印刷体文字(包括英文和汉字)的识别率最高,对手写体文字的识别率也在逐步提高。但由于数学表达式中包含了一些特殊的字符,如数字、英文字母、希腊字符和一些数学运算符号等,并且这些符号不像简单文本那样线性排列,而是按一定规则分布在二维结构中,结构比较复杂,计算机对它的自动识别富有挑战性<sup>[2]</sup>。当前的 OCR 软件仍无法识别科学文献和工程文献中的数学表达式。本文详细介绍目前国内有关数学表达式的自动识别研究作,提出未来数学表达式自动识别的研究方向和热点。

## 1 数学表达式的特点

在文档中,数学表达式区别于一般文字的一个主要特点是:将大小不一定完全相同的符号按一定规则排列成一个二维层次结构。下面对数学表达式的特点<sup>[3,4]</sup>进行阐述。

## 1.1 数学表达式中的符号

数学表达式中的符号可分为基本符号和特殊符号,如绑定符号、界定符号、运算符号等,它们有各自的组织准则,如加号必须有 2 个操作数等。

对于基本符号一般有以下形成规则:(1)大小相同且相邻的数字应该是一个整体,相邻但大小不同就不能作为一个整体,如  $4^{10}$  就不作一个整体;(2)几个相邻的字母有可能形成一个整体,如函数名 ( $\tan$ ,  $\sin$ ) 等,但有时也代表 2 个变量的乘积,如  $AB$ ,它表示  $A \cdot B$ ;(3)除了字母和数字的其它符号应该独自形成一个整体。

对于特殊的符号,一般有以下 3 种情况:(1)绑定

关系符号,如分数线、 $\frac{1}{x}$ 、 $\sum$ 、 $\prod$ 等,它们同作用域中的表达式绑定在一起,如 $\sum_{i=0}^{100} i$ 中的求和符号就绑定了3个子式表达 $100$ 、 $i$ 、 $i=0$ ;(2)界定符号,如括号,它将界定符号间的内容应看成一个完整的部分,它具有更高的运算优先权;(3)运算符号,如 $+$ 、 $-$ 、 $*$ 、 $/$ 等,它们都约束着各自的操作数。

### 1.2 数学表达式的运算符号

数学表达式的运算符号包括显式运算符号和隐式运算符号。显式运算符号就是通常的运算符号,可以根据它们的运算优先权规则来确定运算关系。如果表达式不是线性的,如 $A + \frac{B}{C}$ ,可以根据运算符号的作用域来确定运算关系。隐式运算符号由相对位置来确定运算关系,而没有明显运算符号,如上标、下标和隐式的乘号。例如, $AB$ 表示变量 $A$ 和变量 $B$ 相乘;在 $a^2$ 中 $2$ 是 $a$ 的上标,而在 $a_2$ 中 $2$ 是 $a$ 的下标。

### 1.3 含义的不确定性

同样的符号,在不同的位置,其表示的含义可能不相同。例如,圆点可能表示乘,可能表示小数点,在一些数学表达式图像中还可能是噪声等;还例如 $dx$ 在式 $\int x dx$ 中 $dx$ 表示积分变元,而在式 $cy + dx$ 中表示 $d$ 和 $x$ 相乘。

另外在特殊的领域中,数学表达式中的符号有特殊的含义,如物理中的一些常数符号。所以一个数学表达式识别系统不可能适应于所有的领域,几乎所有的识别系统都只适应于某一个或某几个领域。

## 2 文档中数学表达式的定位

数学表达式自动识别可以分为脱机识别和联机识别。脱机识别主要指识别扫描仪扫描得到的数学表达式图像或包含数学表达式的文档,当然包括印刷体和手写体2种情况;而联机识别是指识别使用电子笔在指定的区域书写的表达式,主要是手写体数学表达式识别。

在科技文献和工程文献中,很多情况都是文本和数学表达式混合在一起的,所以在识别之前需要从文档中找出数学表达式,即页面分割。文档中的数学表达式表现为2种形式:独立的表达式和嵌入式表达式。独立的表达式是指独占一行的表达式,而那些和文本混合在一行中的表达式称为嵌入式表达式。

Lee和Wang<sup>[5]</sup>采用Bayes决策规则将文档中的行分为文本行(标为TEXT)和公式行(标为EXP)。在行标定后,独立的数学表达式一定在公式行(EXP)中,而嵌入式数学表达式只在标记为(TEXT)的行

中。但该方法只适应于一些简单的数学公式。

Fateman<sup>[6]</sup>提出的方法中定义了文本包(Text bag)和公式包(Math bag),首先将所有的符号初始化为2类,分别放在定义好的2个包中。初始化时,文本包中包括罗马字符、斜体数字等,公式包中包括标点符号、特殊符号、斜体字母、罗马数字以及其它一些标记如水平线和句点等。然后定义一些启发式规则,并根据这些规则将它们不断调整文本包和公式包中的内容,以保证它们能正确分类。

用Chaudhuri和Garain<sup>[7]</sup>的算法定位独立的数学表达式不要用到符号识别的方法,它通过计算行内各符号的纵坐标的平均值和标准差来判断本行是否为独立的数学表达式。采用符号识别的方法来检测嵌入式数学表达式,如果存在某个特殊符号(这里的特殊符号指数学表达式中特有的符号),则说明存在数学表达式,并采用启发式算法来得到整个数学表达式。

Kacem等<sup>[8,9]</sup>的方法是基于定位查找一些最重要的符号,并从此开始查找它相邻的符号。该方法主要是基于全局分割和局部分割,全局分割用来定位独立的数学表达式;而局部分割是用来从普通文本中查找嵌入式数学表达式。在该方法中用到了基于标签技术的模糊逻辑理论。

## 3 符号识别

目前符号识别的方法有很多,但它们大多数是基于单个符号的识别,而数学表达式往往由很多符号组成,所以在符号识别之前,要将数学表达式进行分割,得到单个的符号图像(基元),然后利用识别的方法对它进行识别。

### 3.1 符号分割

如果将一个符号看作一个整体(即是连通的),则可以采用基于区域填充的思想将它们分割,但有些符号有多个组成部分,如“ $l$ ”、“ $j$ ”、“ $=$ ”等都有2个组成部分,也不能简单地用OCR的常规方法来对它进行分割,因为常规OCR方法主要用于一维线性结构的文字,而表达式的结构是二维的。

Faure和Wang<sup>[10]</sup>设计了一种用来分割手写体数学表达式的系统。在这个系统中分为基于数据的分割模块和基于知识的分割模块。前者首先建立表达式的关系树,利用图像在 $X$ 轴和 $Y$ 轴的投影(Projection)来决定如何分割表达式,但这很难分割出含有分数线的表达式;后者用于调整前面建立的关系树,如将一个有多个组成部分的符号(如“ $l$ ”、“ $j$ ”、“ $=$ ”)合并成整体。

Okamoto等<sup>[11,12]</sup>通过水平和垂直方向投影的递归分割方法来分割印刷体表达式.但这种对诸如“ $i$ ”, “ $j$ ”, “ $=$ ”, “ $-$ ”类的符号的分割需要一些额外的处理.

Ha等<sup>[13]</sup>使用符号的边界框来分割印刷体数学表达式.这种方法称为“ $X - Y$ 递归”,“ $X$ ”指水平方向分割,“ $Y$ ”指垂直方向分割.这种方法和基于投影的分割的区别在于后者是基于像素的,而前者是基于边界框的.

Smithies等<sup>[14]</sup>首先产生所有可能的分割基元,然后符号识别器根据它们的可信度来合并.这种算法简单而且速度快,但出错较多,而且需要人工纠错.

### 3.2 符号识别

符号分割后,可以得到符号图像的一些属性,如位置、大小等,但它们还是图像,还要进行识别.目前有很多关于符号识别的算法,它们大体上可以分为模板匹配方法、结构匹配方法和统计理论方法.

#### 3.2.1 模板匹配方法

Nakayama<sup>[15]</sup>和 Okamoto等<sup>[11,12]</sup>采用传统的模板匹配方法来进行字符识别,虽然传统的模板匹配的方法简单,易于实现,但是有2个缺点:一是模板字典比较大,而且在匹配时速度较慢;二是对符号图像的要求比较高,如果符号图像存在变形,则可能会被拒绝或识别成错误字符. Fateman<sup>[16,17]</sup>、Miller和 Viola等<sup>[18]</sup>提出基于 Hausdorff距离的模板匹配方法.

#### 3.2.2 结构匹配方法

Chan和 Yeung<sup>[4,19,20]</sup>利用弹性结构匹配的方法来对手写体符号进行识别.这种方法首先用链码来表示图像的像素序列,对每一笔划都提取2个基元的属性(包括基元的类型和方向),其中一个表示起笔笔划,另一个表示落笔笔划.然后在模板字典中寻找与它匹配的符号.如果没有匹配的,则要对它进行变形,主要有4种变形:不变形、基元类型变形、方向变形、基元类型和方向同时变形.一旦找到了与其匹配的符号,则算法就结束.这种方法比较简单,而且鲁棒性好,在他们进行的实验中,识别率可以达到97%以上.

还有如 Belaid和 Haton<sup>[21]</sup>提出采用结构特征的提取和基于决策树的分类器设计的方法来识别符号.

#### 3.2.3 统计理论方法

符号识别是一个典型的模式识别问题.可以说,整个模式识别的研究基本上都围绕着特征提取和分类器设计这两个大问题进行的,数学表达式识别中的符号识别也是如此.如 Chen和 Yin<sup>[22]</sup>、Fateman<sup>[23]</sup>和 Lee等<sup>[5,24-26]</sup>提出特征提取和最近邻分类的方法来

识别印刷体或手写体符号. Ha等<sup>[13]</sup>和 Marzinkewitsch<sup>[27]</sup>提出特征提取和神经网络相结合的方法来识别符号.

### 3.3 符号分割和识别并行

以上讨论的是在符号分割后再识别,而有些方法将这两个过程融为一体.如基于隐马尔可夫模型(HMM)的方法.实践证明HMM方法用于语音识别是非常有效的,有些研究者尝试着将它用于数学表达式中的符号识别.

Winkler等<sup>[28-32]</sup>首先为手写体符号的输入产生一个符号假设网(SHN),然后使用HMM从SHN中查找一个或多个符号序列,并根据可能性最大的符号序列来决定最终的符号分类,这种方法也称为软决策方法. Satamoto等<sup>[33]</sup>也用HMM方法来识别数学表达式中的符号.

## 4 结构分析

在符号识别中可以得到数学表达式中每个符号的固有属性,如大小、位置和相应的符号.结构分析就是要分析这些识别得到的符号的层次结构,它们的层次结构可以表示成分析树或关系树.

### 4.1 隐式运算符号的标识

隐式运算符号是由数学表达式中符号之间的相对位置决定的,大多数情况下它隐含在符号的固有属性之中,特别是符号的中心(主要指其印刷中心),如图1所示.有时简单地根据符号的印刷中心,就可以判断它们的空间关系,如在同一条线上或是线下、线上关系,进而可以得到隐式乘、下标和指数等关系,在文献[11,22,34]中就使用这种方法来分析数学表达式. Wang和 Faure<sup>[35]</sup>提出一种甚至不需要经过符号识别过程就可以决定各字符之间的关系,它利用的是各图像基元的边界框.这种方法在不知符号的标识时非常有用,但总体来说仅用边界框来决定符号之间的位置关系是不够的,有时会出现一些歧义或误判.如图2所示,在2个表达式中,边界框的位置和形状是差不多的,但它们之间的关系是不相同的,左图表示“ $qx$ ”,是相乘的关系,而右图表示“ $d^x$ ”,是指数关系.

### 4.2 分析数学表达式的方法

关于数学表达式识别的最早的论文是1968年 Anderson<sup>[34]</sup>撰写的.他采用单一的自上而下的方法来解析数学表达式.该算法从最终目标出发,将问题分为许多个子目标,直到所有的子目标都达到或都不能满足为止,这种方法是由一些语法规则来引导的,虽然据 Anderson自己所说的,在实验中根据该规则的目标分割策略不是很有效的.但这对数学表达式的

识别系统作出了巨大的贡献。

在 20 世纪 70 年代, Chang<sup>[36]</sup> 提出一种分析二维数学表达式的方法, 它主要利用运算符的优先权和作用域, 其分析分构造运算序列和构造结构树 2 个主要步骤, 但这种方法没有在实验上作更多的工作。

在 20 世纪 80 年代以后, 对数学表达式的结构分析的方法的研究比较多。Belaid 和 Haton<sup>[21]</sup> 针对比较简单的数学表达式, 主要探讨利用上下文信息解决歧义问题的方法。在采用结构方法识别符号之后, 用自上而下的方法将表达式分解成很多个子式表达, 然后用自下而上的方法将子式表达组合成更全面的数学表达式。

Lee 和 Lee<sup>[24, 25]</sup> 首先利用传统的统计方法识别单个的符号, 然后用程序导向方法将二维结构转换为一维符号串。Dimitriadis 等<sup>[37, 38]</sup> 利用 ART 神经网络识别符号之后, 用特征语法解析其结构, 但作者没有做错误检测和纠正等方面的工作, 需要做一些附加的处理来进行错误检测和纠正。另外, 这种方法能与人们的书写习惯相适应。

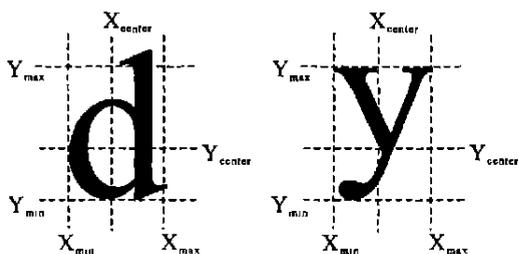


图 1 符号的印刷中心示意图

Fig. 1 Typographical centers for symbols

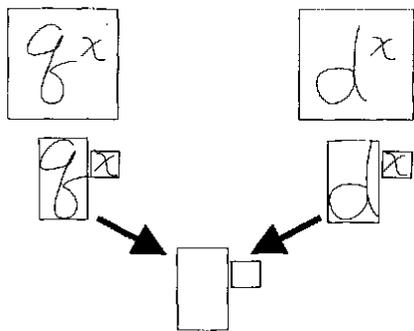


图 2 仅用边界框时的情况

Fig. 2 The instance of using bounding boxes only

Lavirotte 和 Pottier<sup>[39, 40]</sup> 提出采用图文法来识别二维数学表达式。图文法是多维数据结构的一种比较好的描述方法, 其主要的问题是语法规则之间的模糊性和图的构造, 在理论上采用精确定义的方法来解决图文法之间的模糊性。在实验中公式是从位图中获得, 并对多种复杂的公式进行实验, 有良好的时间复杂性。

Chan 和 Yeung<sup>[41]</sup> 采用结构和句法的方法开发了一个联机数学表达式识别系统, 用弹性结构匹配方法识别符号之后, 用句法的方法 (确定性子句语法, DCG) 得到数学表达式的结构。采用 DCG 不仅能精确地定义替换规则, 而且这些规则能很容易地被执行, 它提出了一些用于解决 DCG 中的回溯带来的负面影响的方法, 如绑定符号预处理、层次分解。据说这种方法对向量和数组的识别很有效。

Chaudhuri 和 Garain<sup>[7]</sup> 将数学表达式的解析过程分为两个阶段, 第一阶段定义符号之间的空间关系, 第二阶段决定各个符号之间的逻辑关系。两个或更多符号依照它们之间的逻辑关系组成一些子表达式, 由这些子表达式最终组成整个表达式。

Okamoto 等<sup>[42]</sup> 将表达式分为两类: 一类是含有分式、根号、括号或数组的子式表达, 称为 Group-A; 另一类带有上下标或上下限的符号或子式表达, 称为 Group-B。对于 Group-A 子式表达定义了一些核符号, 如“(”, “-”, “<sup>-</sup>”, “[”, “{”, “|” 等, 然后通过查找这些核符号来分析表达式; 对于 Group-B 子式表达, 通过查找上下标和上下限的符号区域来分析表达式。

Zanibbi 等<sup>[2]</sup> 通过树变换来分析数学表达式的结构。整个过程可以分为 3 个阶段。第一个阶段构建初始基线结构树 (BST), 它主要描述输入笔划符号的二维布局, 如“=”就分成两笔输入。第二阶段通过变换将初始的 BST 变换成词法 BST, 在词法 BST 中包括十进制数字、函数名、以及多笔划符号如“=”, 当然也包括竖直结构如分式。第三阶段将词法 BST 变换成运算符树, 这个树表示输入表达式的运算顺序。在每个阶段都是采用树变换来实现的。

#### 4.3 结构分析和符号识别并行

前面说过, HMM 是可以用于符号分割和符号识别的并行系统, 有些研究者尝试着将 HMM 直接应用到数学表达式的识别, 包括结构分析。Kosmala 和 Rigoll<sup>[43, 44]</sup> 在将 HMM 应用到符号分割和识别的同时, 还对表达式的结构进行分析。但该方法要求书写表达式时必须按一定的顺序, 而且指数最大只能是一层, 即不能有如含有  $d^b$  的表达式。

总体来说, 数学表达式的结构分析是数学表达式识别系统与字符 (汉字) 识别系统的最大区别, 也是最大的难点。前面提到的各种结构分析的方法, 大多数是在方法上的探讨, 有些方法在实验上做了一些工作, 但都是在某种特殊的条件下进行的, 这离应用的要求还有一定的距离。

## 5 错误检测及纠正

在数学表达式识别的时候经常会出现错误.识别中错误的检测和纠正也是数学表达式识别系统中一个重要的组成部分,但目前关于错误检测和纠正的文献并不很多.

第一次尝试着检测并纠正表达式识别中的错误是 Dimitriadis等<sup>[37]</sup>,但他们所采用的方法很简单,只在检测到错误时提出一些警告信息,有些信息是提示用户的,如:“the root symbol should cover all of its terms”;还有些是由致命错误造成的,如:“the function tan does not have arguments”,这些错误需要用户去纠正.

Lee和 Wang<sup>[5,26]</sup>采用一些启发式规则来检测错误.例如,若在识别后得到如“ $x = 5ir\theta$ ”的表达式,因为“5”和“s”相似,则表达式将被更正为 $x = \sin\theta$ ,这就是文中的一个规则,即在表达式中经常出现的函数名如“sin”,“cos”,“tan”,“csc”,“sec”,“log”,“exp”等.另外还有一些规则如:双目运算符必须有两个操作数;数字没有下标;在同一操作数中的符号具有相同的性质等等.

Chan和 Yeung<sup>[3,45]</sup>将在数学表达式识别过程中出现的错误分为4类:词汇错误、句法错误、语义错误和逻辑错误.词汇错误主要是由表达式的书写质量(如书写风格、输入设备的质量等)引起的,这类错误很难纠正,即使纠正也不能保证纠正得到的结果是正确的;句法错误有很多种情况,如函数名后缺少函数体,缺少操作数,无效的隐式运算符,括号不平衡等,在文中提出了一些解决方法,并举了很多例子说明;语义错误是指诸如一个运算符具有不相匹配的操作数,如“+ ana”就要改为“tan a”,因为有些人写“t”和“+”很相似;逻辑错误是象“1+ 1= 3”的错误,这在文中没有给出纠正的方法.

## 6 数学表达式识别系统的性能评价

数学表达式识别系统主要是由符号识别和结构分析两个过程组成,所以系统的评价方法也应该是基于这两个过程的.评价的方法主要有4种<sup>[45]</sup>:

### 6.1 表达式识别率 $R_e$

这种方法是根据系统对表达式的识别的结果分成两类,一类是整个表达式被完全正确识别,另一类是表达式没有被完全正确识别,则以正确的识别率  $R_e$  作为评价的指标:

$$R_e = \frac{\text{被正确识别的表达式个数}}{\text{测试的表达式总数}}$$

但是,如果一个系统在识别某表达式时只有一个符号不能正确识别,而另一个系统识别该表达式时所有符号都不能正确识别,只要它们的  $R_e$  相同,则这种评价方法认为这两个系统的性能是一样的.

### 6.2 符号识别率 $R_s$

这种方法是比较普遍的评价方法,它主要评价符号识别的过程.识别率  $R_s$  是正确识别符号的个数和符号的总数的比例:

$$R_s = \frac{\text{被正确识别符号的个数}}{\text{符号总数}}$$

但这种方法没有考虑到结构分析过程,所以也不能很全面的评价一个系统.

### 6.3 运算符识别率 $R_0$

这种评价方法是采用结构分析过程中对运算符的识别率来评价识别系统.在数学表达式中有两类运算符:隐式运算符和显式运算符,在这种评价方法中的运算符应该包括这两种运算符.运算符识别率  $R_0$  定义为:

$$R_0 = \frac{\text{被正确识别的运算符的个数}}{\text{运算符总数}}$$

但有时很难统计运算符的个数,特别是隐式运算符.如果采用结构树来表示一个表达式,可以将结构树的结点看作运算符的个数.

### 6.4 综合评价方法 $R_c$

数学表达式系统的完整的评价方法应同时考虑到符号识别和结构分析两个方面,若采用符号识别率或运算符识别率来评价系统,都不能全面地反映系统的性能.因此将两者综合在一起,就构成了综合评价方法  $R_c$ :

$$R_c = \frac{\text{被正确识别的符号和运算符的个数}}{\text{符号和运算符的总数}}$$

总体来说,一个既能很好地识别表达式中的各个符号,并能正确分析表达式的结构的数学表达式识别系统才是一个性能好的系统.

## 7 展望

数学表达式识别的研究开始于20世纪60年代,但直到最近几年才引起研究者的注意,20世纪70年代和80年代公开发表的文献很少,所以对数学表达式识别的研究实际上还刚刚开始,还存在很多有待解决的问题.

### 7.1 新方法的探索

数学表达式是由很多的符号组成,结构比较特殊,而且具有很强的领域性(即在不同的领域中符号所表示的含义不相同).当前所有数学表达式识别系统对组成表达式的符号集和所用的语法规则都有一

定的约束条件.如果要减少约束条件,就要对现有的方法进行改进或探索新的处理方法.

## 7.2 歧义处理 错误检测和纠正

由于印刷、书写或其它原因,可能会导致识别时的歧义.另外在识别过程中可能得到一些错误的结果,在表达式识别系统中如何解决歧义问题,如何纠正检测到的识别错误,这也是当前以及未来表达式识别研究的热点和难点之一.

## 7.3 识别系统的评价方法

数学表达式识别过程主要包括 2 个阶段,现有的评价方法中还没有一种既全面评价符号识别和性能,又能够正确反应结构分析的情况.

## 7.4 识别系统的应用

目前数学表达式识别主要应用在编辑器系统中,如文献 [15, 37, 38],很少有手写体表达式识别系统的报道.另外一些潜在的应用是基于笔的计算器系统和基于笔的学生数学训练智能系统.

本文中,我们对数学表达式识别过程中的各个阶段的现有的主要方法作概述.结合数学表达式的特点,介绍了几种从文档中定位并提取数学表达式(页面分割)的方法.数学表达式识别由两个关键步骤组成,即符号识别和结构分析.在符号识别中,有很多不同的方法:模板匹配、结构匹配、神经网络、统计理论等方法;在结构分析部分,有些方法采用确定的语法规则(如图文法,DCG,特征语法),而有些方法利用一些变换手段(如树变换)来分析其结构,得到完整的数学表达式.但无论是符号识别的方法还是结构分析的方法,很多都只是从理论上分析,没有进行实验.有些方法虽然采用一些比较简单的数学表达式进行实验,得到了一定的效果,但都是在特殊条件下进行的,如果去掉这些条件,结果还远远没有达到我们的要求,特别是对于手写体符号的识别和结构分析,难度更大.本文还对错误的检测和纠正.数学表达式识别系统的评价方法作了简单的介绍,但这还刚刚起步,还存在很多的实质性的问题需要解决.总而言之,数学表达式识别是一个新兴而富有挑战性的研究方向,还存在许多有待解决的课题.

## 参考文献

- 1 丁晓青.汉字识别研究的回顾,电子学报,2002.30(9): 1364~ 1368.
- 2 Zanibbi R, Blostein D, Cordy J R. Recognizing mathematical expressions using tree transformation. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 2002. 24(11): 1~ 12.
- 3 Chan K F, Yeung D B. Mathematical expression recogni-

tion a survey. International Journal on Document Analysis and Recognition, 2000. 3(1): 3~ 15.

- 4 Chan K F, Yeung D Y. PenCalc: A novel application of on-line mathematical expression recognition technology. ICDAR, 2001, (29): 774~ 778.
- 5 Lee H J, Wang J S. Design of mathematical expression recognition system. ICDAR, 1995, (26): 1084~ 1087.
- 6 Fateman R J. How to find mathematical on a scanned page. Proc SPIE, 1999, (3967): 98~ 109.
- 7 Chaudhuri B B, Garain U. An approach for recognition and interpretation of mathematical expressions in printed document. Pattern Analysis & Applications, 2000, (3): 120~ 131.
- 8 Kacem A, Belaid A, Ahmed M B. EXTRAFOR automatic extraction of mathematical formulas. ICDAR, 1999, (28): 527~ 530.
- 9 Kacem A, Belaid A, Ahmed M B. Automatic extraction of printed mathematical formulas using fuzzy logic and propagation of context. International Journal on Document Analysis and Recognition, 2001, 4(2): 97~ 108.
- 10 Faure C, Wang X. Automatic perception of the structure of handwritten mathematical expressions, Plamondon R & C. Leedham. eds. Computer Processing of Handwriting, Singapore World Scientific, 1990. 337~ 361.
- 11 Okamoto M, Miao B. recognition of mathematical expressions by using the layout structures of symbols. ICDAR, 1991, (25): 242~ 250.
- 12 Okamoto M, Miyazawa A. An experimental implementation of a document recognition system for papers containing mathematical expressions. Baird H S & Bunke H & K Yamamoto. eds. Structured Document Image Analysis. Berlin: Springer, 1992. 36~ 53.
- 13 Ha J, Haralick R M, Phillips I T. Understanding mathematical expressions from document images. ICDAR, 1995 (26): 956~ 959.
- 14 Smithies S, Novins K, Arvo J. A handwriting-based equation editor. Graphics Interface, 1999, 9 84~ 91.
- 15 Nakayama Y. A prototype pen-input Mathematical formula editor. Proc. ED-MEDIA 93-World Conf on Educ. Multimedia and Hypermedia, Orlando, 1993. 400~ 407.
- 16 Berman B P, Fateman R J. Optical character recognition for typeset mathematics. Oxford Proc 1994 Int Symp Symb Algebraic Comput, 1994. 348~ 353.
- 17 Fateman R J, Tokuyasu T. Progress in recognizing typeset mathematics. Proc SPIE San Jose CA, 1996, 2660 37~ 50.
- 18 Miller E G, Viola P A. Ambiguity and constraint in mathematical expression recognition. Madison Proc 15th Nat Conf On Artif Intell, 1998. 784~ 791.

- 19 Chan K F, Yeung D Y. Recognizing online handwritten alphanumeric characters through flexible structural matching. *Pattern Recognition*, 1999, 32(7): 1099~ 1114.
- 20 Chan K F, Yeung D Y. Elastic structural matching for recognizing on-line handwritten alphanumeric characters. Technical Report HKU ST-CS98-07, Department of Computer Science, Hong Kong University of Science and Technology, 1998
- 21 Belaid A, Haton J P. A syntactic approach for handwritten mathematical formula recognition. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 1984, 6(1): 105~ 111.
- 22 Chen L H, Yin P Y. A system for online recognition of handwritten mathematical expressions. *Comput Process Chin Orient Lang*, 1992, 6(1): 19~ 39.
- 23 Fateman R J, Tokuyasu T, Berman B P, et al. Optical character recognition and parsing of typeset mathematics. *J Visual Commun Image Represent*, 1996, 7(1): 2~ 15.
- 24 Lee H J, Lee M C. Understanding mathematical expressions in printed document. *Tsukuba Proc 2nd Int Conf On Doc Anal Recognition*, 1993. 502~ 505.
- 25 Lee H J, Lee M C. Understanding mathematical expressions using procedure-oriented transformation. *Pattern Recognition*, 1994, 27(3): 447~ 457.
- 26 Lee H J, Wang J S. Design of mathematical expression recognition system. *Pattern Recognition Letter*, 1997, 18 289~ 298.
- 27 Marzinkewitsch R. Operating computer algebra systems by handprinted input, *Proc Bonn 1991 Int Symbp Symbol Algebraic Comput*, 1991, 7: 411~ 413.
- 28 Koschinski M, Winkler H J, Lang M. Segmentation and recognition of symbols within handwritten mathematical expressions. *ICASSP*, 1995, (23): 2439~ 2442.
- 29 Lehmberg S, Winkler H J, Lang M. A soft-decision approach for symbol segmentation within handwritten mathematical expressions. *ICASSP*, 1996, (24): 3434~ 3437.
- 30 Winkler H J. HMM-based handwritten symbol recognition using online and offline features. *ICASSP*, 1996, (24): 3438~ 3441.
- 31 Winkler H J, Lang M. Online symbol segmentation and recognition in handwritten mathematical expressions. *Proc. IEEE Int Conf. On Acoustics, Munich Speech and Signal Process*, 1997, 4 3377~ 3380.
- 32 Winkler H J, Lang M. Symbol segmentation and recognition for understanding handwritten mathematical expressions. A Downton & S Impedovo. eds. *Progress in Handwriting recognition*, Singapore World Scientific, 1997. 407~ 412.
- 33 Sakamoto Y, Xie M, Fukuda R. Online recognition of handwriting mathematical expression via network-ATCM, 1998, (4): 271~ 279.
- 34 Anderson R H. Syntax-directed recognition of handprinted two-dimensional mathematics. Klerer M, J Reinfelds. eds. *Interactive Systems for Experimental Applied Mathematics*, New York Academic Press, 1968. 436~ 459.
- 35 Wang Z X, Faure C. Structural analysis of handwritten mathematical expressions. *Rome Proc 9th Int Conf On Pattern Recognition*, 1988. 32~ 34.
- 36 Chang S K. A Method for the structural analysis of two-dimensional mathematical expressions. *Inf Sci*, 1970, 2(3): 153~ 272.
- 37 Dimitradis Y A, Coronado J L. Towards an ART based mathematical editor, that uses online handwritten symbol recognition. *Pattern Recognition*, 1995, 28(6): 807~ 822.
- 38 Dimitradis Y A, Coronado J L, et al. A new interactive mathematical editor, using online handwritten symbol recognition, and error detection-correction with an attribute grammar. *ICDAR*, 1991, (25): 885~ 893.
- 39 Lavirotte S, Pottier L. Mathematical formular recognition using graph grammar. *San Jose Proc SPIE*, 1998, 3305 44 ~ 52.
- 40 Lavirotte S, Pottier L. Optical formula recognition. *ICDAR*, 1997, (27): 357~ 361.
- 41 Chan K F, Yeung D Y. An efficient syntactic approach to structural analysis of on-line handwritten mathematical expressions. *Pattern Recognition*, 2000, 33 375~ 384.
- 42 Okamoto M, Imai H, Takagi K. Performance evaluation of a robust method for mathematical expression recognition. *ICDAR*, 2001(29): 121~ 128.
- 43 Kosmala A, Rigoll G. Online handwritten formula recognition using statistical methods. *Brisbane Proc 14th Int Conf On Pattern Recognition*, 1998. 1306~ 1308.
- 44 Kosmala A, Rigoll G. Recognition of online handwritten formulas, *Taejon Proc 6th Int Workshop on Frontiers in Handwriting Recognition*, 1998. 219~ 228.
- 45 Chan K F, Yeung D Y. Error detection, error correction and performance evaluation in online mathematical expression recognition. *Pattern Recognition*, 2001. 34(8): 1671~ 1684.

(责任编辑:黎贞崇)